Das erweiterte Formensystem.

Von

PAUL GORDAN in Erlangen.

Einleitung.

Das simultane System einer Anzahl quadratischer binärer Formen $f_1, f_2, \dots, f_n$ besteht aus den Formen:

$$f_i; (f_i, f_x), ((f_i, f_x), f_x)^2, (f_i, f_x)^2.$$

Dieselben entstehen aus den Typen:

$$(1) \quad f; (f, f); ((f, f), f)^2; (f, f)^2,$$

indem man den f Indices anfügt. Man kann das System (1) das *erweiterte* System einer einzigen quadratischen Form f nennen im Gegensatz zu dem *einfachen* vollen System, das nur die beiden Formen

$$f, (f, f)^2$$

enthält. Angeregt von Herrn Study habe ich nun für binäre Formen beliebigen Grades das erweiterte System aufgestellt, und dabei denselben Weg eingeschlagen, auf dem ich früher das einfache System gebildet habe. Mittelst solcher erweiterter Systeme ist man im Stande auch Systeme binärer Formen aufzustellen, welche Variablen enthalten, die linearen *von einander unabhängigen* Substitutionen unterworfen werden.

Nachdem ich im § 1 die wesentlichsten Punkte recapitulirt habe, welche bei der Aufstellung einfacher Systeme eine Rolle spielen, gehe ich im zweiten Paragraphen dazu über nach deren Analogie das erweiterte System zu bilden. In den folgenden Paragraphen stelle ich die erweiterten Systeme einer quadratischen, cubischen und biquadratischen Form sowie das simultan erweiterte System einer quadratischen und cubischen Form dar. Sodann leite ich aus jenen erweiterten Systemen die einfachen simultanen Systeme zweier cubischen und zweier biquadratischen Formen ab. Zum Schluss gebe ich das System einer Form, die in zwei Reihen Variabler x, y , welche von einander unabhängigen Substitutionen unterworfen werden, quadratisch ist.

§ 1.

Das einfache Formensystem.

Um das volle System von $f = a_x^* = b_x^* = \dots$ etc., welches ich im Folgenden das *einfache* nennen werde, zum Unterschiede von dem später zu behandelnden erweiterten, aufzustellen, habe ich folgendes Verfahren*) eingeschlagen. Zunächst bemerke ich, dass die Form f für sich allein ein System $A^{(0)}$ bildet, welches mod. (ab) , also auch mod. $(ab)^2$ vollständig ist. Hieraus folgerte ich, dass die Form $(f, f)^2$ für sich allein ein System $B^{(0)}$ bildet, welches mod. $(ab)^3$ also auch mod. $(ab)^4$ vollständig ist; durch Ueberschiebung beider Systeme erhielt ich ein drittes System $A^{(1)}$, das wie $B^{(0)}$ vollständig ist mod. $(ab)^4$. Nach diesem System $A^{(1)}$ bildete ich für die Form $(f, f)^4$ ein Bildsystem $B^{(1)}$, welches mod. $(ab)^6$ vollständig ist. Durch Ueberschiebung von $A^{(1)}$ mit $B^{(1)}$ ergibt sich ein System $A^{(2)}$, das wie $B^{(1)}$ vollständig ist mod. $(ab)^6$, etc. etc. Die Systeme $A^{(v)}$ können so lange als Modelle für die Herstellung der Bildsysteme benützt werden, als der Grad von $(f, f)^{2^v}$ grösser oder gleich dem von f ist, so lange also

$$2n - 4\varrho \geq n.$$

Andernfalls benützte ich als Modelle die vollständigen Systeme von Formen des Grades $2n - 4\varrho < n$.

Das letzte System $A^{(v)}$ ist dasjenige, für welches v die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl ist; und dieses System ist alsdann das einfache volle System von f . Die Richtigkeit des eingeschlagenen Verfahrens beruht hauptsächlich auf den Congruenzen**)

$$(1) \quad ((f, f)^{2^\mu}, f)^{2^{\mu+\varrho}} \equiv 0, \quad \text{mod. } (ab)^{2^{\mu+1}}$$

für

$$2n - 4\mu > n, \quad \text{oder} \quad 4\mu < n,$$

$$(2) \quad ((f, f)^{2^\mu}, f)^{2^{\mu+\varrho}} \equiv 0 \quad \text{mod. } (ab)^{2^{\mu+1}}$$

für

$$4\mu = n, \quad 2\mu + \varrho < n.$$

Aus diesen ergeben sich nämlich die weiteren Congruenzen:

$$(3) \quad ((f, f)^{2^\mu}, (f, f)^{2^\mu})^{2^{\mu+\varrho}} \equiv 0 \quad \text{mod. } (ab)^{2^{\mu+1}}, \quad 4\mu < n,$$

$$(4) \quad ((f, f)^{2^\mu}, (f, f)^{2^\mu})^{2^{\mu+\varrho}} \equiv 0 \quad \text{mod. } (ab)^{2^{\mu+1}}, \quad j$$

für

*) Vergl. meine Vorlesungen, Herausgabe von G. Kerschensteiner, B. G. Teubner.

**) Vergl. a. a. O. Bd. II, Seite 105.

$$4\mu = n, \quad j = ((f, f)^{2\mu}, f)^n,$$

welche die Mittel zum Beweise liefern, dass ein Bildsystem $B^{(n)}$ vollständig ist mod. $(ab)^{2n+4}$, resp. $(ab)^{2n+1}$, j .

§ 2.

Das erweiterte Formensystem.

Aus den Symbolen von Formen gleichen Grades

$$f_1 = a_x^n; \quad f_1 = b_x^n; \quad f_3 = c_x^n; \dots$$

lassen sich symbolische Producte P zusammensetzen, von denen alle simultanen Covarianten und Invarianten der f_i Aggregate sind. Aus jedem P entstehen durch Vertauschung der Symbole eine Anzahl anderer symbolischer Producte, welche ich „die Ableitungen von P “ nennen will. Jede derselben kann als Ausgangsform gewählt werden.

