Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte.

(Aus einem an Herrn F. Klein gerichteten Briefe).

Von

DAVID HILBERT in Königsberg i. Pr.

Nehmen wir die Punkte, die Geraden und die Ebenen als Elemente, so können zur Begründung der Geometrie die folgenden Axiome dienen:

1. Die Axiome, welche die Verknüpfung dieser Elemente untereinander betreffen; kurz zusammengefasst, lauten dieselben, wie folgt:

Irgend 2 Punkte A und B bestimmen stets eine Gerade a. — Irgend 3 nicht auf einer Geraden gelegenen Punkte A, B, C bestimmen eine Ebene α. — Wenn 2 Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt die Gerade a vollständig in der Ebene α. — Wenn 2 Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein. — Auf jeder Geraden giebt es wenigstens 2 Punkte, in jeder Ebene wenigstens 3, nicht auf einer Geraden gelegene Punkte, und im Raume giebt es wenigstens 4 nicht in einer Ebene gelegene Punkte. —

2. Die Axiome, durch welche der Begriff der Strecke und der Begriff der Reihenfolge von Punkten einer Geraden eingeführt wird. Diese Axiome sind von M. Pasch*) zuerst aufgestellt und systematisch untersucht worden; dieselben sind im wesentlichen folgende:

Zwischen 2 Punkten A, B einer Geraden giebt es stets wenigstens einen dritten Punkt C der Geraden. — Unter 3 Punkten einer Geraden giebt es stets einen und nur einen, welcher zwischen den beiden anderen liegt. — Wenn A, B auf der Geraden a liegen, so giebt es stets einen Punkt C der nämlichen Geraden a, so dass B zwischen A und C liegt. — Irgend 4 Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 einer Geraden a

---

*) Vgl. Vorlesungen über neuere Geometrie. Teubner 1882.

können stets in der Weise angeordnet werden, dass allgemein A_i zwischen A_h und A_k liegt, sobald der Index h kleiner und k grösser als i oder umgekehrt der Index k kleiner und h grösser als i ist. — Jede Gerade a, welche in einer Ebene α liegt trennt die Punkte dieser Ebene α in 2 Gebiete von folgender Beschaffenheit: ein jeder Punkt A des einen Gebietes bestimmt mit jedem Punkt A' des anderen Gebietes zusammen eine Strecke AA', innerhalb welcher ein Punkt der Geraden a liegt; dagegen bestimmen irgend 2 Punkte A und B des nämlichen Gebietes eine Strecke AB, welche keinen Punkt der Geraden a enthält.

3. Das Axiom der Stetigkeit, welchem ich folgende Fassung gebe:

Wenn $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eine unendliche Reihe von Punkten einer Geraden a sind und B ein weiterer Punkt auf a ist, von der Art, dass allgemein A_i zwischen A_h und B liegt, sobald der Index h kleiner als i ist, so giebt es einen Punkt C, welcher folgende Eigenschaft besitzt: sämmtliche Punkte der unendlichen Reihe $A_2, A_3, A_4, \ldots$ liegen zwischen A_1 und C und jeder andere Punkt C', für welchen dies ebenfalls zutrifft, liegt zwischen C und B.

Auf diese Axiome lässt sich in vollkommener Strenge die Theorie der harmonischen Punkte gründen, und wenn wir uns derselben in ähnlicher Weise bedienen, wie dies F. Lindemann*) thut, so gelangen wir zu folgendem Satze:

Jedem Punkte kann man 3 endliche reelle Zahlen x, y, z und jeder Ebene eine lineare Relation zwischen diesen 3 Zahlen x, y, z zuordnen, derart, dass alle Punkte, für welche die 3 Zahlen x, y, z die lineare Relation erfüllen, in der betreffenden Ebene liegen und dass umgekehrt allen in dieser Ebene gelegenen Punkten Zahlen x, y, z entsprechen, welche der linearen Relation genügen. Werden ferner x, y, z als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im gewöhnlichen Euklidischen Raume gedeutet, so entsprechen den Punkten des ursprünglichen Raumes Punkte im Inneren eines gewissen nirgends concaven Körpers des Euklidischen Raumes und umgekehrt entsprechen allen Punkten im Innern dieses nirgends concaven Körpers Punkte unseres ursprünglichen Raumes: *unser ursprünglicher Raum ist mithin auf das Innere eines nirgends concaven Körpers des Euklidischen Raumes abgebildet.*

Hierbei ist unter einem nirgends concaven Körper ein Körper von der Beschaffenheit verstanden, dass, wenn man 2 im Inneren des Körpers gelegene Punkte miteinander durch eine Gerade verbindet, der zwischen diesen beiden Punkten gelegene Theil der Geraden ganz

*) Vgl. Vorlesungen über Geometrie Bd. II. Theil 1, S. 433 u. f.

in das Innere des Körpers fällt. Ich erlaube mir, Sie darauf aufmerksam zu machen, dass diesen hier auftretenden nirgends concaven Körpern auch in den zahlentheoretischen Untersuchungen von H. Minkowski*) eine wichtige Rolle zukommt, und dass H. Minkowski für dieselben eine einfache analytische Definition gefunden hat.

