IX. *Ueber innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle; von W. Voigt.*

(Aus den Abhandl. der königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen Bd. XXXVI und XXXVIII im Auszug mitgetheilt.)[1])

Die innere Reibung, welche bei Flüssigkeiten längst ausführlich untersucht ist, nun auch bei festen Körpern einer theoretischen und experimentellen Behandlung zu unterwerfen, ist das Ziel, welches ich mir in den oben genannten Abhandlungen gesteckt habe.

I. Theorie.

Die Grundvoraussetzung der Theorie ist die Annahme, dass die in den festen Körpern infolge der inneren Reibung wirkenden Druckcomponenten ebenso, wie in Flüssigkeiten, als lineare Functionen der Deformationsgeschwindigkeiten x_x', y_y', z_z', y_z', z_x', x_y' angesehen werden können. Bezeichnet man die *Gesammtdrucke* durch (X_x), . . . die von der Elasticität herrührenden Antheile durch X_x, . . ., die der Reibung entsprechenden durch A_x, . . ., so ist dann

$$(X_x) = X_x + A_x, \; . \; . \; .$$

und es gilt der Ansatz:

$$-X_x = c_{11}\, x_x + c_{12}\, y_y + c_{13}\, z_z + c_{14}\, y_z + c_{15}\, z_x + c_{16}\, x_y\,.$$

. . . .

und

$$-A_x = a_{11}\, x_x' + a_{12}\, y_y' + a_{13}\, z_z' + a_{14}\, y_z' + a_{15}\, z_x' + a_{16}\, x_y',$$

in welchem bezüglich der *Elasticitätsconstanten* zwar gilt $c_{hk} = c_{kh}$, *allgemeine* Relationen zwischen den 36 *Constanten* c_{hk} *der inneren Reibung* aber nicht bestehen.

Specielle Beziehungen treten auf, wenn der untersuchte feste Körper ein Krystall ist und man die in allen Gebieten

1) Im Einzelabdruck „Ueber die innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Krystalle“ (Göttingen, 1890), und „Bestimmung der Constanten der Elasticität und Untersuchung der inneren Reibung für einige Metalle“ (Göttingen, 1892).

der Krystallphysik gebräuchliche Annahme macht, dass die Symmetrie des physikalischen Verhaltens durch die Symmetrie der Krystallform bestimmt wird. Ihre Verfolgung reducirt, falls man ein durch Symmetrieeigenschaften ausgezeichnetes Coordinatensystem zu Grunde legt, die Anzahl der voneinander unabhängigen Reibungsconstanten erheblich, sodass die hinsichtlich der Elasticitätserscheinungen gleichwerthigen Gruppen auch hier gleichwerthig bleiben, aber die Anzahl der ihnen entsprechenden Reibungsconstanten stets grösser ist, als die der Elasticitätsconstanten.

Man erhält folgende Resultate:

	Reibungs-constanten	Elasticitäts-constanten
Triklines System	36	21
Monoklines System	20	13
Rhombisches System	12	9
Quadratisches System: I. Abtheilung. . .	7	6
„ „ II. Abtheilung. . .	9	7
Hexagonales System: I. Abtheilung. . .	6	5
„ „ II. Abtheilung. . .	8	6
„ „ III. Abtheilung. . .	11	7
Reguläres System.	3	3
Isotrope Körper	2	2

Das Verhältniss ändert sich, wenn man die Definition der inneren Reibung etwas enger fasst, als oben geschehen ist, und nur diejenigen Antheile der $A_x, \ldots$ als ihr entsprechende Druckcomponenten gelten lässt, welche bei allen Bewegungserscheinungen eine Energie absorbirende Wirkung üben.

Diese Antheile erhält man, indem man z. B. A_x in A_x' und A_x'' so zerlegt, dass

$$A_x = A_x' + A_x''$$

und

$$-A_x' = a_{11}\, x_x' + \frac{a_{12} + a_{21}}{2}\, y_y' + \frac{a_{13} + a_{31}}{2}\, z_z' + \ldots + \frac{a_{16} + a_{61}}{2}\, x_y',$$

$$-A_x'' = \frac{a_{12} - a_{21}}{2}\, y_y' + \frac{a_{13} - a_{31}}{2}\, z_z' + \ldots + \frac{a_{16} - a_{61}}{2}\, x_y',$$

ist. Dann gibt das System der $A_x'', \ldots$ zur Arbeit der Druckkräfte einen verschwindenden Antheil, und demgemäss keine Absorption von Energie; das System der $A_x, \ldots$ stellt von diesem Standpunkte aus die Druckcomponenten der inneren

Reibung dar. Betrachtet man dann in ihnen die Aggregate

$$\frac{a_{hk} + a_{kh}}{2} = b^{hk}$$

als die Reibungsconstanten, so ist vermöge der für sie geltenden Beziehung $b_{hk} = b_{kh}$ ihre Anzahl in jedem Krystallsysteme ebenso gross, als die Anzahl der Elasticitätsconstanten.

