Schwierigkeiten mehr zu einer genauen Bestimmung von k zu gelangen, weil die oben beschriebene Methode mit noch einigen nicht principiellen Veränderungen, die ich noch vornehmen will, eine zuverlässige ist. Diese Bestimmung hoffe ich sobald wie möglich vorzunehmen.

VII. Ueber eine Intensitätsmessung des Schalles; von August Heller,

Prof. d. Physik an d. K. Ober-Realschule zu Ofen.

Im 134. Bande dieser Annalen befindet sich eine Abhandlung von Hrn. Prof. Kirchhoff, welche von dem Einfluss der Reibung und Wärmeleitung der Luft auf die Schallgeschwindigkeit in einer Luftmasse, die durch eine Röhre von kreisförmigem Querschnitt begränzt wird, handelt. Hr. Kirchhoff erhält dort für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallwellen in einer Röhre eine Formel, welche hinsichtlich ihrer Form mit der — blofs unter Berücksichtigung der Reibung — von Helmholtz [Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg, Bd. III, S. 16] abgeleiteten vollkommen übereinstimmt, in welcher aber jene Reibungsconstante der Luft eine andere Bedeutung hat. Kirchhoff's Formel ist nämlich die folgende:

$$v = v_0 \left(\frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi n}} \right)$$

wo v_0 die Geschwindigkeit des Schalles in freier Luft, v dieselbe in der Röhre, r den Radius der letztern, n die Schwingungszahl des als einfach vorausgesetzten Tones und γ eben jene Constante bedeutet, welche sowohl die Reibung als Wärmeleitung der Luft in sich enthält.

Ueber den Werth dieser Gröfse γ wurde bisher nichts veröffentlicht, so dafs wir denselben auch nicht einmal annäherungsweise kennen.

Hr. Kirchhoff hat mir die Ausführung einer Versuchsmethode vorgeschlagen, mittelst deren sich die Intensität von Schallschwingungen direkt messen läßt, woraus sich dann der Werth jener GröÙe berechnet, überdies hatte er die Güte für diese Versuche die nöthigen Formeln selbst abzuleiten, mittelst welcher man aus den Versuchsergebnissen die gesuchte Constante für die atmosphärische Luft bestimmen kann.

Der Grundgedanke dieser Versuche ist im Folgenden angegeben. (Siehe Fig. 6, Taf. VII.)

Vor einer dickwandigen Metallröhre, deren Länge mittelst eines verschiebbaren Stempels beliebig geändert werden konnte, war eine Stimmgabel aufgestellt, welche durch den Violinbogen gestrichen, die Luftsäule in der Röhre in stärkeres oder geringeres Mitschwingen brachte, je nachdem der Stempel eingestellt war. Entsprach die Länge der also begrenzten Luftsäule einer ungeraden Anzahl von Viertelwellenlängen des Stimmgabeltones, so erreichte die Resonanz ihr Maximum.

In unmittelbarer Nähe dieser Schallröhre befand sich ein Resonator, bestehend aus einem cylindrischen GlasgefäÙe, das seitlich mit einer Oeffnung versehen und dessen oberes offenes Ende mit einer Membran verschlossen war. Die an der Seite des GefäÙes angebrachte Oeffnung setzte die Luft des Resonators in Communication mit jener des freien Luft- raums. Die Dimensionen des ResonatorgefäÙes und dessen Oeffnung waren so gewählt, daß der Eigenton desselben nahe dem der Stimmgabel unison war. Sowohl die Schallröhre als der Resonator waren so dickwandig, daß man ein Mitschwingen der Wände nicht zu besorgen hatte. Auf der Membran saÙ auf einem Holzstäbchen ein Glasfaden, welcher auf den Ton der Stimmgabel abgestimmt war.

