Bemerkung zu den desmischen Tetraedern.

Von

F. CASPARY in Berlin.

Bildet man aus vier ganz beliebigen Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Summen und Differenzen und setzt:

$$(1) \quad \begin{aligned} \alpha + \beta &= a, & \alpha + \gamma &= a', & \alpha + \delta &= a'', \\ \alpha - \beta &= b, & \alpha - \gamma &= b', & \alpha - \delta &= b'', \\ \gamma + \delta &= c, & \beta + \delta &= c', & \beta + \gamma &= c'', \\ \gamma - \delta &= d, & \beta - \delta &= d', & \beta - \gamma &= d'', \end{aligned}$$

so bestehen die folgenden Beziehungen:

$$(2) \quad \begin{aligned} 2a' &= a + b + c + d, & 2a'' &= a + b + c - d, \\ 2b' &= a + b - c - d, & 2b'' &= a + b - c + d, \\ 2c' &= a - b + c - d, & 2c'' &= a - b + c + d, \\ 2d' &= a - b - c + d, & 2d'' &= a - b - c - d, \end{aligned}$$

und:

$$(3) \quad 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 \\ = a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2.$$

In der Analysis treten die Grössen $a, b, \dots, d''$ als die Argumente im Jacobi'schen Fundamentalsystem der Thetafunctionen auf, und in der Zahlentheorie liefern sie die Zerlegungen einer Zahl $4N$ in die Summe von vier Quadraten. Auch in der Geometrie haben diese Grössen eine einfache Bedeutung. Wenn man nämlich unter $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$ die Gleichungen von vier beliebigen Punkten versteht, so stellen $a = 0, b = 0, \dots, d'' = 0$ ebenfalls Punkte dar und diese dreimal vier Punkte sind die Ecken von drei desmischen Tetraedern. Der Beweis dieser Behauptung ist sehr leicht. Aus (1) folgt unmittelbar:

$$(4) \quad \begin{aligned} a - a' &= -b + b' = -c + c' = d + d' = d'', \\ a - b' &= -b + a' = c + d' = d + c' = c'', \\ a - c' &= b + d' = -c + a' = d + b' = b'', \\ a - d' &= b + c' = c + b' = -d + a' = a'', \end{aligned}$$

und diese Gleichungen setzen in Evidenz, dass die Geraden:

$$\begin{array}{llll}
 aa', & bb', & cc', & dd' \quad d'' \\
 ab', & ba', & cd', & dc', \text{ sich in } c'' \text{ schneiden,} \\
 ac', & bd', & ca', & db \quad b'' \\
 ad', & bc', & cb', & da' \quad a''
 \end{array}$$

und beweisen somit die vierfache Perspectivität der beiden Tetraeder $abcd$ und $a'b'c'd'$. Die vier Perspectivitätscentra a'', b'', c'', d'' bilden ein drittes Tetraeder, welches, wie sich durch blosse Vertauschung von δ mit γ und β ergibt, mit den Tetraedern $abcd$ und $a'b'c'd'$ ebenfalls in vierfacher Perspectivität steht, und zwar so, dass die bez. Perspectivitätscentra keine andern Punkte als die Ecken der Tetraeder $a'b'c'd'$ und $abcd$ sind. Desshalb befinden sich, nach der von Herrn Stephanos eingeführten Bezeichnung, die drei Tetraeder $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$ in desmischer Lage.

Mit Hilfe der aus (1) hervorgehenden Gleichungen erhält man, namentlich bei Anwendung der Grassmann'schen Principien, in höchst einfacher Weise die von den Herren Stephanos, Veronese, Hermes, Schröter, Reye u. A. entdeckten Resultate.

Paris, im April 1887.