Wenn umgekehrt im Euklidischen Raume ein beliebiger nirgends concaver Körper gegeben ist, so definirt derselbe eine bestimmte Geometrie, in welcher die genannten Axiome sämmtlich gültig sind: jedem Punkt im Inneren des nirgends concaven Körpers entspricht ein Punkt in jener Geometrie; jeder durch das Innere des Körpers gehenden Geraden und Ebene des Euklidischen Raumes entspricht eine Gerade bezüglich Ebene der allgemeinen Geometrie; den auf der Grenze oder ausserhalb des nirgends concaven Körpers gelegenen Punkten und den ganz ausserhalb des Körpers verlaufenden Geraden und Ebenen des Euklidischen Raumes entsprechen keine Elemente der allgemeinen Geometrie. Der obige Satz über die Abbildung der Punkte in der allgemeinen Geometrie auf das Innere des nirgends concaven Körpers im Euklidischen Raume drückt somit eine Eigenschaft der Elemente der allgemeinen Geometrie aus, welche inhaltlich mit den anfangs aufgestellten Axiomen vollkommen gleichbedeutend ist.

Wir definiren nun den Begriff der Länge einer Strecke AB in unserer allgemeinen Geometrie und bezeichnen zu dem Zwecke diejenigen beiden Punkte des Euklidischen Raumes, welche den Punkten A und B des ursprünglichen Raumes entsprechen, ebenfalls mit A und B; wir verlängern dann die Gerade AB im Euklidischen Raume über A und B hinaus, bis dieselbe die Begrenzung des nirgends concaven Körpers in den Punkten X bezüglich Y trifft und bezeichnen allgemein die Euklidische Entfernung zwischen irgend 2 Punkten P und Q des Euklidischen Raumes kurz mit $\overline{PQ}$; dann heisst der reelle Werth

$$\widehat{AB} = l\left\{\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} \cdot \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right\}$$

die *Länge* der Strecke AB in unserer allgemeinen Geometrie. Wegen

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} > 1, \quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} > 1$$

ist diese Länge stets eine positive Grösse.

Es lassen sich leicht die Eigenschaften des Begriffs der Länge aufzählen, welche mit Nothwendigkeit auf einen Ausdruck der angegebenen Art für $\widehat{AB}$ führen; doch unterlasse ich dies, damit ich durch diesen Brief nicht allzusehr Ihre Aufmerksamkeit ermüde.

---

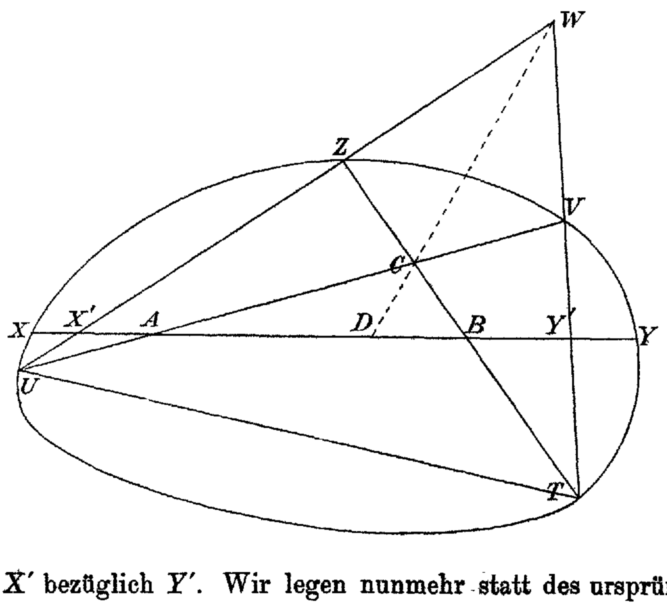
*) Vgl. Geometrie der Zahlen. Teubner 1895.

Die aufgestellte Formel für $\widehat{AB}$ lehrt zugleich, in welcher Weise diese Grösse von der Gestalt des nirgends concaven Körpers abhängt. Halten wir nämlich die Punkte A und B im Inneren des Körpers fest und ändern nur die Begrenzung des Körpers derart, dass der Grenzpunkt X sich nach A hinbewegt und Y sich dem Punkte B nähert, so ist klar, dass jeder der beiden Quotienten

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}}, \quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}$$

und folglich auch der Werth von $\widehat{AB}$ sich vergrössert.