Wurde nun der Stempel so eingestellt, daß die Länge der Luftsäule in der Schallröhre ein oder drei Viertel der Wellenlänge des angewendeten Tones betrug, so gerieth diese, wenn die Stimmgabel vor der Röhre zum Tönen gebracht wurde in ausgiebige stehende Schwingungen, welche

sich dem in der Nähe befindlichen Resonator mittheilten, dergestalt, daß durch dessen Membran der abgestimmte Glasfaden ebenfalls in starke Schwingungen gerieth. Die Elongation des Endes desselben gab dann in einer bestimmten Einheit die Intensität der Resonanz der Luftsäule in der Schallröhre bei einer bestimmten Intensität der Tonquelle.

Es folgt nun die von Hrn. Prof. Kirchhoff ausgeführte Ableitung der nöthigen Formeln.

Eine cylindrische Röhre communicirt durch ihr eines Ende mit einem größern Luftraum; in der Röhre in genügender Entfernung von diesem Ende bestehen ebene Tonwellen; der Querschnitt A ist in der Region der ebenen Wellen.

Für einen Punkt des Luftraumes sey Q die Geschwindigkeit nach irgend einer Richtung oder der nach einer Ordinate genommene Differentialquotient dieser (oder Druck oder Verrückung).

Für den Fall, daß die Bewegung allein durch den Querschnitt A hervorgebracht wird, und daß die Geschwindigkeit dieses Querschnittes (u)

$$= \sin 2\pi n t$$

ist, sey

$$Q = Q' \cos 2\pi n t + Q'' \sin 2\pi n t.$$

Für den Fall, daß die Bewegung allein durch den Querschnitt A hervorgebracht wird und für ihn

$$u = G \sin(2\pi n t + \delta)$$

ist, ist dann

$$\begin{aligned} Q &= G Q' (\cos 2\pi n t + \delta) + G Q'' \sin(2\pi n t + \delta) \\ &= G(Q' \cos \delta + Q'' \sin \delta) \cos 2\pi n t \\ &\quad + G(Q'' \cos \delta - Q' \sin \delta) \sin 2\pi n t. \end{aligned}$$

Ist sonst noch eine Tonquelle vorhanden, welche, wenn der Querschnitt A ruhte

$$Q = q' \cos 2\pi n t + q'' \sin 2\pi n t$$

machen würde, so ist, wenn der Querschnitt die angegebene Bewegung hat:

$$(I) \quad Q = (q' + G(Q' \cos \delta + Q'' \sin \delta)) \cos 2\pi n t \\ + (q'' + G(Q'' \cos \delta - Q' \sin \delta)) \sin 2\pi n t.$$

Nun setze man zunächst $Q =$ dem Werthe von $\frac{\partial u}{\partial x}$ für den Querschnitt A , welchen Werth man durch P bezeichne, während P' , P'' , p' , p'' die Werthe seyn sollen, die dann Q' , Q'' , q' , q'' , annehmen. Zugleich setze man:

$$P = \alpha G \sin(2\pi n t + \tau)$$

dann hat man nach (I)

$$G \alpha \sin \tau = p' + G(P' \cos \delta + P'' \sin \delta)$$

$$G \alpha \cos \tau = p'' + G(P'' \cos \delta - P' \sin \delta)$$

woraus folgt:

$$p' \sin \delta + p'' \cos \delta = G(\alpha \cos(\delta - \tau) - P'')$$

$$p' \cos \delta - p'' \sin \delta = G(\alpha \sin(\delta - \tau) - P')$$

also:

$$(II) \quad G^2 = \frac{p_i'^2 + p_{ii}^2}{(\alpha \cos(\delta - \tau) - P'')^2 + (\alpha \sin(\delta - \tau) - P')^2}$$

Es soll nun α und $(\delta - \tau)$ unter der Voraussetzung berechnet werden, daß der Querschnitt $x = 0$ fest ist; bei dieser Berechnung kann der Anfangspunkt der Zeit beliebig gelegt, also gesetzt werden:

$$u = C \{ e^{m'x} \sin(2\pi n t + m''x) - e^{-m'x} \sin(2\pi n t - m''x) \} \\ = C \cos 2\pi n t \sin m''x (e^{m'x} + e^{-m'x}) \\ + C \sin 2\pi n t \cos m''x (e^{m'x} - e^{-m'x}) \\ = C \sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} - 2 \cos 2m''x} \sin(2\pi n t + \delta)$$

wo:

$$\sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} - 2 \cos 2m''x} \sin \delta = \sin m''x (e^{m'x} + e^{-m'x})$$

$$\sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} - 2 \cos 2m''x} \cos \delta = \cos m''x (e^{m'x} - e^{-m'x})$$

