9. *Aequipotential- und Magnetkraftlinien;* *von E. v. Lommel.*

(Aus den Sitzungsberichten der math.-phys. Klasse der k. bayer. Akad.
d. Wissensch., mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Ein homogener leitender Körper werde von einem electrischen Strome durchflossen, der in zwei Punkten seiner Oberfläche ein- und austritt. Jede Stromlinie oder „Stromröhre“ ist, wie jeder lineare Leiter, von geschlossenen Magnetkraftlinien umringt, welche die Stromröhre, auf deren Axe ihre Ebenen überall senkrecht stehen, alle in demselben Sinne gleichsam umfließen. Auf einer Fläche gleichen Potentials, welche sämtliche Stromröhren rechtwinkelig schneidet, grenzen die elementaren Magnetströmchen benachbarter Stromröhren unmittelbar aneinander und heben sich durch die ganze Aequipotentialfläche gegenseitig ganz oder theilweise auf, ausgenommen da, wo die Aequipotentialfläche die Oberfläche des leitenden Körpers längs einer *Aequipotentiallinie* rechtwinkelig durchschneidet. Hier fließen sie zu einem einzigen Strome magnetischer Kraft zusammen, welcher den Rand der Aequipotentialfläche in demselben Sinne wie jene elementaren Magnetströmchen umkreist. Jede Aequipotentiallinie ist daher eine auf der Oberfläche des Leiters verlaufende in sich zurückkehrende *Magnetkraftlinie*. Diese Magnetkraftlinien, also auch die Aequipotentiallinien, lassen sich, wie ich bereits gezeigt habe ¹⁾, auf einer durchströmten ebenen Platte durch aufgestreute Eisenfeile sichtbar machen.

Wir nennen *Stromfläche* jede Fläche, welche durch eine stetige Aufeinanderfolge von Stromlinien gebildet wird. Durch jede Stromlinie lassen sich alsdann unendlich viele Stromflächen legen, welche alle auf den Aequipotentialflächen senkrecht stehen und sämtlich durch die beiden Electrodenpunkte hindurchgehen. Aus dieser unendlichmal unendlichen Fülle von Stromflächen kann man nun durch Festsetzung gewisser

1) Lommel, Sitzungsber. **22**, p. 371. 1892; Wied. Ann. **38**, p. 462. 1893.

Merkmale einzelne Schaaren herausheben, welche für die weitere Betrachtung besonders bequem sind, wie z. B. diejenige Schaar, welche die Körperoberfläche, die ja stets eine Stromfläche ist, in sich enthält und sich beiderseits an sie anschliesst. Eine zweite Schaar bilden die Stromflächen, welche sich in der geraden Verbindungslinie der Electroden (die eine Stromlinie ist, und auch dann als solche aufzufassen ist, wenn sie ganz oder theilweise ausserhalb der leitenden Körpermasse verläuft) schneiden. Je eine Fläche der einen und eine Fläche der anderen Schaar schneiden sich in einer Stromlinie, und die beiden Schaaren von Flächen zerlegen den Raum in Stromröhren.

Wie einerseits die Körperoberfläche stets eine Stromfläche ist, so kann andererseits jede Stromfläche als Begrenzungsfläche des Leiters gewählt werden. Man kann daher durch Schnitte, die längs Stromflächen geführt werden, Stücke des Körpers abtragen, oder ihm von Stromflächen begrenzte Stücke anfügen, ohne dass in dem übrigbleibenden oder in den neu hinzugekommenen Körpertheilen die Gestalt und Lage der Aequipotentialflächen und der Stromlinien eine Aenderung erfährt. Kennt man daher für irgend einen Körper diese Flächen und Linien, so kennt man sie auch für eine Unzahl von Körperformen, die sich auf die angegebene Weise aus dem gegebenen Körper bilden lassen.

Betrachten wir z. B. den unendlichen Raum als mit leitender Masse erfüllt, so ist unmittelbar ersichtlich, dass in diesem allseitig unbegrenzten Leiter die Aequipotentialflächen Rotationsflächen um die Verbindungslinie der Electroden als Axe, und sämtliche Meridianebenen Stromflächen sind. In jeder Meridianebene bieten die Aequipotential- und Stromlinien ein ähnliches Bild dar, wie die beiden Systeme zu einander rechtwinkliger Kreise in Fig. 1 p. 542. Nur sind die Aequipotentiallinien in diesem Falle nicht Kreise, sondern Curven, welche der Gleichung $1/r - 1/r' = \text{Const.}$ genügen (wenn r und r' die Entfernungen eines Punktes der Ebene von den Electrodenpunkten A und B bezeichnen), und die Stromlinien sind die dazu senkrechten Trajectorien. Lässt man beide Systeme von Curven um die Axe AB rotiren, so erzeugen die ersteren die Aequipotentialflächen, die letzteren eine Schaar von Stromflächen,

welche mit den Meridianebenen zusammen den Raum in Stromröhren zerschneiden. Jede dieser Stromflächen kann als Oberfläche eines Körpers angenommen werden, den sie aus der leitenden Masse herauschneidet und gegen den übrigen nun als nichtleitend anzunehmenden Raum abgrenzt. Aus jedem so entstandenen Körper kann durch zwei Meridianebenen eine Schnitze herausgeschnitten oder es kann der Körper durch eine Meridianebene halbiert werden. Man kann ferner innerhalb eines solchen Körpers durch eine zweite jener Stromflächen Hohlräume bilden und so z. B. schalenförmige Körper erhalten, überhaupt die mannigfaltigsten Körperformen, soweit sich deren Oberflächen mittels der von den gegebenen Aequipotentialflächen bedingten Stromlinien bilden lassen.

