sphärischen Abweichung jedenfalls von bedeutendem Einfluß ist.

Nehmen wir die sphärische Abweichung als begründet an, so wird sich nun leicht zeigen lassen, weshalb die Irradiation (ganz ähnlich wie das Zurücklegen der Netzhaut bei schlechtem Auge) alle Gegenstände, Dreiecke, Rechtecke etc. immer mehr und mehr dem Kreise, als der Gestalt der Pupille, zu nähern sucht, aus je größerer Entfernung man sie betrachtet; eine dreieckige Pupille bringt alle Gegenstände dem Dreieck näher, s. obige Versuche. Es läßt sich ferner leicht zeigen, weshalb sehr verschieden entfernte Lichtquellen in größerer Entfernung doch gleich große Bilder (d. i. gleich große leuchtende Scheiben) geben können etc. Auch durch die veränderliche Größe der Pupille werden sich so manche Erscheinungen erklären lassen, so z. B., weshalb in der Dämmerung Gegenstände größer erscheinen als am Tage etc.

IV. *Ueber einige Stellen der Schrift von Helmholtz „über die Erhaltung der Kraft“; von R. Clausius.*

In meiner Abhandlung über das mechanische Aequivalent einer elektrischen Entladung ¹⁾ habe ich bei Anführung des Satzes, daß die bei einer elektrischen Entladung von den elektrischen Kräften gethane Arbeit durch die Zunahme des Potentials der gesamten Elektrizität auf sich selbst gemessen wird, gesagt, eine von Helmholtz in der oben genannten Schrift gegebene Formel weiche davon ab, diese Abweichung sey aber nur dadurch entstanden, daß er das Potential einer Masse auf sich selbst doppelt so groß rechne, als es in der That ist. Hierauf erwidert nun

1) Diese Annalen Bd 86, S. 343.

Helmholtz in einer in diesem Bande S. 224 befindlichen Note, *dafs diese Abweichung nur auf einem Unterschiede des Namens, nicht der Sache beruhe.*

Was zunächst den Unterschied des Namens betrifft, so darf der hier nicht als unwesentlich betrachtet werden. Der Begriff *des Potentials zweier Massen auf einander* hat nämlich seine grofse Bedeutung in der Wissenschaft nur dadurch, dafs er für einen speciellen, aber sehr häufig vorkommenden Fall der Ausdruck *der mechanischen Arbeit* ist, welche letztere als eine der wichtigsten Gröfsen der ganzen Mechanik und mathematischen Physik betrachtet werden mufs, und in diesem Sinne hat auch Helmholtz denselben in seiner Schrift angewandt. Wenn nun auch der Begriff *des Potentials einer Masse auf sich selbst* eingeführt werden sollte, und sich dazu auf den ersten Blick zwei verschiedene Gröfsen darbieten, von denen die eine wiederum der Ausdruck der mechanischen Arbeit war, während die andere den doppelten Werth hatte, so konnte es keine Frage seyn, welche von beiden gewählt werden mufste, und ich glaube daher, dafs kein Unrecht darinnen liegen würde, die andere Wahl, selbst wenn alle weiteren Entwicklungen mit ihr übereinstimmend ausgeführt wären, doch als ein Versehen zu bezeichnen.

Im vorliegenden Falle steht die Sache aber noch anders. Helmholtz hat nicht nur der doppelten Gröfse den Namen Potential gegeben, sondern seiner ganzen dahin gehörigen Entwicklung liegt auch die irrige Ansicht zu Grunde, dafs diese doppelte Gröfse der Ausdruck der gethanen Arbeit, und daher das Maafs der dabei möglicherweise zu erzeugenden lebendigen Kraft sey. Er sagt S. 39: »so finden wir die ganze gewonnene lebendige Kraft, wenn wir das Potential der übergehenden elektrischen Massen vor der Bewegung *gegen jede der anderen Massen* und *auf sich selbst* abziehen von denselben Potentialen nach der Bewegung«. Hier ist also das Potential einer Masse auf sich selbst, trotzdem dafs es doppelt gerechnet ist, mit den auf gewöhnliche Weise gerechneten

