war so klein, dass man wohl die erhaltenen Resultate als befriedigend annehmen darf.

Berlin, April 1877.

II. *Ueber einen allgemeinen Satz in Bezug auf electrische Influenz; von R. Clausius.*

Es sind schon mehrfach von verschiedenen Autoren gewisse Reciprocitätssätze in Bezug auf die gegenseitige Influenz zweier die Electricität leitender Körper aufgestellt. Ich will mir erlauben, hier einen sehr allgemeinen und, soviel ich weiss, neuen Satz mitzutheilen, aus welchem sich mehrere jener Reciprocitätssätze als unmittelbare Folgen ergeben.

Es sei irgend eine Anzahl leitender Körper C_1, C_2, C_3 etc. gegeben, welche influenzirend aufeinander wirken. Diese sollen in zwei verschiedenen Weisen mit Electricität geladen werden. Bei der ersten Ladung seien die auf den einzelnen Körpern befindlichen Electricitätsmengen:

$$Q_1, Q_2, Q_3 \text{ etc.}$$

und die dadurch entstehenden Potentialniveaux der Körper:

$$V_1, V_2, V_3 \text{ etc.,}$$

und bei der zweiten Ladung seien die Electricitätsmengen und Potentialniveaux:

$$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3 \text{ etc.}$$

$$\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_3 \text{ etc.}$$

Dann gilt folgende Gleichung:

$$(I) \quad V_1 \mathfrak{Q}_1 + V_2 \mathfrak{Q}_2 + V_3 \mathfrak{Q}_3 + \text{etc.} = \mathfrak{V}_1 Q_1 + \mathfrak{V}_2 Q_2 + \mathfrak{V}_3 Q_3 + \text{etc.},$$

oder unter Anwendung von Summenzeichen, kürzer geschrieben:

$$(I_a) \quad \Sigma V \Delta = \Sigma \mathfrak{B} Q.$$

Zum Beweise dieser Gleichung denken wir uns um einen in der Nähe der Körper gelegenen Punkt eine unendlich grosse Kugelfläche geschlagen, und auf den zwischen den Körpern und der Kugelfläche liegenden unendlichen Raum wenden wir die bekannte Green'sche Gleichung an, indem wir die beiden darin vorkommenden Functionen mit V und $\mathfrak{B}$ bezeichnen und darunter die der ersten und zweiten Ladung entsprechende Potentialfunction verstehen. Die Gleichung lautet dann:

$$(1) \quad \int V \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial n} d\omega + \int V \Delta \mathfrak{B} d\tau = \int \mathfrak{B} \frac{\partial V}{\partial n} d\omega + \int \mathfrak{B} \Delta V d\tau.$$

Hierin bedeutet $d\omega$ ein Element der Fläche, welche den betrachteten Raum begrenzt, und welche aus den Oberflächen der gegebenen Körper und aus der unendlich grossen Kugelfläche besteht, n soll die auf dem Flächenelemente errichtete Normale (nach dem betrachteten Raume zu positiv gerechnet) darstellen, und die Integrale, welche $d\omega$ enthalten, beziehen sich auf jene ganze Begrenzungsfläche. Ferner bedeutet $d\tau$ ein Element des betrachteten Raumes, durch Δ wird die Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ angedeutet, und die Integrale, welche $d\tau$ enthalten, haben sich über den ganzen betrachteten Raum zu erstrecken.

Nun ist aber in diesem Raume bei den beiden angenommenen Ladungsweisen keine Electricität enthalten, und es gelten also in ihm überall die Gleichungen:

$$\Delta V = 0 \quad \text{und} \quad \Delta \mathfrak{B} = 0,$$

wodurch die Gleichung (1) sich reducirt auf:

$$(2) \quad \int V \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial n} d\omega = \int \mathfrak{B} \frac{\partial V}{\partial n} d\omega.$$

Auch in dieser Gleichung tritt noch eine Vereinfachung ein. Die beiden Integrale sind dem Obigen nach über die Oberflächen der gegebenen Körper und über die unendlich grosse Kugelfläche zu nehmen. Nun sind aber, wenn R den unendlich grossen Radius der Kugelfläche bedeutet, die Werthe von V und $\mathfrak{B}$ an der Kugelfläche unendlich kleine Grössen von der Ordnung $\frac{1}{R}$, und die Werthe der Differentialcoefficienten $\frac{\partial V}{\partial n}$ und $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial n}$, bei denen die Normalrichtung mit der Richtung des Radius zusammenfällt, sind unendlich kleine Grössen von der Ordnung $\frac{1}{R^2}$. Die Producte $V \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial n}$ und $\mathfrak{B} \frac{\partial V}{\partial n}$ sind somit an der Kugelfläche unendlich kleine Grössen von der Ordnung $\frac{1}{R^3}$. Was ferner das Flächenelement $d\omega$ der Kugeloberfläche anbetrifft, so können wir dasselbe, wenn $d\sigma$ ein Element des körperlichen Winkels am Mittelpunkte der Kugelfläche bedeutet, durch das Product $R^2 d\sigma$ ersetzen. Dann ist an beiden Seiten der Gleichung der Factor, mit welchem $d\sigma$ unter dem Integralzeichen behaftet ist, noch ein unendlich Kleines von der Ordnung $\frac{1}{R}$, woraus folgt, dass von beiden Integralen der auf die Kugelfläche bezügliche Theil, welcher nach σ von 0 bis 4π zu nehmen ist, unendlich klein ist und vernachlässigt werden kann. Die in der Gleichung (2) vorkommenden Integrale brauchen also nur auf die Oberflächen der gegebenen Körper bezogen zu werden.