Es sei jetzt im Inneren des nirgends concaven Körpers ein Dreieck ABC gegeben. Die Ebene α desselben schneidet aus dem Körper ein nirgends concaves Oval aus. Wir denken uns ferner jede der 3 Seiten AB, AC, BC des Dreieckes über beide Endpunkte hinaus verlängert, bis sie die Begrenzung des Ovals bezüglich in den Punkten X und Y, U und V, T und Z schneiden; dann construiren wir die geraden Verbindungslinien UZ und TV und verlängern dieselben bis zu ihrem Durchschnitt W; ihre Schnittpunkte mit der Geraden XY bezeichnen



wir mit X' bezüglich Y'. Wir legen nunmehr statt des ursprünglichen nirgends concaven Ovals in der Ebene α das Dreieck UWT zu Grunde und erkennen leicht, dass in der durch dieses Dreieck bestimmten ebenen Geometrie die Längen $\widehat{AC}$ und $\widehat{BC}$ die gleichen sind, wie in der ursprünglichen Geometrie, während die Länge der Seite AB durch die vorgenommene Aenderung vergrössert worden ist. Wir bezeichnen die neue Länge der Seite AB zum Unterschiede von der ursprünglichen Länge $\overset{\frown}{AB}$ mit $\overset{\frown\!\frown}{AB}$; dann ist $\overset{\frown\!\frown}{AB} > \overset{\frown}{AB}$.

Es gilt nun für die Längen der Seiten des Dreiecks ABC die einfache Beziehung

$$\overset{\frown\!\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC},$$

Zum Beweise verbinden wir W mit C und verlängern diese Gerade bis zum Durchschnitt D mit AB. Nach dem bekannten Satze vom Doppelverhältniss ist dann wegen der perspectiven Lage der beiden Punktreihen X', A, D, Y' und U, A, C, V

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'D}}\,\frac{\overline{X'D}}{\overline{X'A}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VC}}\,\frac{\overline{UC}}{\overline{UA}}$$

und wegen der perspectiven Lage der beiden Punktreihen Y', B, D, X und T, B, C, Z ist

$$\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'D}}\,\frac{\overline{Y'D}}{\overline{Y'B}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}}\,\frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}.$$

Die Multiplication beider Gleichungen ergiebt

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'B}}\,\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'A}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VC}}\,\frac{\overline{UC}}{\overline{UA}}\cdot\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}}\,\frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}$$

und diese neue Gleichung beweist meine Behauptung.

Aus obiger Untersuchung erkennen Sie, dass lediglich auf Grund der zu Anfang meines Briefes aufgezählten Axiome der allgemeine Satz gilt:

In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser oder gleich der dritten Seite.

Zugleich ist klar, dass der Fall der Gleichheit dann und nur dann vorkommt, wenn die Ebene α aus der Begrenzung des nirgends concaven Körpers zwei gerade Linienstücke UZ und TV ausschneidet. Die letztere Bedingung lässt sich auch ohne Zuhilfenahme des nirgends concaven Körpers ausdrücken. Sind nämlich irgend 2 in einer Ebene α gelegene und in einem Punkte C sich schneidende Geraden a und b der ursprünglichen Geometrie gegeben, so werden im Allgemeinen in jedem der 4 in α um C herum entstehenden ebenen Winkelräume solche gerade Linien vorhanden sein, welche keine der beiden Geraden a und b schneiden; sind jedoch insbesondere in 2 sich gegenüberliegenden ebenen Winkelräumen keine solchen geraden Linien vorhanden, so ist die fragliche Bedingung erfüllt, und *es giebt dann stets Dreiecke, für welche die Summe zweier Seiten gleich der dritten ist.* In dem betrachteten Falle ist also zwischen gewissen Punkten A und B ein aus 2 geradlinigen Stücken zusammengesetzter

Weg möglich, deren Gesammtlänge gleich der directen Entfernung der beiden Punkte A und B ist; es lässt sich ohne Schwierigkeit zeigen, dass *alle Wege zwischen den beiden Punkten A und B von derselben Eigenschaft sich aus den construirten Wegen zusammensetzen lassen und dass die übrigen Verbindungswege von grösserer Gesammtlänge sind.* Die nähere Untersuchung dieser Frage nach den kürzesten Wegen ist leicht ausführbar und bietet ein besonderes Interesse in dem Falle, dass für die Begrenzung des nirgends concaven Körpers ein Tetraeder zu Grunde gelegt wird.

Zum Schluss erlaube ich mir, darauf hinzuweisen, dass ich bei der vorstehenden Entwicklung stets den nirgends concaven Körper als ganz im Endlichen gelegen angenommen habe. Wenn jedoch in der durch die ursprünglichen Axiome definirten Geometrie eine Gerade und ein Punkt vorhanden ist von der Eigenschaft, dass durch diesen Punkt zu der Geraden nur eine einzige Parallele möglich ist, so ist jene Annahme nicht gerechtfertigt. Es wird leicht erkannt, welche Abänderungen meine Betrachtung dann zu erfahren hat.

Kleinteich bei Ostseebad Rauschen, den 14. August 1894.