Jene Anzahl von Ausgangsformen

$$P_1, P_2, P_3, \dots P_\lambda,$$

durch deren Ableitungen alle simultanen Covarianten und Invarianten sich ganz und rational darstellen lassen, nenne ich *das erweiterte System* der einen Form f .

Die symbolischen Producte P lassen sich bekanntlich auch durch Ueberschiebungen

$$U = \left(((f_i, f_i)^{x_1}, f_i)^{x_2}, f_i)^{x_3} \dots \right)$$

darstellen. Auch diese Grössen U können als Originalformen statt der P angenommen werden. Aus einem U folgen die Ableitungen, wenn man darin für die

$$i_1 i_2 i_3 \dots$$

irgend welche der Indices der f einsetzt. Da es gleichgültig ist, welche dieser Ableitungen als Originalform gewählt wird, so darf man, ohne ein Missverständniss zu erregen, in U die Indices der f weglassen, es also so schreiben:

$$U = \left(((f, f)^{x_1}, f)^{x_2} \dots \right).$$

Man muss sich aber während der Rechnung bewusst sein, dass den f beliebige, gleiche oder verschiedene Indices zukommen.

Bei Aufstellung des erweiterten Systems von f werde ich im Wesentlichen ebenso verfahren, wie bei Aufstellung des einfachen Systems; nur werde ich die Annahme fallen lassen, dass während der Rechnung die Symbole resp. die Indices der f beliebig vertauscht werden dürfen. —

Die Form f bildet für sich ein mod. (ab) vollständiges System $A^{(0)}$; sein Bildsystem $B^{(0)}$ besteht aus (f, f) allein und ist mod. $(ab)^2$ vollständig. Durch Ueberschiebung von $A^{(0)}$ und $B^{(0)}$ entsteht ein System $A^{(1)}$, das gleichfalls mod. $(ab)^2$ vollständig ist.

Dem $A^{(1)}$ entspricht ein für $(f, f)^2$ aufgestelltes Bildsystem $B^{(1)}$, welches mod. $(ab)^3$ vollständig ist und über $A^{(1)}$ geschoben ein System $A^{(2)}$ erzeugt, das ebenfalls mod. $(ab)^3$ vollständig ist. So kann man eine Reihe von Systemen bilden

$$A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots A^{(\nu-1)},$$

welche nach den Moduln

$$(ab), (ab)^2, (ab)^3, \dots (ab)^\nu$$

vollständig sind, und eine zweite Reihe von Bildsystemen

$$B^{(0)}, B^{(1)}, B^{(2)}, \dots B^{(\mu-1)},$$

die nach den Moduln

$$(ab)^2, (ab)^3, (ab)^4, \dots (ab)^{\mu+1}$$

vollständig sind. Ist der Grad von $(f, f)^\mu$ kleiner als der von f , ist also

$$2\mu > n, \text{ oder } 2n - 2\mu < n,$$

so kann man nach dem Modell $A^{(\mu-1)}$ kein Bildsystem $B^{(\mu-1)}$ mehr bilden. Dann wähle man als Modell eine Form vom Grade $2n - 2\mu$.

Das letzte der so entstehenden Systeme $A^{(\mu-1)}$ ist das erweiterte System von f .

Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht hauptsächlich auf der Congruenz

$$(1) \quad ((f, f)^\mu, f)^{\mu+q} \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{2\mu+1}$$

wenn

$$\alpha) \quad 2n - 2\mu > n,$$

$$\beta) \quad 2n - 2\mu = n, \quad 2\mu + q < n.$$

Denn aus ihr folgen die weiteren Congruenzen:

$$(2) \quad ((f, f)^\mu, (f, f)^\mu)^{\mu+q} \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{\mu+1},$$

wenn

$$2n - 2\mu > n$$

und

$$(3) \quad ((f, f)^\mu, (f, f)^\mu)^{\mu+q} \equiv 0 \text{ mod } (ab)^{\mu+1}, j$$

wenn

$$2n - 2\mu = n, \quad j = ((f, f)^\mu, f)^*.$$

Die Congruenzen (2) und (3) aber lehren, dass $B^{(\mu-1)}$ nach dem Modul $(ab)^{\mu+1}$, resp. nach den Moduln $(ab)^{\mu+1}, j$ vollständig ist.

Um die Congruenz (1) nachzuweisen, unterscheide ich die beiden Fälle μ gerade und μ ungerade. Im ersten Falle gehe ich aus von dem Ausdrücke:

$$P_1 = \begin{cases} (ab)^{\mu-1}(ac)^{\mu+1} (bc)^{\varrho} a_x^{n-2\mu-2} b_x^{n-\mu-\varrho+1} c_x^{n-\mu-\varrho-1-\lambda} \\ + (ba)^{\mu-1}(bc)^{\mu+1} (ac)^{\varrho} a_x^{n-\varrho-\mu+1} b_x^{n-2\mu-2} c_x^{n-\mu-\varrho-1-\lambda}, \end{cases}$$

wobei $\varrho \geq \mu + \lambda - 1$ gewählt ist. Im zweiten Falle gehe ich aus von

$$P_2 = (ab)^{\mu}(ac)^{\mu+1}(bc)^{\varrho} a_x^{n-2\mu-2} b_x^{n-\mu-\varrho} c_x^{n-\varrho-\mu-2},$$

wobei $\mu + \lambda \geq \varrho$ und für $\lambda = 0$ auch $\varrho = 0$ gewählt ist.