Auf der Oberfläche jedes Körpers ist die Potentialfunction constant, und kann daher für den Theil des Integrals, welcher sich auf ihn bezieht, aus dem Integralzeichen genommen werden. Demnach können wir die Gleichung (2) so schreiben:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & V_1 \int \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial n} d\omega_1 + V_2 \int \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial n} d\omega_2 + V_3 \int \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial n} d\omega_3 + \text{etc.} \\
 &= \mathfrak{B}_1 \int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega_1 + \mathfrak{B}_2 \int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega_2 + \mathfrak{B}_3 \int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega_3 + \text{etc.},
 \end{aligned}$$

worin $d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3$ etc. Flächenelemente der Körper C_1, C_2, C_3 etc. sein und die verschiedenen Integrale sich auf die Oberflächen der einzelnen Körper beziehen sollen.

Ferner besteht bekanntlich an der Oberfläche eines mit Electricität geladenen leitenden Körpers zwischen dem nach der Normale genommenen Differentialcoefficienten der Potentialfunction und der electrischen Dichtigkeit eine einfache Beziehung. Wenn nämlich h und $\mathfrak{h}$ die Flächen-dichtigkeiten bei den beiden Ladungen bedeuten, so gelten die Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi h \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial n} = -4\pi \mathfrak{h}$$

und dadurch geht (3) über in:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & V_1 \int \mathfrak{h} d\omega_1 + V_2 \int \mathfrak{h} d\omega_2 + V_3 \int \mathfrak{h} d\omega_3 + \text{etc.} \\
 &= \mathfrak{B}_1 \int h d\omega_1 + \mathfrak{B}_2 \int h d\omega_2 + \mathfrak{B}_3 \int h d\omega_3 + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Die hierin noch vorkommenden Integrale sind aber nichts weiter, als die auf den einzelnen Körpern befindlichen Electricitätsmengen, und wir erhalten somit die zu beweisende Gleichung:

$$V_1 \mathfrak{Q}_1 + V_2 \mathfrak{Q}_2 + V_3 \mathfrak{Q}_3 + \text{etc.} = \mathfrak{B}_1 Q_1 + \mathfrak{B}_2 Q_2 + \mathfrak{B}_3 Q_3 + \text{etc.}$$

Was nun die Anwendungen dieser Gleichung anbelangt, so werden diese noch dadurch erleichtert, dass die Gleichung unter gewissen, oft stattfindenden Umständen sich noch weiter vereinfacht.

Betrachten wir nämlich die Glieder, welche sich auf irgend einen der gegebenen Körper, der C_i heisse, beziehen, nämlich die beiden Producte:

$$V_i \mathfrak{D}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_i Q_i,$$

so werden diese in zwei Fällen Null, so dass sie aus der Gleichung fortgelassen werden können. Wenn der Körper mit der Erde in leitender Verbindung steht, so bleibt sein Potentialniveau bei jeder Ladung des Systemes Null, und wir haben also für diesen Fall zu setzen:

$$V_i = \mathfrak{B}_i = 0,$$

wodurch die obigen Producte verschwinden. Wenn ferner der Körper isolirt und ursprünglich unelectrisch ist, und bei der Ladung keine Electricität von aussen empfängt, sondern nur durch Influenz eine ungleiche Vertheilung seiner eigenen Electricität erleidet, so wird seine Oberfläche theils positiv, theils negativ electrisch, in der Weise, dass die ganze auf der Oberfläche befindliche Electricitätsmenge Null bleibt. Wir haben dann also zu setzen:

$$Q_i = \mathfrak{D}_i = 0,$$

wodurch wiederum die obigen Producte verschwinden. Demgemäss kann folgende Regel aufgestellt werden. Solche Körper, die bei beiden Ladungen mit der Erde in leitender Verbindung stehen, oder die isolirt und ursprünglich unelectrisch sind, und bei den Ladungen keine Electricität empfangen, können bei der Aufstellung der Gleichung (I) unberücksichtigt bleiben.