Potentialen derselben auf andere Massen in Bezug auf die Erzeugung von lebendiger Kraft in gleiche Linie gestellt. Noch bestimmter tritt dieses in den darauf folgenden mathematischen Formeln hervor, und auch der Umstand, daß das daraus abgeleitete Endresultat soweit richtig ist, daß man es durch bloße Veränderung des Potentialbegriffes in das vollständig richtige verwandeln kann, beruht nur auf einem Zufalle, welcher dadurch entstanden ist, daß Helmholtz sich auf die Betrachtung eines sehr einfachen speciellen Falles beschränkt hat, wobei sich zwei in entgegengesetztem Sinne wirkende Fehler aufgehoben haben. Wenn man ganz dieselbe Entwicklung auf einen etwas allgemeineren Fall anwendet, so erhält man ein falsches Resultat.

Helmholtz betrachtet nämlich den Fall, wo zwei verschieden elektrische Körper *A* und *B* sich in ihrem elektrischen Zustande ausgleichen, und bestimmt die lebendige Kraft, welche dadurch möglicher Weise entstehen kann, oder, was dasselbe ist, und wie ich es im Folgenden immer ausdrücken werde, die von den elektrischen Kräften dabei gethane Arbeit. Als anfänglichen Zustand nimmt er an, daß beide Körper mit gleichen Quantitäten positiver und negativer Elektricität geladen seyen, und setzt voraus, daß die Ausgleichung in der Weise stattfinde, daß die Hälfte der positiven Elektricität von *A* nach *B*, und die Hälfte der negativen von *B* nach *A* ströme.

Wir wollen nun im Uebrigen dasselbe einfache Beispiel beibehalten, und nur die Art der Ausgleichung allgemeiner betrachten, denn es ist natürlich, damit beide Körper unelektrisch werden, nicht nothwendig, daß gerade die Hälfte von jeder Elektricität von dem einen zum andern ströme. Geht man von der Hypothese aus, daß es nur Eine Elektricität gebe, und die sogenannte negative Elektricität nur ein Mangel an Elektricität sey, so muß man annehmen, daß die ganze positive Elektricität von *A* nach *B* ströme, und sich hier mit der negativen neutralisire; geht man dagegen von der Hypothese zweier

Elektricitäten aus, so kann man sich unendlich viele verschiedene Ausgleichungsweisen als möglich vorstellen, und um diese alle gleichzeitig zu umfassen, wollen wir, wenn $+E$ und $-E$ die anfänglich auf A und B befindlichen Elektricitätsmengen sind, allgemein setzen:

$$(1.) \quad E = e + e',$$

und annehmen, daß die Menge $+e'$ von A nach B und die Menge $-e$ von B nach A überströmen oder übertragen werden. Dann sind, in welchem Verhältnisse auch e und e' zu einander stehen mögen, beide Körper unelektrisch, denn auf A befindet sich dann $+e$ und $-e$ und auf B $+e'$ und $-e'$, und da somit der Anfangs- und Endzustand in allen diesen Fällen dieselben sind, so muß auch die während der Ausgleichung von den elektrischen Kräften gethane Arbeit immer gleich seyn. Eine richtige Entwicklung muß daher für die letztere einen von e und e' unabhängigen Ausdruck geben, während man aus der Helmholtz'schen Entwicklung einen von diesen Größen abhängigen Ausdruck erhält.