Die Werthe der $(X_x) \ldots$, nämlich

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} -(X_x) &= c_{11}\, x_x + c_{12}\, y_y + \ldots + c_{16}\, x_y \\ &\quad + a_{11}\, x_x' + a_{12}\, y_y' + \ldots + a_{16}\, x_y', \end{aligned} \right.$$

können, wenn die Glieder der zweiten Reihe klein gegen diejenigen der ersten sind, zur Bestimmung angenäherter Werthe der Deformationsgrössen $x_x \ldots$ dienen. Wirkt nämlich keine innere Reibung, so ist

$$-x_x = s_{11}(X_x) + s_{12}(Y_y) + \ldots + s_{16}(X_y),$$

und unter Benutzung dieses Resultates erhält man leicht in zweiter Annäherung

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} x_x &= -\big(s_{11}(X_x) + s_{12}(Y_y) + \ldots s_{16}(X_y)\big) \\ &\quad + \big(n_{11}(X_x') + n_{12}(Y_y') + \ldots n_{16}(X_y')\big), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

worin

$$(2') \quad n_{ab} = \sum_h \sum_k a_{hk}\, s_{ha}\, s_{kb}$$

ist. Die Grössen s_{hk} heissen die *Elasticitätsmoduln*, die n_{hk} die *Reibungsmoduln* der betrachteten Substanz.

Die Formeln (2) sind aus (1) durch ein Annäherungsverfahren erhalten, sie erscheinen also als ungenauer wie (1); es hindert aber nichts, eben *sie* als den ursprünglichen Ansatz zu betrachten und (1) als aus ihnen abgeleitet. Für die Anwendungen kommen die Gleichungen (2) in erster Linie in Betracht.

Die Beobachtungen knüpfen an die Dämpfung von Schwingungen elastischer Stäbe an und demgemäss beziehen sich die theoretischen Entwickelungen ebenfalls nur auf solche.

Die Stäbe mögen auf ein Coordinatensystem bezogen werden, dessen Anfangspunkt im Schwerpunkt des einen Endquerschnittes liegt; die X- und Y-Axe fallen je in eine Hauptträgheitsaxe des Querschnittes, die Z-Axe ist die Stabaxe.

Die Bewegung möge so stattfinden, dass in jedem Moment die Deformationen längs der Stabaxe constant sind. Dies kann auf zwei Weisen erreicht werden. Die für die Anwendung in erster Linie in Betracht kommende Anordnung, welche in diesem Auszuge allein betrachtet werden mag, ist, dass der Stab in dem ersten Endquerschnitt $z = 0$ festgehalten wird und in dem zweiten Endquerschnitte $z = L$ geeignet mit einer grossen trägen Masse verbunden ist, sodass er sich nicht bewegen kann, ohne jene mitzuführen.

Ist dann die Dauer einer Schwingung des aus Stab und träger Masse bestehenden Systemes sehr gross gegen die Zeit, die irgend eine elastische Verrückung zur Fortpflanzung über die Länge des Stabes braucht, so kann man die Verrückungen an jeder Stelle des Stabes ebenso bestimmen, als wenn derselbe bei der gleichen Ablenkung des Endquerschnittes im Gleichgewicht wäre. Ist also die träge Masse so befestigt, dass bei jeder möglichen Verrückung derselben der Stab gleichförmig deformirt wird, so wird er es auch während der Schwingungen in jedem Moment sein.

Demgemäss kann man für die Verrückungen u, v, w die Ansätze machen:

$$(3)\qquad \begin{cases} u = U - z\left(\dfrac{g_1 z}{2} + h y\right) \\ v = V - z\left(\dfrac{g_2 z}{2} - h x\right) \\ w = W + z\,(g_1 x + g_2 y + g_3). \end{cases}$$

Hierin sind U, V, W gewisse Functionen von x und y allein, die für die Zwecke des Experimentes nicht in Betracht kommen, g_1 und g_2 sind die reciproken Krümmungsradien der Curven, die durch Projection der Axe des Stabes auf die XZ- und YZ-Ebene erhalten werden, g_3 ist die lineare Dilatation dieser Axe, h ist die gegenseitige Drillung zweier um die Längeneinheit voneinander entfernten Querschnitte um die Y-Axe.