Die beiden Formen P_1 und P_2 genügen, wie man sieht, den Congruenzen:

$$P_1 \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{\mu+1},$$

$$P_2 \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{\mu+1}, \text{ für } \lambda > 0.$$

Ich entwickle sie in Reihen, welche nach Ueberschiebungen fortschreiten. Die Glieder dieser Reihen sind:*)

$$\begin{aligned} & ((f_1, f_2)^{\mu}, f_3)^{\mu+\varrho+1}, ((f_1, f_2)^{\mu+1}, f_3)^{\mu+\varrho+2-1}, \\ & ((f_1, f_2)^{\mu+2}, f_3)^{\mu+\varrho+2-2}, \text{ etc. etc.} \end{aligned}$$

Das zweite und die folgenden Glieder verschwinden nach dem Modul $(ab)^{\mu+1}$; also hat man:

$$((f_1, f_2)^{\mu}, f_3)^{\mu+\varrho+1} \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{\mu+1}$$

wenn μ gerade, oder wenn μ ungerade aber $\varrho + \lambda > 0$ ist. Ist dagegen $\varrho + \lambda = 0$, so entwickle ich P_2 noch in eine zweite Reihe, mit den Gliedern:

$$((f_1, f_3)^{\mu}, f_2)^{\mu}, ((f_1, f_3)^{\mu+1}, f_2)^{\mu-1} \dots$$

Wiederum sind in ihr das zweite und alle folgenden Glieder

$$\equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{\mu+1},$$

und demnach erhält man durch Vergleichung beider Reihen im zweiten Falle die Congruenz:

$$((f_1, f_2)^{\mu}, f_3)^{\mu} + ((f_3, f_1)^{\mu}, f_2)^{\mu} \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{\mu+1}.$$

Ebenso ist aber:

$$\left. \begin{aligned} ((f_2, f_3)^{\mu}, f_1)^{\mu} + ((f_1, f_2)^{\mu}, f_3)^{\mu} &\equiv 0 \\ ((f_3, f_1)^{\mu}, f_2)^{\mu} + ((f_2, f_3)^{\mu}, f_1)^{\mu} &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \text{ mod. } (ab)^{\mu+1}.$$

Aus diesen drei Congruenzen folgt aber unmittelbar

$$((f_1, f_2)^{\mu}, f_3)^{\mu} \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{\mu+1}.$$

*) Vergl. a. a. O. S. 48.

§ 3.

Ueberschiebungen eines Systems über das erweiterte System einer quadratischen Form f .

Schon in der Einleitung habe ich die Formen des erweiterten Systemes einer quadratischen Form aufgeführt. Es besteht aus den Formen

$$(1) \quad f; (f, f); ((f, f), f)^2; (f, f)^2;$$

Denn das System $A^{(0)}$ besteht aus f allein, und das System $B^{(0)}$ aus (f, f) allein. Ersteres ist mod. (ab) , letzteres mod. $(ab)^2$ vollständig. Von den aus ihnen durch Ueberschiebung entstehenden Formen sind alle reducibel bis auf $((f, f), f)^2$, einmal, weil Functional-determinanten reducibel sind (vgl. a. a. O. S. 56), dann, weil das Quadrat der Functional-determinante (f, f) durch andere Formen ausdrückbar ist.*)

Das System $A^{(1)}$, welches mod. $(ab)^2$ vollständig, enthält daher nur die Formen

$$f, (f, f), ((f, f), f)^2.$$

Fügt man demselben den Modul $(ab)^2 = (f, f)^2$ hinzu, so bildet es das ganze erweiterte System von f .

Bei Ueberschiebung des Systemes (1) über eine andere Form φ braucht man nur die beiden Covarianten f und (f, f) zu berücksichtigen und zwar von (f, f) nur die erste Potenz, eben weil sie Functional-determinante ist.

Wir haben also φ nur über die Producte

$$f^x, f^x \cdot (f, f)$$

zu schieben und unterscheiden hiebei vier Fälle.

1) Ist φ vom Grade $n = 1$, so treten die Formen hinzu:

$$(2) \quad (f, \varphi); (f, \varphi^2); ((f, f), \varphi); ((f, f), \varphi^2)^2.$$

2) Ist φ vom Grade $n = 2$, so sind die neuen Formen

$$(3) \quad (f, \varphi); ((f, f), \varphi)^2; (f, \varphi)^2.$$

3) Ist n gerade und grösser als 2, so hat man als neue Formen

$$(4) \quad (f^x, \varphi)^{2x}; (f^x, \varphi)^{2x-1}; ((f, f), \varphi)^2; ((f, f) \cdot f^{\frac{n}{2}-1}, \varphi)^x, \quad x \leq \frac{n}{2}.$$

*) Auch für Formen höheren Grades besteht $A^{(0)}$ aus f , und $B^{(0)}$ aus (f, f) allein, und das aus $A^{(0)}$ und $B^{(0)}$ durch Ueberschiebung entstehende System $A^{(1)}$, welches mod. $(ab)^2$ vollständig ist, enthält die zwei Formen $f; (f, f)$, aus den gleichen Gründen, wie wir sie oben für eine quadratische Form angegeben haben.

4) Ist n ungerade und grösser als 2, so treten hinzu die Formen:

$$(5) \quad \begin{aligned} & (f^x, \varphi)^{2x}; (f^x, \varphi)^{2x-1}; (f^n, \varphi^2)^{2n}; (f^{n-1} \cdot (f, f), \varphi^2)^{2n}, \\ & ((f, f), \varphi)^2; \left(f^{\frac{n-1}{2}} \cdot (f, f), \varphi\right)^n; \left(f^{\frac{n+1}{2}}, \varphi\right)^n. \end{aligned}$$

Jede dieser Ueberschiebungen darf durch irgend eines ihrer Glieder ersetzt werden.

Im Falle dass $\varphi = (\psi, \chi)$ Functionaldeterminante zweier Formen ist, deren Grad grösser als 1, lassen sich einige der Formen reduciren. Unter den Formen des Systems (3) sind es die Formen (f, φ) und $((f, f), \varphi)^2$. Unter jenen des Systems (4) sind es die Formen

$$((f, f), \varphi)^2, (f^x, \varphi)^{2x-1},$$

wenn ψ und χ von ungeradem Grade, und

$$((f, f), \varphi)^2, (f^x, \varphi)^{2x-1}, \left(f^{\frac{n}{2}-1} \cdot (f, f), \varphi\right)^n,$$

wenn sie geraden Grades sind.