Um auch äußerlich mit dieser Entwicklung möglichst im Einklange zu bleiben, wollen wir folgende Bezeichnung wählen. Wenn die Körper A und B jeder mit der Elektricitätsmenge $+1$ geladen sind, so soll das, was Helmholtz das Potential der auf A befindlichen Elektricität auf sich selbst nennt, und was ich im Folgenden immer das doppelte Potential nennen werde, w_a heißen, und ebenso für B dieselbe GröÙe w_b , und das Potential beider Elektricitätsmengen auf einander v . Dann ist für den allgemeinen Fall, wo sich auf A und B die beliebigen Elektricitätsmengen x und y befinden, wenn dabei angenommen wird, daß diese immer auf dieselbe Weise über die Körper verbreitet seyen:

$$(2.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{das dopp. Pot. von } x \text{ auf sich selbst} = x^2 w_a \\ \text{"" "" "" } y \text{ "" ""} = y^2 w_b \\ \text{das Pot. von } x \text{ und } y \text{ auf einander} = xyv \end{array} \right.$$

und wenn sich auf demselben Körper A die beiden Elek-

gehörigen Werthen die Differenz nimmt. Die Summe dieser Differenzen stellt er als Ausdruck für die gethane Arbeit hin. Wir wollen nun ganz dieselbe Entwicklung, nur mit der erwähnten Verallgemeinerung ausführen, und sehen, ob wir dadurch einen mit (4.) übereinstimmenden Ausdruck erhalten. In der folgenden Zusammenstellung enthält jede Reihe für eins der von Helmholtz in Rechnung gebrachten Potentiale die Differenz der Werthe vor und nach der Ausgleichung.

1) Dopp. Pot. von $+e'$ auf sich selbst	$+e'^2(w_b - w_a)$
2) Pot. von $+e'$ auf $-e$	$-ee'(v - v)$
3) " " $+e$	$+ee'(v - w_a)$
4) " " $-e'$	$-e'^2(w_b - v)$
5) Dopp. Pot. von $-e$ auf sich selbst	$+e^2(w_a - w_b)$
6) Pot. von $-e$ auf $+e'$	$-ee'(v - v)$
7) " " $-e'$	$+ee'(v - w_b)$
8) " " $+e$	$-e^2(w_a - v)$

Dafs hierin das Potential von $+e'$ und $-e$ auf einander zweimal angeführt ist, nämlich in der 2ten und 6ten Reihe, ist dem Principe nach unrichtig, da aber dieses Potential gerade vor und nach der Ausgleichung denselben Werth hat, und daher als Differenz Null giebt, so hat dieser Fehler auf das Resultat keinen Einfluss. Bildet man nun von den übrigen Gliedern die Summe, und berücksichtigt dabei die Gleichung $e + e' = E$, so erhält man den gesuchten Ausdruck, welcher dem von Helmholtz entwickelten entspricht, nämlich:

$$(5.) E(Ev - e'w_a - ew_b)$$

und dieser ist offenbar von dem Ausdrücke (4.) im Allgemeinen verschieden, und stimmt nur für den speciellen Fall, wo

$$e = e' = \frac{1}{2} E$$

ist, mit demselben überein. Erst dadurch, dafs man in der 1sten und 5ten Reihe der obigen Zusammenstellung für die doppelten Potentiale, wie es seyn mufs, die einfachen setzt, indem man die dort stehenden Werthe mit $\frac{1}{2}$ multiplicirt,

wird die Uebereinstimmung allgemein hergestellt, denn alsdann erhält man durch Addition genau den Ausdruck (4.).

Am Schlusse seiner Note beschwert sich Helmholtz ferner darüber, daß ich in einer anderen Anmerkung meiner oben erwähnten Abhandlung gesagt habe, *einige Stellen seiner Schrift seyen meiner Ansicht nach ungenau*. Ich habe in derselben Abhandlung zwei solche Stellen näher bezeichnet, von denen die eine die eben besprochene über das Potential einer Masse auf sich selbst ist, und die zweite sich auf einen auch von Helmholtz angenommenen Satz von Vorfselman de Heer bezieht. Durch diese beiden Belege hielt ich damals meinen Ausspruch für hinlänglich motivirt, jetzt aber bin ich genöthigt, noch auf einige andere Stellen einzugehen, und ich glaube dieses auch dem wissenschaftlichen Publicum gegenüber thun zu dürfen, da die Sache nicht eine bloß persönliche ist, sondern sich zum Theil auf Fragen von allgemeinerem wissenschaftlichen Interesse bezieht.