Es möge nun als specieller Fall angenommen werden, dass bei allen gegebenen Körpern, mit Ausnahme von C_1 und C_2 , einer der beiden genannten Umstände stattfinde. Dann reducirt sich die Gleichung auf:

$$(5) \quad V_1 \mathfrak{D}_1 + V_2 \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{B}_1 Q_1 + \mathfrak{B}_2 Q_2.$$

Wenn wir diese Gleichung noch weiter dadurch vereinfachen, dass wir auch über das Verhalten der Körper C_1 und C_2 noch besondere Annahmen machen, so gelangen wir zu den eingangs erwähnten Reciprocitätssätzen.

Zunächst wollen wir die beiden Körper als isolirt und ursprünglich unelectrisch voraussetzen, und annehmen,

bei der ersten Ladung erhalte nur der Körper C_1 die Electricitätsmenge E , durch deren Influenz in C_2 das Potentialniveau V_2 entstehe, und bei der zweiten Ladung erhalte nur der Körper C_2 die Electricitätsmenge E , durch deren Influenz in C_1 das Potentialniveau $\mathfrak{B}_1$ entstehe. In diesem Falle haben wir zu setzen:

$$Q_2 = \mathfrak{D}_1 = 0; \quad Q_1 = \mathfrak{D}_2 = E,$$

wodurch (5) übergeht in:

$$V_2 E = \mathfrak{B}_1 E$$

oder:

$$(6) \quad V_2 = \mathfrak{B}_1.$$

Also das Potentialniveau, welches dadurch, dass C_1 mit einer gewissen Electricitätsmenge geladen wird, in C_2 entsteht, und dasjenige, welches dadurch, dass C_2 mit derselben Electricitätsmenge geladen wird, in C_1 entsteht, sind unter einander gleich.

Ferner wollen wir die Annahme machen, bei der ersten Ladung werde C_1 bis zum Potentialniveau K geladen, während C_2 mit der Erde in leitender Verbindung stehe und durch Influenz aus der Erde die Electricitätsmenge Q_2 erhalte; bei der zweiten Ladung werde C_2 bis zum Potentialniveau K geladen, während C_1 mit der Erde in leitender Verbindung stehe und durch Influenz die Electricitätsmenge $\mathfrak{D}_1$ erhalte. Dann haben wir zu setzen:

$$V_2 = \mathfrak{B}_1 = 0; \quad V_1 = \mathfrak{B}_2 = K,$$

wodurch (5) übergeht in:

$$K \mathfrak{D}_1 = K Q_2$$

oder:

$$(7) \quad \mathfrak{D}_1 = Q_2.$$

Also die Electricitätsmenge, welche bei der Ladung von C_1 bis zu einem gewissen Potentialniveau durch Influenz auf C_2 angesammelt wird, und diejenige, welche bei der Ladung von C_2 bis zu demselben Potentialniveau durch

Influenz auf C_1 angesammelt wird, sind unter einander gleich.

Ausser diesen beiden hier beispielsweise angeführten, auf zwei sehr einfache specielle Fälle bezüglich Schlüssen lassen sich natürlich aus (I) viele andere ähnliche Schlüsse ziehen.¹⁾

III. *Ueber die electriche Leitungsfähigkeit der Electrolyten; von A. F. Berggren in Lund.*

Mit Anwendung der Methode von Paalzow²⁾ habe ich in dem physikalischen Laboratorium der Universität zu Lund für einige Lösungen von schwefelsauren Salzen und Chlornatrium den Leitungswiderstand zu bestimmen versucht und erlaube mir die Resultate dieser Untersuchungen im Folgenden mitzutheilen.

Entsprechend den Angaben von Paalzow befanden sich in zwei weiten gläsernen Gefässen grosse amalgamirte Zinkelectroden in einer concentrirten Lösung von Zinkvitriol. — In denselben Gefässen standen gebrannte poröse Thoncylinder, die mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt waren. — Eine lange, mit derselben Flüssigkeit gefüllte Heberröhre verband die Thoncylinder. Die Zinkelectroden wurden mit den Leitungsdrähten des einen Armes einer Wheatstone'schen Brücke verbunden. Im anderen Arme befand sich ein Widerstandsetalon, mittelst welches der Widerstand in diesem Arme so abgemessen werden konnte, dass kein Strom durch das Galvanometer der Brücke ging. Auf diese Art erhielt

1) Bei dieser Gelegenheit wird gebeten, in einem früheren Aufsätze des Herrn Clausius folgenden Druckfehler zu corrigiren: Pogg. Ann. CLX. p. 425 Z. 12 v. o. statt „normalen“ lies: „enormen“.

2) Berl. Monatsber. 1868. p. 486.