Unter den Formen (5) werden reducibel die Formen

$$\begin{aligned} & (f^x, \varphi)^{2x-1}; ((f, f), \varphi)^2, \left(f^{\frac{n}{2}-1} \cdot (f, f), \varphi^2\right)^{2n}, (f^n, \varphi^2)^{2n}, \\ & \left(f^{\frac{n-1}{2}} \cdot (f, f), \varphi\right)^n. \end{aligned}$$

Da die reduciblen Formen weggelassen werden können, so reducirt sich in diesem Falle das simultane System von f und $\varphi = (\psi, \chi)$

1) wenn φ vom Grade $n = 2$ auf:

$$(3a) \quad f, \varphi, (f, \varphi)^2 \text{ und das erweiterte System } S \text{ von } f,$$

2) wenn der Grad n von φ grösser als 2 und gerade, dagegen ψ und χ ungeraden Grades sind, auf

$$(4a) \quad f, \varphi, (f^x, \varphi)^{2x}, \left(f^{\frac{n}{2}-1} \cdot (f, f), \varphi\right)^n, S, \quad x \leq \frac{n}{2},$$

3) wenn n ungerade und grösser als 2, auf

$$(5a) \quad f, \varphi, (f^x, \varphi)^{2x}, \left(f^{\frac{n+1}{2}}, \varphi\right)^n, S, \quad x < \frac{n}{2}.$$

Soll man das System (1) nicht über eine einzelne Form sondern über ein ganzes System von Formen schieben:

$$A_1, A_2, A_3, \dots A_m,$$

so schiebe man zunächst nur über die einzelnen Formen A_i und füge sodann Ueberschiebungen hinzu:

$$(f^x, A_i \cdot A_m)^{2x}, (f^{x-1} \cdot (f, f), A_i \cdot A_m)^{2x}$$

wo man solche A_i auswählt, deren Grade μ, ν ungerade Zahlen von der Beschaffenheit sind, dass

$$\mu + \nu = 2\kappa$$

ist. —

§ 4.

Das erweiterte System einer cubischen Form.

Das System $A^{(1)}$, bestehend aus (vergl. § 3) den Formen:

$$(1) \quad f, (f, f),$$

ist mod. $(ab)^2$ vollständig. Da der Grad von $(f, f)^2 = \tau$ bereits kleiner als der von f , so kann das Bildsystem $B^{(1)}$ nicht mehr nach dem Modell $A^{(1)}$ gebildet werden; dasselbe ist aber in dem schon ermittelten erweiterten System einer quadratischen Form:

$$(2) \quad \tau, (\tau), ((\tau, \tau), \tau)^2, (\tau, \tau)^2$$

gegeben. Schiebt man beide Systeme übereinander, so entsteht ein mod. $(ab)^3$ vollständiges System. Fügt man diesem die Invariante

$$(3) \quad i = (ab)^3$$

hinzu, so hat man das volle erweiterte System von f . Man findet durch Ueberschiebung von f und (f, f) über τ und (τ, τ) dass folgende 9 Formen irreducibel sind:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (f, \tau), (f, \tau)^2, (f, \tau^2)^3, (f^2, \tau^3)^6, \\ (f, \tau \cdot (\tau, \tau))^3, (f^2, \tau^2 \cdot (\tau, \tau))^6, \\ ((f, f), \tau)^2, ((f, f), \tau^2)^4, ((f, f), \tau \cdot (\tau, \tau))^4. \end{array} \right.$$

Das erweiterte System einer cubischen Form besteht also aus den 16 Formen (1), (2), (3), (4). —

Schiebt man dieses System über das System einer quadratischen Form φ , so erhält man das simultane System S von f und φ . Dasselbe entsteht somit durch Ueberschiebung der drei Systeme (1), (2) und dem von φ , also auch durch Ueberschiebung des Systemes (1) mit dem simultanen System T von φ und τ . Die Formen des Systemes T erhält man aber durch den Aronhold'schen Process

$$\delta\tau = \varphi$$

aus dem von τ . Daher erhält man durch denselben Process auch das System S aus den Systemen (1), (2) und (3), (4) von f .

§ 5.

Das erweiterte System einer biquadratischen Form.

Die Ueberschiebungen von f über sich selbst bezeichne ich durch:

$$(1) \quad (f, f)^2 = \Delta, \quad (f, f)^3 = h, \quad (f, f)^4 = i;$$

die Invariante $(f, \Delta)^4$ durch j . Das System

$$(2) \quad f, (f, f)$$

ist mod. $(ab)^2$ vollständig. Ferner hat man nach § 2,

$$(f, \Delta)^2 \equiv 0; \quad (f, \Delta)^3 \equiv 0 \text{ mod. } h, i$$

und demnach auch

$$(\Delta, \Delta)^e \equiv 0 \text{ mod. } h, i, j,$$

so dass Δ allein ein mod. h, i, j vollständiges System bildet. Schiebt man es über das System (2), so treten nur die Formen $(f, \Delta), j$ hinzu. Daher ist

$$(3) \quad f, (f, f), \Delta, (f, \Delta), j$$

ein mod. h, i vollständiges System. Nun besteht das System der quadratischen Form h aus

$$(4) \quad h, (h, h), ((h, h), h)^2, (h, h)^2.$$

Schiebt man es über das System (5) und fügt dann die Invariante i hinzu, so entsteht das System von f . Es enthält an alten Formen:

$$(5) \quad \begin{cases} f, (f, f), \Delta, (f, \Delta), i, j, \\ h, (h, h), ((h, h), h)^2, (h, h)^2 \end{cases}$$

und an neuen Formen

$$(6) \quad \begin{cases} (f, h), (f, h)^2, (f, h^2)^3, (f, h^2)^4, \\ (\Delta, h), (\Delta, h)^2, (\Delta, h^2)^3, (\Delta, h^2)^4, \\ (f, h(h, h))^4, (\Delta, h(h, h))^4, \\ ((f, f), h)^3, ((f, f), h^2)^4, ((f, f), h^3)^6, \\ ((f, \Delta), h)^2, ((f, \Delta), h^2)^4, ((f, \Delta), h^3)^6, \end{cases}$$

im ganzen 26 Formen.

§ 6.

Das einfache simultane System zweier cubischen Formen.