Ferner ist:

$$P = C \cos 2\pi n t \{ m' \sin m''x (e^{m'x} - e^{-m'x}) \\ + m'' \cos m''x (e^{m'x} + e^{-m'x}) \} \\ + C \sin 2\pi n t \{ m' \cos m''x (e^{m'x} + e^{-m'x}) \\ - m'' \sin m''x (e^{m'x} - e^{-m'x}) \} \\ = C \sqrt{m'^2 + m''^2} \sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} - 2 \cos 2m''x} \sin(2\pi n t + \tau)$$

wo:

$$\begin{aligned} & \sqrt{m'^2 + m''^2} \sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} + 2 \cos 2m''x \sin \tau} \\ & \quad = m' \sin m''x (e^{m'x} - e^{-m'x}) + m'' \cos m''x (e^{m'x} + e^{-m'x}) \\ & \sqrt{m'^2 + m''^2} \sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} + 2 \cos 2m''x \cos \tau} \\ & \quad = m' \cos m''x (e^{m'x} + e^{-m'x}) - m'' \sin m''x (e^{m'x} - e^{-m'x}) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \sqrt{m'^2 + m''^2} \frac{\sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} + 2 \cos 2m''x}}{\sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} - 2 \cos 2m''x}}$$

und:

$$\begin{aligned} & \sqrt{m'^2 + m''^2} \sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} + 2 \cos 2m''x} \\ & \sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} - 2 \cos 2m''x} \cos(\delta - \tau) \\ & \quad = m' (e^{2m'x} - e^{-2m'x}) + 2m'' \sin 2m''x \\ & \sqrt{m'^2 + m''^2} \sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} + 2 \cos 2m''x} \\ & \sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} - 2 \cos 2m''x} \sin(\delta - \tau) \\ & \quad = 2m' \sin 2m''x - m'' (e^{2m'x} - e^{-2m'x}) \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \alpha \cos(\delta - \tau) &= \frac{m' (e^{2m'x} - e^{-2m'x}) + 2m'' \sin 2m''x}{e^{2m'x} + e^{-2m'x} - 2 \cos 2m''x} \\ \alpha \sin(\delta - \tau) &= \frac{2m' \sin 2m''x - m'' (e^{2m'x} - e^{-2m'x})}{e^{2m'x} + e^{-2m'x} - 2 \cos 2m''x} \end{aligned}$$

oder, wenn man m'^2 vernachlässigt:

$$\begin{aligned} \alpha \cos(\delta - \tau) &= m'' \operatorname{cottg} m''x \\ \alpha \sin(\delta - \tau) &= m' \left(\operatorname{cottg} m''x - \frac{m''x}{\sin^2 m''x} \right) \end{aligned}$$

Diese Werthe denke man sich in die Gleichung (II) gesetzt, so hat man G als Function von x dargestellt.

Nun verstehe man in (I) unter Q die Verrückung des Endes des Glasfadens, was erlaubt ist.

Ist a die zu messende Amplitude, so ist also:

$$a^2 = (q' + G(Q' \cos \delta + Q'' \sin \delta))^2 + (q'' + G(Q'' \cos \delta - Q' \sin \delta))^2$$

ist der Querschnitt A fest, so ist:

$$a^2 = q'^2 + q''^2.$$

Man nehme an, dafs im letzteren Falle a unmerklich, also q' und q'' verschwindend klein sind, dann ist im Allgemeinen

$$a^2 = G^2(Q'^2 + Q''^2)$$

Q' und Q'' sind von x unabhängig; bei variablem x ist bei einer gewissen Einheit also

$$G = a.$$

Die Maxima von G sind bestimmt durch:

$$\left\{ P' - m' \left(\cot \cot g m'' x - \frac{m'' x}{\sin^2 m'' x} \right) \right\}^2 + \left\{ P'' - m'' \cot \cot g m'' x \right\}^2 = 0 \text{ (Minimum).}$$