Aus der dritten der Gleichungen (2), welche nach Einsetzen von (3) lautet:

$$(4)\qquad \begin{cases} g_1 x + g_2 y + g_3 = -\left(s_{31}(X_x) + s_{32}(Y_y) + \dots + s_{36}(X_y)\right) \\ \qquad + \left(n_{31}(X_x') + n_{32}(Y_y') + \dots + n_{36}(X_y')\right), \end{cases}$$

bestimmt sich g_1, g_2, g_3 durch Multiplication mit $x\,dq$, $y\,dq$, dq und Integration über den ganzen Querschnitt Q, wie folgt:

$$(5)\quad \begin{cases} g_1\,Q\,\varkappa_y^2 = s_{33}\,M + s_{43}\,\dfrac{N}{2} - n_{33}\,M' - n_{43}\,\dfrac{N'}{2}, \\ g_2\,Q\,\varkappa_x^2 = s_{33}\,\Lambda - s_{53}\,\dfrac{N}{2} - n_{33}\,\Lambda' + n_{53}\,\dfrac{N'}{2}, \\ g_3\,Q \quad\;\; = s_{33}\,\Gamma - n_{33}\,\Gamma'. \end{cases}$$

Hierin bezeichnet Γ die auf den freien Querschnitt auszuübende Zugkraft parallel der Z-Axe, und Λ, M, N die um die Coordinatenaxen X, Y, Z daselbst auszuübenden Drehungsmomente, die erforderlich sind, um die durch g_1, g_2, g_3 und h charakterisirten Deformationen hervorzubringen; $\varkappa_x$ und $\varkappa_y$ sind die Trägheitsradien des Querschnittes um die X- und Y-Axe.

Aehnlich, aber etwas umständlicher erhält man den Werth von h, weil er zunächst speciell einem *elliptischen* Cylinder entspricht:

$$(6)\quad h\,Q = \left(\frac{s_{44}\,N - n_{44}\,N'}{4\,\varkappa_y^2} + \frac{s_{55}\,N - n_{55}\,N'}{4\,\varkappa_x^2}\right) + \left(\frac{s_{34}\,M - n_{34}\,M'}{2\,\varkappa_y^2} - \frac{s_{35}\,\Lambda - n_{35}\,\Lambda'}{2\,\varkappa_x^2}\right).$$

Der zweite Theil gilt ungeändert auch für beliebige Querschnitte; in dem ersten treten für andere als elliptische Querschnitte an Stelle von $\varkappa_x$ und $\varkappa_y$ andere Functionen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ auf, die meist nur angenähert zu bestimmen sind.

Die Resultate vereinfachen sich, wenn die Axe des Cylinders senkrecht zu einer krystallographischen Symmetrieebene des untersuchten Körpers steht, in denen $s_{34} = s_{35} = 0$ ist. Man erhält hier

$$(7)\quad \begin{cases} g_1\,Q\,k_y^2 = s_{33}\,M - n_{33}\,M', \\ g_2\,Q\,k_x^2 = s_{33}\,\Lambda - n_{33}\,\Lambda', \\ g_3\,Q \quad\;\; = s_{33}\,\Gamma - n_{33}\,\Gamma', \\ h\,Q \quad\;\; = \left(\dfrac{s_{44}}{\varkappa_2^2} + \dfrac{s_{55}}{\varkappa_1^2}\right)\dfrac{N}{4} - \left(\dfrac{n_{44}}{\varkappa_2^2} + \dfrac{n_{55}}{\varkappa_1^2}\right)\dfrac{N'}{4}. \end{cases}$$

Sind die betrachteten Stäbe an ihrem freien Enden, wie oben vorausgesetzt, mit grossen trägen Massen fest verbunden, so sind $-\Gamma$, $-\Lambda$, $-M$, $-N$ die Kraft und die Momente, die sie auf letztere ausüben. Wenn die Massen also resp. um die X-, Y-, Z-Axe drehbar sind, so würden ihre Bewegungen gegeben sein durch die Gleichungen

$$(8)\qquad \mathfrak{M}_x \psi_x'' = -\varLambda, \quad \mathfrak{M}_y \psi_y'' = -M, \quad \mathfrak{M}_z \psi_z'' = -N,$$

in denen die $\mathfrak{M}$ die Trägheitsmomente der betreffenden Massen, die ψ ihre Drehungswinkel gegen die Ruhelagen bezeichnen; letztere stehen mit den Grössen g_h und h in der Beziehung, dass $g_1 = \psi_y / L$, $g_2 = \psi_x / L$, $h = \psi_z / L$ ist. $\varLambda$, M, N lassen sich aus den Gleichungen (7) und (8) auf zweierlei Weise eliminiren. Einmal, indem man die Gleichungen (7) in der früher benutzten Annäherung nach $\varLambda$, M, N auflöst und die erhaltenen Werthe einsetzt. Dann ergibt sich resp.