Aus dem erweiterten System einer quadratischen Form f :

$$f, (f, f), (f, f)^2, ((f, f), f)^2$$

erhält man, wie ich schon Eingangs erwähnte, das einfache simultane System zweier quadratischer Formen f und φ , wenn man darin den Buchstaben f auf alle möglichen Arten durch f und φ ersetzt und die verschwindenden oder reduciblen Formen unterdrückt. So findet man direct die 6 Formen (v. a. a. O. pag. 143)

$$f, \varphi; (f, \varphi); (f, f)^2, (f, \varphi)^2, (\varphi, \varphi)^2.$$

In derselben Weise erhält man aus dem erweiterten System einer cubischen Form das einfache simultane System zweier solcher Formen

$$f = a_x^3 = b_x^3 = \text{etc.},$$

$$\varphi = \alpha_x^3 = \beta_x^3 = \text{etc.}$$

Von den zahlreichen durch die ein- oder mehrmalige Substitution von $\varphi, \sigma, \dots$ für $f, \tau, \dots$ aus den Typen sich ergebenden *Ableitungen* sind sehr viele reducibel. Einzelne der Typen liefern gar keine reduciblen Formen, wie im obigen Beispiel die Typen f , und $(f, f)^2$; andere führen theilweise auf reducible Formen oder reducible Aggregate von solchen Ableitungen, theilweise auf irreducible wie im obigen Beispiel der Typus (f, f) ; endlich hat man eine dritte Reihe von Typen, deren sämtliche Ableitungen verschwinden oder reducibel sind wie im obigen Beispiel der Typus $((f, f), f)^2$.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend theilen wir unsere 16 Formen in folgende Classen ein:

I^{te} Classe.

$$f, \tau.$$

Alle Ableitungen

$$f; \varphi; (f, f)^2 = \tau; (f, \varphi)^2 = \Theta; (\varphi, \varphi)^2 = \sigma$$

gehören dem simultanen System an.

II^{te} Classe.

$$(f, \tau); (f, \tau)^2.$$

Von den Ableitungen:

$$(f, \tau); (\varphi, \tau); (f, \Theta); (\varphi, \Theta); (f, \sigma); (\varphi, \sigma);$$

$$(f, \tau)^2; (\varphi, \tau)^2; (f, \Theta)^2; (\varphi, \Theta)^2; (f, \sigma)^2; (\varphi, \sigma)^2$$

verschwinden:

$$(f, \tau)^2 \text{ und } (\varphi, \sigma)^2$$

und die übrigen sind — abgesehen von den beiden Formen (f, τ) , (φ, σ) — durch 4 Relationen verbunden, die wir theils durch symbolische Rechnung, theils durch den Aronhold'schen Process herleiten.

Es ist:

$$(1) \quad (ab)(ba) a_x a_x \{a_x(ab) + a_x(ba)\} = (ab)(ba)(aa) a_x b_x a_x = 0,$$

$$(2) \quad (f, \tau)^2 = 0 \quad (\text{v. a. a. O. pag. 169 I})$$

somit durch Umformung des symbolischen Productes (1)

$$\begin{aligned} (\varphi, \tau) &= (f, \Theta) - \frac{1}{2} f(f, \varphi)^3, \\ (f, \sigma) &= (\varphi, \Theta) + \frac{1}{2} \varphi(f, \varphi)^3, \\ \left. \begin{aligned} (\varphi, \tau)^2 + 2(f, \Theta)^2 &= 0 \\ (f, \sigma)^2 + 2(\varphi, \Theta)^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{v. a. a. O. pag. 341, (1) u. (2)}). \end{aligned}$$

Von denjenigen Formen, welche f und τ zusammen enthalten, können somit entweder alle diejenigen als reducibel weggelassen werden, bei denen ein f und ein τ , sei es durch f, σ , sei es durch φ, τ , ersetzt wird, oder jene, bei denen τ durch Θ ersetzt ist.

3^{te} Classe.

$$(f, f); (f, f)^3; (\tau, \tau); ((\tau, \tau), \tau)^2.$$

Diejenigen Ableitungen verschwinden, in welchen f zweimal durch denselben Buchstaben f oder φ und τ zweimal durch den entsprechenden τ oder σ ersetzt werden; es bleiben übrig:

$$(f, \varphi); (f, \varphi)^3 = i; (\tau, \Theta); (\sigma, \Theta); (\tau, \sigma); ((\tau, \sigma), \Theta)^2$$

Bei den Formen, in denen

$$(f, f) \text{ oder } (\tau, \tau)$$

auftritt, braucht man also nur die Ableitungen beizubehalten, bei denen sie durch:

$$(f, \varphi) \text{ und } (\tau, \Theta); (\tau, \sigma); (\sigma, \Theta)$$

ersetzt sind.

4^{te} Classe.

$$(\tau, \tau)^2; (f, \tau^2)^3.$$

Von den Ableitungen:

$$\begin{aligned} &(\tau, \tau)^2; (\tau, \Theta)^2; (\tau, \sigma)^2; (\Theta, \Theta)^2; (\Theta, \sigma)^2; (\sigma, \sigma)^2; \\ &(f, \tau^2)^3; (f, \sigma\tau)^3; (f, \sigma^2)^3; (\varphi, \tau^2)^3; (\varphi, \sigma\tau)^3; (\varphi, \sigma^2)^3 \end{aligned}$$

verschwinden

$$(f, \tau^2)^3 \text{ und } (\varphi, \sigma^2)^3$$

und

$$(\Theta, \Theta)^2 = ((f, \varphi)^2, \Theta)^2$$

ist reducibel, da sich nach obiger Bemerkung f, Θ durch φ, τ ersetzen lässt, $(\tau, \tau)^2$ aber bekanntlich gleich der Discriminante R von f ist.