Da m' sehr klein, so muß für die Maxima

$$m'' \cot \cot g m'' x = P''.$$

Für das erste Maximum sey

$$x = l,$$

für das zweite ist dann

$$x = l + \frac{\pi}{m''}.$$

Sind G_1 und G_2 die beiden Maxima, so ist also:

$$(III) \quad \frac{G_1^2}{G_2^2} = \frac{\left(P' - m' \left(\cot \cot g (m'' l + \pi) - \frac{(m'' l + \pi)}{\sin^2 (m'' l + \pi)} \right) \right)^2}{\left(P' - m' \left(\cot \cot g m'' l - \frac{m'' l}{\sin^2 m'' l} \right) \right)^2}$$

Es soll weiter G beobachtet seyn für einen Werth von x in der Nähe von l ; man hat dann:

$$(IV) \quad \frac{G_1^2}{G^2} = \frac{m''^2 (\cot \cot g m'' l - \cot \cot g m'' x)^2 + \left(P' - m' \left(\cot \cot g m'' x - \frac{m'' x}{\sin^2 m'' x} \right) \right)^2}{\left(P' - m' \left(\cot \cot g m'' l - \frac{m'' l}{\sin^2 m'' l} \right) \right)^2}$$

Aus (III) ist dann $\frac{m_1}{P'}$ und aus (IV) P' zu berechnen, wodurch auch m' bekannt wird.

Wie sich aus dem Vorstehenden ergibt, handelte es sich um die Messung der Intensität der Resonanz im Schallrohr bei drei verschiedenen Längen desselben und zwar bei *einem* und *drei* Viertel der Wellenlänge des Tones, sowie bei einer Einstellung, welche sich nur wenig von der für das erste Viertel der Wellenlänge unterschied. Letztere Röhrenlänge war so gewählt, daß die entsprechende Schwingung des Glasfadens etwa die Hälfte von der der stärksten Resonanz ausmachte.

Der schwingende Glasfaden war beleuchtet, so daß er während seiner Bewegung eine helle Dreiecksfläche beschrieb. Die Elongation seines Endes wurde mittelst eines Ophthalmometers gemessen. Es handelte sich nun darum, jene drei Intensitäten bei gleicher Intensität der erregenden Tonquelle, d. i. bei gleicher Elongation der Stimmgabelzinken zu erhalten. Diefes wurde auf folgende Weise bewerkstelligt. Auf dem Ende der einen Zinke waren in geringer Entfernung parallel zu einander zwei kurze Glasfädchen mit Klebwachs befestigt. Wurde die Gabel gestrichen, so beschrieb jedes dieser Fädchen eine leuchtende Rechtecksfläche. Diese beiden Flächen deckten sich anfangs theilweise, berührten sich bei einer ganz bestimmten Schwingungsweite der Gabelzinken und rückten dann, indem ihre Breite abnahm, allmählich auseinander. — Es wurden nun die Messungen, um deren Ausführung es sich handelte, immer in dem Momente ausgeführt, wenn die ebenerwähnte Berührung jener beiden hellen Flächen stattfand.

Zu diesem Behufe war das Resonatorgefäß in der Nähe der Stimmgabel der Art aufgestellt, daß sowohl der schwingende Glasfaden, als die Fäden der Stimmgabelzinken gleichzeitig im Gesichtsfelde des Ophthalmometers erschienen. Da jedoch die Theorie unendlich kleine Elongationen des Glasfadens voraussetzt, diese aber in Wirklichkeit, bei einer Länge desselben von fast 20^{mm} bis auf 0,8^{mm} stiegen, so mußte vor allem geprüft werden, ob die Elongationen des Fadens jenen der Stimmgabelzinken proportional seyen. Es ergab sich, daß dies — wenigstens innerhalb der Grenzen der Beobachtung — in der That stattfindet.