Im ersten Abschnitte, welcher über das bekannte mechanische Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft handelt, sagt Helmholtz nach einigen allgemeineren Betrachtungen S. 10: »*Wir wollen hier zunächst zeigen, daß das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte ganz allein da gilt, wo die wirkenden Kräfte sich auflösen lassen in Kräfte materieller Punkte, welche in der Richtung der Verbindungslinie wirken, und deren Intensität nur von der Entfernung abhängt.*«

Wenn sich dieses wirklich streng mathematisch nachweisen liefse, so wäre das von großer Wichtigkeit, denn alsdann würde, wenn sich in der Natur jenes Princip allgemein anwendbar zeigt, daraus mit Nothwendigkeit folgen, daß alle Naturkräfte sich auf Grundkräfte mit den beiden angeführten Eigenschaften d. h. auf sogenannte Centralkräfte zurückführen lassen müssen, und eben dieses ist auch der Punkt, welchen Helmholtz durch seinen Beweis festzustellen sucht. Indessen scheint mir der Beweis jener Ankündigung nicht zu entsprechen.

Er ist nicht bloß auf das Princip der lebendigen Kraft basirt, sondern in seinem weiteren Verlaufe wird noch eine zweite Annahme zu Hülfe genommen. Indem Helmholtz nämlich einen einzelnen beweglichen materiellen Punkt m betrachtet, welcher unter der Einwirkung eines einzelnen festen materiellen Punktes a steht, zieht er daraus, daß die Lage von m durch seine Beziehung zu a nur der Entfernung ma nach bestimmt sey, den Schluß, daß *Richtung und GröÙe der von a auf m ausgeübten Kraft nur Functionen dieser Entfernung seyn können.*

Die *Richtung* der Kraft scheint hier nur aus Versehen mit erwähnt zu seyn, denn wenn sie durch bloße Functionen der Entfernung bestimmt wäre, so müßte sie bei gleicher Entfernung, also in den verschiedenen Punkten einer um a beschriebenen Kugelfläche überall dieselbe seyn, was Helmholtz nicht gemeint haben kann. Daß aber die *GröÙe* der Kraft eine Function der Entfernung sey, ist gerade die eine der oben erwähnten Eigenschaften, welche, wie es dort schien, beide erst als Folgen des Principes der lebendigen Kraft bewiesen werden sollten, und von denen nun die eine zum Beweise der anderen unabhängig von diesem Principe angenommen wird. Der Grund, aus welchem Helmholtz diese Annahme über die GröÙe der Kraft ableitet, ist auch schon an einer früheren Stelle, nämlich in der Einleitung S. 5 erwähnt, wo es heißt: »Punkte haben keine räumliche Beziehung gegen einander, als ihre Entfernung, denn die Richtung ihrer Verbindungslinie kann nur im Verhältniß gegen mindestens noch zwei andere Punkte bestimmt werden.« Hier aber zieht Helmholtz daraus einen anderen Schluß, indem er weiter sagt: »Eine Bewegungskraft, welche sie gegen einander ausüben, kann deshalb auch nur Ursache zur Aenderung ihrer Entfernung seyn, d. h. eine anziehende oder abstoßende.« Dieses ist die zweite der oben erwähnten Eigenschaften, und somit hat Helmholtz selbst gezeigt, daß, wenn man einmal von jener allgemeinen Betrachtung als richtig ausgeht, man daraus beide Eigenschaften gleich unmittelbar ableiten kann.

Das Princip der lebendigen Kraft erscheint daher, jenachdem man die Richtigkeit jener Betrachtung zugiebt oder nicht, zum Beweise der beiden Eigenschaften im einen Falle als unnöthig, im anderen als unzureichend.

Die Folgerungen, welche sich aus diesem Principe allein ergeben, lassen sich leicht übersehen.