Will man dagegen die Strömung in einem gegebenen leitenden Körper kennen lernen, so hat man zunächst die zugehörigen Aequipotentialflächen zu finden, welche die Oberfläche des Körpers, die ja stets eine Stromfläche ist, rechtwinkelig schneiden. Denkt man sich den Körper um die Verbindungslinie AB der beiden Electroden gedreht, so wird, da seine Lage in Beziehung zu den Electroden die nämliche bleibt, die Strömung nicht geändert. Bei dieser Drehung beschreibt jeder Punkt einer Aequipotentiallinie, indem er auf der zugehörigen Aequipotentialfläche bleibt, einen Parallelkreis um die Drehungsaxe AB . Die Aequipotentialflächen sind also auch in diesem Falle Rotationsflächen um diese Axe.

Betrachten wir z. B. eine Kugel mit beliebig auf ihrer Oberfläche gelegenen Electrodenpunkten A und B . Man weiss, dass jeder Kreis, welcher durch A und B geht, von allen Kreisen orthogonal geschnitten wird, deren Mittelpunkte in die Verlängerung der Geraden AB fallen, und welche diese Gerade in Punkten schneiden, die zu den Punkten A und B harmonisch liegen ($AE:AF = BE:BF$, Fig. 2; in Fig. 1 stellen bekanntlich jene Kreise, welche durch die Electrodenpunkte A und B gehen, die Stromlinien, diese Kreise die Aequipotentiallinien für eine unbegrenzte ebene Platte dar). Dreht sich nun das erstere System von Kreisen um die in der Mitte von AB errichtete Senkrechte CD , so erzeugt jeder Kreis eine durch A und B gehende Kugelfläche, welche von allen Kugeln, die durch Rotation des zweiten Systems von

$ONQ = \frac{1}{2}(180^\circ - \varphi) - \frac{1}{2}\varphi = 90^\circ - \varphi$, folglich der Winkel $MQP = \varphi$. Es ist demnach Winkel $MQO = W$. $OQP + W$, $MQP = 90^\circ - \varphi + \varphi = 90^\circ$, d. h. jeder von einem so bestimmten Punkt M der Geraden AB mit dem Radius MQ beschriebene Kreis schneidet den Kreis O in Q (und P) rechtwinkelig, nach welchem Punkte Q des Kreisumfanges von T aus die Secante TQ auch gezogen wurde. Umgekehrt müssen alle durch die Schnittpunkte P und Q des Kreises O mit jedem der zu ihm orthogonalen Kreise, deren Mittelpunkte auf der verlängerten AB liegen, gezogenen Secanten durch den Punkt T gehen. Es müssen demnach auch im Raume alle Ebenen, welche durch diese Secanten senkrecht zur Ebene der Zeichnung gelegt werden und die Kreise enthalten, längs welchen die Kugel O von der Schaar der zu ihr orthogonalen Kugeln M geschnitten wird, durch die in T auf der Ebene der Figur errichtete Senkrechte gehen, in welcher sich die in A und B an die Kugel O gelegten Tangentialebenen begegnen. Auf dasselbe System von Aequipotentiallinien führt natürlich auch die analytische Behandlung der Aufgabe.¹⁾ — Die Stromlinien auf unserer Kugelfläche sind diejenigen Kreise, in welche eine durch die Verbindungsgrade der Electroden gehende Schaar von Ebenen die Kugelfläche schneidet. Da diese Ebenen Stromflächen sind, so kennt man auch die Strömung für jedes durch eine solche Ebene von der Kugel abgetrennte Segment, sowie für jede durch zwei solche Ebenen aus ihr herausgeschnittene Kugelschnitte. Nimmt man zur Begrenzung noch die kugelförmigen Stromflächen hinzu, die sich alle in dem Kreise schneiden, der in der durch AB senkrecht zu CD gelegten Ebene, die ebenfalls eine Stromfläche ist, um C mit dem halben Electrodenabstand als Radius beschrieben ist, so lassen sich schalenförmige Körper bilden, die innen und aussen durch Kugelflächen begrenzt sind und für welche ebenfalls der Verlauf ihrer Strom- und Aequipotentiallinien bekannt ist.

Aehnliche Ueberlegungen zeigen, dass bei einem geraden Kreiscylinder mit Electroden an den Endpunkten seiner Axe

1) Boltzmann, Sitzungsber. d. Wiener Akad., math.-naturw. Klasse. 52. p. 214. 1865.

auf der Mantelfläche die Erzeugenden des Cylinders Stromlinien, die Parallelkreise Aequipotentiallinien sind, während auf den kreisförmigen Stirnflächen die Aequipotentiallinien von den Electrodenpunkten aus beschriebene concentrische Kreise, die Stromlinien Radien derselben sind. Von dem Verlaufe der

Fig. 3.

Aequipotentialflächen im Innern des Cylinders erhält man, wenn auch nur empirisch, eine Vorstellung durch Aufstreuen von Eisenfeilen auf die Ebene eines durch die beiden

Electroden gelegten Schnittes. Die Feilspäne ordnen sich auf dieser Ebene in Linien von der in Fig. 3 angedeuteten Gestalt. Diese Linien stehen überall senkrecht zum Umfang des Rechteckes, nur die durch die Ecken gehenden machen hiervon eine, jedoch nur scheinbare, Ausnahme. Bei physischen Platten oder Körpern gibt es nämlich keine mathematisch scharfen Ecken und Kanten, sondern dieselben sind in Wirklichkeit mehr oder weniger abgerundet, und die Aequipotentiallinien stehen zu diesen Abrundungen senkrecht.