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_x \psi_x'' = -\dfrac{Q\varkappa_x^2}{L s_{33}}\left(\psi_x + \dfrac{n_{33}}{s_{33}}\psi_x'\right), \\ \mathfrak{M}_y \psi_y'' = -\dfrac{Q\varkappa_y^2}{L s_{33}}\left(\psi_y + \dfrac{n_{33}}{s_{33}}\psi_y'\right), \\ \mathfrak{M}_y \psi_z'' = -\dfrac{4\,Q\varkappa_1^2\varkappa_2^2}{L(\varkappa_1^2 s_{44} + \varkappa_2^2 s_{55})}\left(\psi_z + \dfrac{\varkappa_1^2 n_{44} + \varkappa_2^2 n_{55}}{\varkappa_1^2 s_{44} + \varkappa_2^2 s_{55}}\psi_z'\right). \end{cases}$$

Diese Formeln entsprechen gewissermaasen den Ausgangsgleichungen (1). Ferner kann man $\varLambda$, M, N aus (8) entnehmen und in (7) einsetzen. Dann folgt:

$$(10)\qquad \begin{cases} M_x L(s_{33}\psi_x'' - n_{33}\psi_x''') + Q\varkappa_x^2\psi_x = 0, \\ M_y L(s_{33}\psi_y'' - n_{33}\psi_y''') + Q\varkappa_y^2\psi_y = 0, \\ M_z L\left(\left(\dfrac{s_{44}}{\varkappa_2^2} + \dfrac{s_{55}}{\varkappa_1^2}\right)\psi_z'' - \left(\dfrac{n_{44}}{\varkappa_2^2} + \dfrac{n_{55}}{\varkappa_1^2}\right)\psi_z'''\right) + 4\,Q\psi_z = 0. \end{cases}$$

ein Formelsystem, das den Ausgangsgleichungen (2) entspricht.

Wenn die n_{hk} klein gegen die s_{hk} sind, geben beide Systeme dieselben Resultate. Sie enthalten die Theorie der angestellten Beobachtungen, soweit dieselben von der inneren Reibung abhängen.

Die Gleichungen (9), von denen wir weiterhin ausgehen wollen, fallen unter die Form

$$(11)\qquad \psi'' + \beta(\psi + \psi'\alpha) = 0,$$

worin α die *Dämpfungsconstante* für die betrachtete Schwingung heissen mag; sie ist für die Biegungsschwingungen unter den gemachten Voraussetzungen stets vom Querschnitt des Stabes unabhängig und nur eine Function der Orientirung seiner Axe gegen die Krystallaxen; bei Drillungsschwingungen gilt dies nur, wenn die Orientirung derartig ist, dass $s_{44} = s_{55}$, $n_{44} = n_{55}$

ist, d. h. die Längsaxe in eine mehr als zweizählige Symmetrieaxe fällt.

Die Gleichung (10) wird integrirt durch

$$\psi = A e^{-\frac{\lambda t}{T}} \cos \frac{2\pi}{T}(t - t'), \tag{12}$$

worin

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\beta - \frac{\beta^2 \alpha^2}{4}}, \quad \frac{\lambda}{T} = \frac{\beta \alpha}{2} \tag{13}$$

ist; λ hat dabei die Bedeutung des logarithmischen Decrementes, T die der Schwingungsdauer. Ist, wie in unserem Falle stets, $\beta \alpha^2 / 4$ klein neben 1, so kann man in der letzten Formel β mit $4\pi^2 / T^2$ vertauschen und erhält so den Werth der Dämpfungsconstante α allein durch die beobachtbaren Grössen λ und T

$$\alpha = \frac{\lambda T}{2\pi^2}. \tag{14}$$

Die zunächst mitgetheilten Beobachtungen beziehen sich auf isotrope oder quasi-isotrope Körper, nämlich Metalle. Die Stäbe sind, um die Isotropie möglichst wenig durch die Bearbeitung zu stören, aus eigens gegossenen Blöcken vorsichtig und ohne erhebliche Erwärmung ausgesägt, mit scharfem Stichel eben abgedreht und schliesslich mit Schmirgel geschliffen und polirt.

Für isotrope oder quasi-isotrope Körper vereinfachen sich die obigen Formeln sämmtlich sehr erheblich.