5^{te} Classe.

$$((f, f), \tau)^2; ((f, f), \tau^2)^4; ((f, f), \tau(\tau, \tau))^4.$$

Ihre Ableitungen sind gleichzeitig Ableitungen von:

$$((f, \varphi), \tau)^2; ((f, \varphi), \tau^2)^4; ((f, \varphi), \tau(\tau, \tau))^4;$$

von ihnen sind die Ableitungen zu untersuchen:

$$((f, \varphi), \tau)^2; ((f, \varphi), \sigma)^2;$$

$$((f, \varphi), \tau^2)^4; ((f, \varphi), \sigma\tau)^4; ((f, \varphi), \sigma^2)^4;$$

$$((f, \varphi), \tau(\sigma, \tau))^4; ((f, \varphi), \sigma(\sigma, \tau))^4.$$

Alle haben verschwindende Glieder, dürfen also weggelassen werden.

6^{te} Classe.

$$(f, \tau(\tau, \tau))^3; (f^2, \tau^2(\tau, \tau))^6; (f^2, \tau^3)^6.$$

Es brauchen nur die Ableitungen betrachtet zu werden, bei denen τ durch Θ ersetzt wird. Die beiden ersten Formen haben nur verschwindende Ableitungen und die der 3^{ten} wird mittelst der Formel reducibel:

$$\begin{vmatrix} (f, \varphi)^2, & (f, \Theta)^2, & f \\ (\varphi, \Theta)^2, & (\Theta, \Theta)^2, & \Theta \\ \varphi, & \Theta, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Das simultane System hat somit die 26 Formen (vgl. Gordan-Kerschensteiner pag. 333)

Vom Grade 4: (f, φ) ;

„ „ 3: f ; φ ; (f, τ) ; (φ, τ) ; (f, σ) ; (φ, σ) ;

„ „ 2: τ ; Θ ; σ ; (τ, Θ) ; (τ, σ) ; (Θ, σ) ;

„ „ 1: $(f, \sigma)^2$; $(\varphi, \tau)^2$; $(f, \sigma^2)^3$; $(\varphi, \tau^2)^3$; $(f, \sigma\tau)^3$; $(\varphi, \sigma\tau)^3$;

„ „ 0: i ; $(\tau, \tau)^2$; $(\tau, \rho)^2$; $(\tau, \sigma)^2$; $(\rho, \sigma)^2$; $(\sigma, \sigma)^2$; $((\sigma, \tau), \Theta)^2$.

Behufs Vergleichung mit der citirten Stelle setze man $\tau = \Delta$, $\sigma = \nabla$, $(f, \tau) = Q$, $(\varphi, \sigma) = K$.

§ 7.

Das einfache simultane System zweier biquadratischer Formen.

In derselben Weise, wie wir oben das simultane System zweier cubischen Formen entwickelt haben, lässt sich auch das zweier biquadratischen Formen aus dem erweiterten System einer der Formen herleiten. Wir gruppieren zu dem Zwecke wie vorhin die Typen des erweiterten Systems in Classen.

1^{te} Classe:

$$f, \Delta, i, j.$$

Die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f, \varphi; \quad \Delta &= (f, f)^2; \quad p = (f, \varphi)^2; \quad \nabla = (\varphi, \varphi)^2; \\ i &= (f, f)^4; \quad i_1 = (f, \varphi)^4; \quad i_2 = (\varphi, \varphi)^4; \\ j &= (f, \Delta)^4; \quad j_1 = (f, p)^4; \quad j_2 = (\varphi, p)^4; \quad j_3 = (\varphi, \nabla)^4; \\ &= (\varphi, \Delta)^4; \quad = (f, \nabla)^4; \end{aligned}$$

sind durchwegs irreducibel und bilden sonach Formen des Systemes.

2^{te} Classe.

$$\begin{aligned} (f, f), \quad (f, f)^3 = h, \quad (h, h), \quad ((h, h), h)^3, \\ (f, h \cdot (h, h))^4, \quad (\Delta, h \cdot (h, h))^4. \end{aligned}$$

Von den Ableitungen verschwinden alle ausser

$$(f, \varphi) \quad \text{und} \quad (f, \varphi)^3 = g.$$

Desgleichen sind von den Typen des erweiterten Systemes, in denen (f, f) oder $(f, f)^3 = h$ vorkommt, nur jene Ableitungen zu untersuchen, in denen (f, f) durch (f, φ) und $(f, f)^3$ durch $(f, \varphi)^3$ ersetzt ist.

3^{te} Classe.

$$(f, h), (f, h)^2; \quad (f, h^2)^3; \quad (\Delta, h)^2, (h, h)^2.$$

Die Ableitungen

$$\begin{aligned} (f, g); \quad (f, g)^2; \quad (f, g^2)^3; \quad (\Delta, g)^2; \quad (g, g)^2, \\ (\varphi, g); \quad (\varphi, g)^2; \quad (\varphi, g^2)^3; \quad (p, g)^2; \quad (\nabla, g)^2 \end{aligned}$$

sind nicht reducibel und bilden daher Formen des Systems.

4^{te} Classe.

$$(f, \Delta).$$

Zwischen den Ableitungen:

$$(f, \Delta); \quad (f, p); \quad (f, \nabla); \quad (\varphi, \Delta); \quad (\varphi, p); \quad (\varphi, \nabla)$$

bestehen zwei Relationen, die wir aus der Formel

$$(ab) (ba)^2 a_x^3 b_x a_x^2 = (ab)^2 (ab) a_x^2 b_x a_x^3$$

gewinnen; sie sind:

$$(1) \quad \begin{aligned} (\varphi, \Delta) &= (f, p) - f \cdot g, \\ (f, \nabla) &= (\varphi, p) + \varphi \cdot g. \end{aligned}$$

Man kann daher zwei der 6 Ableitungen, etwa (f, p) und (φ, p) auslassen.