Um die Membran der Art zu spannen, daß sie im Stande sey die Luftschwingungen im Resonator kräftig auf den Glasfaden zu übertragen, wurde eine einfache Vorrichtung angewandt. Ein Metallring konnte nämlich durch drei Schrauben auf die Membran gepreßt und diese hierdurch gespannt werden.

Da sich indeß die Spannung der Membran in Folge der elastischen Nachwirkung und der Hygroskopie derselben

gewöhnlich ziemlich rasch änderte, so war dafür gesorgt, daß die Einstellung auf die verschiedenen Röhrenlängen schnell hintereinander bewerkstelligt werden konnte. Um sicher zu seyn, daß trotzdem während der Umstellung keine Aenderung in der Spannung der Membran stattgefunden habe, wurde die erste Messung immer wiederholt und nur jene Resultate benutzt, bei welchen diese Controllmessung nahezu die vorher erhaltene Ablesung gab.

Aus einer Reihe von Beobachtungen ergab sich als mittlerer Werth des Verhältnisses der Elongationen des ersten und zweiten Maximums, d. i.

$$\frac{G_1}{G_2} = 2,00,$$

für das Verhältniß der Elongationen hingegen, welche dem ersten Maximum und jener markirten Stelle entsprach, d. i.

$$\frac{G_1}{G} = 1,84.$$

Die angewandte Stimmgabel machte 330 Schwingungen in der Sekunde.

Die Dimensionen der Schallröhre waren die Folgenden:

Durchmesser im Lichten = 32,1^{mm}

Röhrenlänge für das erste Maximum = 244,9^{mm}

„ „ „ zweite „ = 765,8^{mm}

„ „ die markirte Stelle = 241,6^{mm}.

Hieraus berechnet sich nach den obigen Formeln, wenn wir die Schallgeschwindigkeit in freier Luft bei 20° C. [dies war nämlich im Mittel die Temperatur, bei der die Beobachtungen ausgeführt wurden] zu 343,28 Meter annehmen, der Werth von

$$m' = 0,00002541$$

und hieraus jene Constante, welche von der Reibung und Wärmeleitung der Luft abhängt

$$\gamma = 4,35.$$

Leider hat der jeweilige Feuchtigkeitszustand der Atmosphäre einen so großen Einfluß auf die Constanz der Spannung einer thierischen Membran, daß einigermassen

verläßliche Resultate nur bei ganz trockener Witterung erhalten werden konnten.

Zum Schlusse kann ich es mir nicht versagen, Hrn. Kirchhoff für die gütige Unterstützung, die er mir gelegentlich dieser Versuche, die ich in seinem Laboratorium ausführte, zu Theil werden liefs, hiermit meinen Dank auszusprechen.

Heidelberg im Juli 1870.

VIII. *Ueber das Spectrum des Nordlichtes; von F. Zöllner.*

(Mitgetheilt vom Verf. aus den Berichten d. Königl. Sächs. Gesells. d. W.)

Sitzung vom 31. October 1870.

Am 25. October dieses Jahres beobachtete ich mittelst eines Browning'schen Miniaturespectroskopes das Spectrum des Nordlichtes, wie es durch die beifolgende Zeichnung veranschaulicht wird. Um hinreichende Helligkeit zu erhalten, wurde der Spalt ziemlich weit geöffnet.

Mit Hülfe einer Alkoholflamme, deren Docht mit Natrium- und Lithiumsalzen imprägnirt war, wurde gleichzeitig die Lithium- und Natriumlinie erzeugt und deren Lage zur angenäherten Bestimmung der Nordlichtlinien benutzt. Die Linie im grünen Theile des Spectrums ist aller Wahrscheinlichkeit nach die zuerst von Ångström beobachtete und näher bestimmte Linie ¹⁾. Dagegen ist meines Wissens die oben verzeichnete rothe Linie bis jetzt noch nicht beobachtet worden.

1) Vergl. Ångström, *Recherches sur le Spectre solaire* p. 41 Berlin 1869.