Bleiben wir bei dem vorher betrachteten einfachen Beispiele eines festen und eines frei beweglichen materiellen Punktes stehen, und bezeichnen die veränderliche Geschwindigkeit des beweglichen Punktes m mit q , so daß $\frac{1}{2}mq^2$ seine lebendige Kraft darstellt, so wird jenes Princip mathematisch dadurch ausgedrückt, daß $\frac{1}{2}mq^2$ eine bloße Function der Raumcoordinaten seyn muß, in welcher die letzteren von einander unabhängige Veränderliche sind. Nun gilt allgemein der mechanische Satz, daß, wenn X , Y , Z die in die drei rechtwinklichen Coordinatenrichtungen fallenden Componenten der auf m wirkenden Kraft bedeuten, dann

$$\frac{1}{2}mq^2 = \int (Xdx + Ydy + Zdz)$$

ist. Soll hierin die linke Seite eine Function der angegebenen Art seyn, so muß auch die rechte Seite eine solche darstellen, d. h. der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck muß integrabel seyn, und dieses ist die einzige Bedingung, welche der Kraft durch jenes Princip auferlegt wird.

Diese Bedingung läßt sich auf unendlich viele Weisen erfüllen, denn wenn man von einer ganz beliebigen Function der Raumcoordinaten $f(x, y, z)$ ausgeht, und setzt:

$$X = \frac{df}{dx}, \quad Y = \frac{df}{dy}, \quad Z = \frac{df}{dz}$$

so erhält man dadurch jedesmal eine nach Größe und Richtung durch Functionen der Raumcoordinaten bestimmte Kraft, welche offenbar der Bedingung genügt.

Fragen wir nun, in welcher Beziehung diese allgemeine Be-

Bedingung zu den beiden oben besprochenen Eigenschaften, welche die Kraft zu einer Centrakraft machen, steht, so läßt sich, wie gesagt, keine von ihnen für sich allein daraus folgern, dagegen läßt sich leicht beweisen, *dafs, wenn Eine jener beiden Eigenschaften stattfindet, dann nothwendig auch die andere stattfinden mufs*; und nur dieser Satz hätte meiner Ansicht nach in der citirten Stelle von Helmholtz als Folge des Principes der lebendigen Kraft ausgesprochen werden dürfen.

Was endlich noch den anderen, vom Principe der lebendigen Kraft unabhängigen Grund anbetrifft, aus welchem Helmholtz die Nothwendigkeit der Centrakräfte schließt, nämlich die oben angeführte allgemeine Betrachtung, so scheint mir diese, wenn wir von ihrer physicalischen Wahrscheinlichkeit, welche ich durchaus nicht bestreite, hier ganz absehen, und nur ihre mathematische Nothwendigkeit ins Auge fassen, ebenfalls nicht einwurfsfrei zu seyn; denn *undenkbar* ist es doch nicht, dafs selbst ein Punkt nach verschiedenen Richtungen mit verschiedener Kraft wirke.

Der zweite Abschnitt, in welchem die Betrachtungen des ersten verallgemeinert werden, enthält gegen das Ende S. 19 noch einen anderen Beweis der obigen Behauptung, in welchem scheinbar keine Nebenannahme vorkommt. Es wird nämlich für ein System materieller Punkte, welche theils gegenseitig auf einander einwirken, theils unter der Einwirkung fremder Kräfte stehen, aus dem Principe der lebendigen Kraft das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten abgeleitet, und aus diesem dann geschlossen, dafs die gegenseitigen Kräfte je zweier Punkte »in der Richtung der verbindenden Linie liegen, also anziehende oder abstofsende seyn müssen.« Dabei ist aber das letztere Princip durch die Gleichung (7.) S. 18 nur in einer speciellen Form ausgedrückt, welche es dadurch angenommen hat, dafs die ganze Entwicklung schon von der Voraussetzung ausgeht, dafs alle vorkommenden Kräfte in den Richtungen der Verbindungslinien wirken, wie es in den auf S. 15

befindlichen Formeln deutlich ausgesprochen ist. Wenn nun aus einer so entstandenen Gleichung umgekehrt wieder jene Voraussetzung geschlossen wird, so kann ich darin nur einen Zirkelschluss sehen.