5^{te} Classe.

$$((f, f), h)^2; (\Delta, h).$$

Die Ableitungen dieser Typen sind zugleich Ableitungen von

$$((f \cdot \varphi), g)^2; (\Delta, g)$$

und lauten:

$$((f, \varphi), (f, \varphi)^3)^2; (\Delta, g); (p, g); (\nabla, g).$$

Die beiden ersten sind mit ihren Gliedern:

$$(a\alpha) (b\beta)^3 (ab) (\alpha\beta) a_x^2 a_x^2; (\Delta\alpha) (a\alpha)^3 a_x \Delta_x^3$$

durch die Relation verbunden:

$$\begin{aligned} (a\alpha) (b\beta)^3 (ab) (\alpha\beta) a_x^2 a_x^2 &= ((f, \varphi), g)^2 - \frac{1}{5} g^2 + \frac{1}{2} i_1 p \\ (\Delta, g) &= (\Delta\alpha) (a\alpha)^3 \Delta_x^3 a_x - \frac{1}{2} i_1 \Delta. \end{aligned}$$

Diese Glieder erhalten nun mit Hülfe der Formeln:

$$\begin{aligned} (ab) a_x^3 b_y^3 &= -\frac{3}{2} \Delta_{y^2} (yx) - \frac{i}{4} (yx)^3, \\ (ab) a_x^2 a_{x_2} b_y^3 &= -\Delta_{y^2} (yx) + \frac{1}{2} \Delta_{y^2} (zy) + \frac{i}{4} (yx)^2 (zy), \\ a_y^4 \Delta_x^4 - a_x^4 \Delta_y^4 &= 4(f, \Delta)_{y^2}, \\ (\Delta\alpha) a_y^3 \Delta_x^3 &= -(f, \Delta)_{y^2} - \frac{i}{4} f_{y^2} (yx) - \frac{j}{4} (yx)^3, \\ (yx) (\Delta\alpha) a_y^3 \Delta_x^3 &= \frac{1}{4} f \cdot \Delta_{y^2} - \frac{1}{4} \Delta \cdot f_{y^2} - \frac{i}{4} f_{y^2} (yx)^2 - \frac{j}{4} (yx)^4 \end{aligned}$$

die Werthe:

$$\begin{aligned} &(a\alpha) (b\beta)^3 (ab) (\alpha\beta) a_x^2 a_x^2 = \\ &= (\alpha\beta) a_x^2 \left\{ (\Delta\beta)^2 (\alpha\Delta) \Delta_x \beta_x + \frac{1}{2} (\Delta\beta)^2 (\alpha\beta) \Delta_x^2 + \frac{i}{4} (\alpha\beta) \beta_x^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\alpha\beta)^2 \Delta_x^2 \left\{ (\beta\Delta)^2 a_x^2 - (\alpha\Delta) (\beta\Delta) a_x \beta_x \right\} + \frac{i}{4} \nabla \\ &= \frac{1}{4} \{ i_2 \Delta + i \nabla \}. \end{aligned}$$

Daher ist:

$$(2) \quad ((f, \varphi), g)^2 = \frac{1}{5} g^2 - \frac{1}{2} i_1 p + \frac{1}{4} i_2 \Delta + \frac{1}{4} i \Delta,$$

$$(3) \quad (\Delta, g) = \frac{1}{4} j_1 f - \frac{3}{4} i_1 \Delta - \frac{i}{4} p - \frac{j}{4} \varphi.$$

Die Werthe von (p, g) und (∇, g) ergeben sich hieraus durch den Aronhold'schen Process

$$df = \varphi$$

und der Werth von $((f, \Delta), g)^2$ aus (2) durch den Process

$$d\varphi = \Delta.$$

6^{te} Classe.

$$((f, f)^2, h^2)^4; \quad ((f, f), h^3)^6; \quad ((f, \Delta), h)^2, \\ ((f, \Delta), h^2)^4; \quad ((f, \Delta), h^3)^6; \quad (\Delta, h^2)^3.$$

Die Ableitungen aus diesen Formen sind gleichzeitig Ableitungen von:

$$((f, \varphi), g^2)^4; \quad ((f, \varphi), g^3)^6; \quad ((f, \Delta), g)^2, \\ ((f, \Delta), g^2)^4; \quad ((f, \Delta), g^3)^6; \quad (\Delta, g^2)^3.$$

Von diesen letzteren sind aber die beiden ersten Ueberschiebungen der Form $((f, \varphi), g)^2$ mit g . Die erste Ableitung der dritten Form ist bereits berechnet, während sich die übrigen Ableitungen dieser Form durch den Aronhold'schen Process bestimmen lassen. Die drei letzten Formen sind Ueberschiebungen der dritten Form mit (Δ, g) . Es liefert sonach diese Classe keine Form des simultanen Systems.

7^{te} Classe.

$$(f, h^2)^4; \quad (\Delta, h^2)^4.$$

Auch diese Gruppe liefert keine weitere Form mehr. Denn von ihren Ableitungen

$$(f, g^2)^4; \quad (\Delta, g^2)^4; \quad (\varphi, g^2)^4; \quad (p, g^2)^4; \quad (\nabla, g^2)^4$$

hat die erste den Werth

$$(f, g^2)^4 = (ab)(a\alpha)(b\alpha)^3(ag)^2 = (ab)^2(a\alpha)(b\alpha)^2(ag)(g\alpha) \\ = (\Delta\alpha)^3(\Delta g)(g\alpha) = ((\Delta, g), \varphi)^4 \\ = -\frac{1}{2}\{i_1 j_1 + \frac{1}{2} i j_2 + \frac{1}{2} j i_2\}.$$

Die übrigen lassen sich aus ihr durch den Aronhold'schen Process ableiten.

Es besteht daher das simultane System von f und φ aus den 28 Formen:

Vom Grade 6:

$$(f, \varphi); (f, \Delta); (f, \nabla); (\varphi, \Delta); (\varphi, \nabla).$$

Vom Grade 4:

$$f, \varphi, (f, g); (\varphi, g); \Delta; p; \nabla.$$

Vom Grade 2:

$$g; (f, g)^2; (\varphi, g)^2; (\Delta, g)^2; (p, g)^2; (\nabla, g)^2; (f, g^2)^2; (\varphi, g^2)^2.$$

Vom Grade 0:

$$(g, g)^2, i, i_1, i_2, j, j_1, j_2, j_3.$$

§ 8.

System von Formen mit mehreren Reihen Veränderlicher.