Im vierten Abschnitte bespricht Helmholtz die Abhandlung von Clapeyron über die bewegende Kraft der Wärme, in welcher als Aequivalent der von der Wärme geleisteten Arbeit ein bloßer Uebergang einer gewissen Wärmemenge von einem warmen zu einem kalten Körper betrachtet wird, und führt dann ihr gegenüber die von Holtzmann über denselben Gegenstand geschriebene Abhandlung in der Weise an, als ob in dieser als Aequivalent der Arbeit ein wirklicher Verbrauch von Wärme in Rechnung gebracht wäre. Das ist aber ein Irrthum. Ich habe schon an einer früheren Stelle ¹⁾ erwähnt, daß man zwar aus der Einleitung dieser Abhandlung die Vermuthung schöpfen kann, als wolle Holtzmann den Gegenstand von diesem Gesichtspunkte aus behandeln, daß man sich aber durch eine nähere Betrachtung der mathematischen Entwicklungen leicht davon überzeugt, daß die aufgestellten Formeln, und namentlich auch die von Helmholtz speciell citirte Formel für die Elasticität des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen, auf der Annahme beruhen, daß die Quantität der Wärme unveränderlich sey.

Einige andere Stellen, welche sich auf continuirliche elektrische Ströme und Elektrodynamik beziehen, muß ich hier übergehen, da ihre vollständige Erörterung hier zu weitläufig werden würde, und ich behalte mir daher vor, in späteren Arbeiten gelegentlich darauf zurückzukommen.

Schließlich muß ich aber in Beziehung auf die ganze Schrift hier noch einmal aussprechen, was ich schon in meiner ersten darauf bezüglichen Anmerkung angedeutet habe, daß sie trotz der erwähnten Ungenauigkeiten, selbst wenn diese vollständig als solche zugestanden werden, doch meiner Ansicht nach durch die vielen in ihr enthaltenen

1) Diese Ann. Bd. 79, S. 370.

schönen Gedanken einen großen wissenschaftlichen Werth besitzt, und ich würde daher auch die vorstehende Auseinandersetzung gern vermieden haben, wenn sie nicht zu meiner eigenen Rechtfertigung nothwendig gewesen wäre.

V. *Ueber die Zusammensetzung des Rindstalgs;
von W. Heintz.*

In einer im Jahre 1849 erschienenen Arbeit hat Arzbächer ¹⁾ nachzuweisen versucht, daß das aus dem Rindstalg dargestellte Stearin zwei Procent Kohlenstoff mehr enthalte, als das aus dem Hammeltalg gewonnene, und Liebig ²⁾ hat die Richtigkeit der Resultate dieser Untersuchung gegen einen freilich nur vermeintlichen Angriff von mir in Schutz genommen. Bei meiner Untersuchung des Rindstalgs bin ich zu der Ueberzeugung gelangt, daß die Angaben von Arzbächer dennoch unrichtig sind.

Dieser stellte das Stearin auf folgende Weise dar. Das Fett wurde im Wasserbade geschmolzt und mit Aether geschüttelt. Nach dem Erkalten wurde letzterer abgegossen, das Stearin zwischen Papier gepreßt und auf dieselbe Weise 4 bis 5 Mal behandelt. Das so gewonnene Stearin schmolz bei 60°,6 C., war blendend weiß, leicht zerreiblich und pulverisirbar. Die Zahlen, zu welchen Arzbächer durch die Analysen des so aus Rindstalg dargestellten Stearins gelangte, waren folgende:

	I.	II.	III.	IV.	Mittel.
Kohlenstoff	78,67	78,62	78,95	78,72	78,74
Wasserstoff	12,22	12,23	12,22	12,43	12,27
Sauerstoff	9,11	9,19	8,83	8,85	8,99
	100	100	100	100	100

1) Ann. der Chem. und Pharm. Bd. 70, S. 239. *

2) Ebend. Bd. 80, S. 296. * Ann.