Eine Form mit 2 Reihen Variabeln x, y kann symbolisch dargestellt werden durch:

$$(1) \quad F = r_x^a s_y^n = r_{1,x}^m s_{1,y}^n = r_{2,x}^m s_{2,y}^m \dots$$

Sind nun die Variabeln nicht cogredient, sondern beliebigen von einander unabhängigen Substitutionen zu unterwerfen, so werden sich die Invarianten (und Covarianten) von F durch symbolische Producte P ausdrücken lassen, welche aus Factoren:

$$(2) \quad r_x; r_{1,x} \dots (r r_1); (r r_2) \dots,$$

$$(3) \quad s_y; s_{1,y} \dots (s s_1); (s s_2) \dots$$

zusammengesetzt sind. Dieselben zerfallen somit in Factoren Q, R , deren erster Q nur die Symbole r enthält, also aus Factoren (2) besteht, während R nur die Factoren (3) enthält. Es sei nun:

$$A_1, A_2, \dots A_i$$

das erweiterte System einer Form

$$f = a_x^*,$$

d. h. alle Covarianten und Invarianten von f seien ganze Functionen von Formen dieses Typus; ferner seien

$$B_1, B_2, B_3 \dots B_i$$

diejenigen symbolischen Producte, welche man aus den A erhält, wenn man die Symbole a durch r ersetzt. Es wird dann Q sich als ganze Function von Formen des Typus B darstellen lassen:

$$Q = c_1 Q_1 + c_2 Q_2 \dots + c_\mu Q_\mu,$$

wo die Q_i Producte der B bedeuten. Trägt man diesen Werth in P ein, so erhält man P als Aggregat von Formen:

$$P_i = Q_i R,$$

in denen Q_i ein Product der B bedeutet. Aus den B lassen sich Covarianten von F bilden; ist nämlich B aus den Symbolen

$$r; r_1, r_2 \dots r_\mu$$

zusammengesetzt und sind

$$y_1, y_2, \dots y_\mu$$

den y cogredient, so sind sowohl die Form

$$B s_y^m s_{1,y_1}^m \dots s_{\mu,y_\mu}^m,$$

als auch ihre Elementarcovarianten C Covarianten von F . Die P_i sind simultane Covarianten und Invarianten von den C in Bezug auf die Variablen y .

Aus dieser Betrachtung ergibt sich die Endlichkeit der Systeme von Formen, in denen mehrere Reihen nicht cogredienter Variablen auftreten.

Als Beispiel wollen wir das System S der Form:

$$F = r_x^2 s_y^2$$

aufstellen.

Entsprechend dem System:

$$f; (f, f); ((f, f), f)^2; (f, f)^2$$

hat man die B :

$$B_1 = r_x^2; B_2 = (rr_1) r_{x,x}; B_3 = (rr_1)(rr_2)(r_1 r_2); B_4 = (rr)^2$$

und die C als Elementarcovarianten der Formen:

$$r_x^2 s_y^2; (rr_1) r_x r_{1,x} s_y^2 s_{1,y_1}^2; (rr_1)(rr_2)(r_1 r_2) s_y^2 s_{1,y_1}^2 s_{2,y_2}^2; (rr_1)^2 s_y^2 s_{1,y_1}^2.$$

Die nicht verschwindenden oder reduciblen Elementarcovarianten sind:

$$C_1 = r_x^2 s_y^2; C_2 = (rr_1)(ss_1) r_x r_{1,x} s_y s_{1,y};$$

$$(4) C_3 = (rr_1)(rr_2)(r_1 r_2)(ss_1)(ss_2)(s_1 s_2); C_4 = (rr_1)^2 s_y^2 s_{1,y}^2; C_5 = (rr_1)^2 (s s_1)^2.$$

Das System S ist das simultane System der C in Bezug auf die y . Von den C sind C_3 und C_5 Invarianten, C_1 und C_2 quadratische Formen, C_4 eine biquadratische Form.

Um das simultane System S zu erhalten wird man zunächst die Systeme der C_1, C_2, C_4 einzeln aufstellen, sodann die Systeme von C_1 und C_2 übereinander und das so entstehende System T über das System von C_4 schieben. Schliesslich hat man noch die Invarianten $(C_1, C_1)^2, (C_2, C_2)^2$ und jene von C_4 hinzuzufügen.

Nun besteht das System von C_1 aus

$$(5) C_1 \quad (C_1, C_1)^2,$$

das von C_2 aus

$$(6) C_2 \quad (C_2, C_2)^2,$$

das von C_4 aus

$$(7) C_4, (C_4, C_4)^2 = \Delta, (C_4, \Delta) = i, (C_4, C_4)^4 = i, (C_4, \Delta)^4 = j.$$

Hierin ist Δ reducibel, da in ihr das Quadrat der Functionaldeterminante $(rr_1)r_x r_{1x}$ durch andere Formen ausdrückbar ist. Aus demselben Grunde ist auch das Quadrat von C_2 reducibel.

Das System T besteht aus den Formen:

$$(8) \quad C_1; C_2; (C_1, C_2) = R; (C_1, C_1)^2 = i_1; (C_1, C_2)^2 = i_2$$

und somit das System S aus den Formen: (7) und (8), den Invarianten

$$(9) \quad C_3, C_5$$

und den Ueberschiebungen:

$$\begin{aligned} & (C_4, C_1); (C_4, C_1)^2; (C_4, C_1^2)^3; (C_4, C_1^2)^4, \\ & (C_4, C_2); (C_4, C_2)^2; (C_4, R)^2; (C_4, C_1 C_2)^3; (C_4, C_1 C_2)^4; (C_4, C_1 R)^4, \\ & (\Delta, C_1); (\Delta, C_1)^2; (\Delta, C_1^2)^3; (\Delta, C_1^2)^4, \\ & (\Delta, C_2); (\Delta, C_2)^2; (\Delta, R)^2; (\Delta, C_1 C_2)^3; (\Delta, C_1 C_2)^4; (\Delta, C_1 R)^4, \\ & (t, C_1)^2; (t, C_1^2)^4; (t, C_2^3)^6; (t, C_2)^2; (t, C_1 C_2)^4; (t, C_1^2 C_2)^6; \end{aligned}$$

im Ganzen aus 38 Formen.