Von den Elasticitäts- und Reibungsconstanten c_{hk} und a_{hk}, ebenso von den Elasticitäts- und Reibungsmoduln s_{hk} und n_{hk}, sind nur je neun von Null verschieden; zwischen ihnen bestehen dabei folgende Beziehungen:

$$\left\{\begin{array}{l}
c_{11} = c_{22} = c_{33} = c,\ c_{23} = c_{31} = c_{12} = c_1,\ c_{44} = c_{55} = c_{66} = \dfrac{c - c_1}{2} = c_2, \\
a_{11} = a_{22} = a_{33} = a,\ a_{23} = a_{31} = a_{12} = a_1,\ a_{44} = a_{55} = a_{66} = \dfrac{a - a_1}{2} = a_2, \\
s_{11} = s_{22} = s_{33} = s,\ s_{23} = s_{31} = s_{12} = s_1,\ s_{44} = s_{55} = s_{66} = 2(s - s_1) = s_2, \\
n_{11} = n_{22} = n_{33} = n,\ n_{23} = n_{31} = n_{12} = n_1,\ n_{44} = n_{55} = n_{66} = 2(n - n_1) = n_2;
\end{array}\right. \tag{15}$$

in ihnen sind c, c_1, c_2, a, a_1, a_2, s, s_1, s_2 und n, n_1, n_2 neue Bezeichnungen.

Hieraus folgen die Werthe der Dämpfungsconstanten für Biegungs- und Drillungsschwingungen:

$$\alpha_\beta = \frac{n_{33}}{s_{33}} = \frac{n}{s}, \quad \alpha_\gamma = \frac{n_{44}}{s_{44}} = \frac{n_2}{s_2}. \tag{16}$$

Sind dieselben durch die Beobachtung gemäss der Formel (14) bestimmt, so erhält man aus ihnen, falls die Elasticitätsmoduln s, s_1 bekannt sind, zunächst sogleich die der Substanz entsprechenden Reibungsmoduln, und da nach (2′) und (15)

$$\begin{cases} n = 2\,a_2\,(s^2 + 2\,s_1{}^2) + a_1\,(s + 2\,s_1)^2 \\ n = a_2\,s_2{}^2 \end{cases} \tag{17}$$

ist, auch leicht die Werthe der Reibungsconstanten a_1, a_2, woraus nach (15) a folgt.

Wie die Elasticitätsmoduln aus Schwingungsbeobachtungen gefunden wurden, soll an einer anderen Stelle ausführlicher erörtert werden, da die erhaltenen Zahlen ein selbständiges Interesse besitzen.

II. Die Beobachtungsmethode.

Der Messung zu unterwerfen war nach dem oben Gesagten die Dauer und das logarithmische Decrement der Biegungs- und Drillungsschwingungen prismatischer Stäbe; und zwar sollten die Schwingungen durch die Verbindung der Stäbe mit grossen trägen Massen verlangsamt werden und ausserdem so stattfinden, dass die Stäbe in jedem Moment längs ihrer Axe gleichförmig deformirt wären. Durch welche Mittel dies erreicht wurde, kann hier nur ganz kurz angedeutet werden.

Der Apparat zur Beobachtung der *Biegungsschwingungen* bestand aus einer etwa 1200 g schweren Messingscheibe von 20 cm Durchmesser, welche um ihre, durch eine Carneolschneide gebildete und horizontal gelegene Axe drehbar war. Das zu untersuchende, vertical gestellte Stäbchen wurde mit seinem *unteren* Ende ($z = 0$) geeignet in einem Halter befestigt, mit seinem *oberen* ($z = L$) mit einer Stelle der Scheibe so verbunden, dass seine Axe dort in einen Radius der Scheibe fiel; der Mittelpunkt des Stäbchens fiel während der Ruhe in die Drehungsaxe der Scheibe. Wenn nun die Scheibe eine kleine Drehung erfuhr, so krümmte sich das Stäbchen gleichförmig, d. h. nach einem Kreisbogen und die eintretende Bewegung der Scheibe entsprach in der That nahe der obigen Gleichung (9^1 resp. 9^2).

Für die Beobachtung der *Drillungsschwingungen* wurde das vertical gestellte Stäbchen an seinen oberen Ende in einen Halter gefasst und mit seinem unteren so mit einer horizontal liegenden Kreisscheibe von Messing verbunden, dass die beiderseitigen Axen zusammenfielen. Das Trägheitsmoment der Scheibe konnte durch Aufschrauben eines Verstärkungsringes vergrössert werden; die meisten Beobachtungen sind mit demselben angestellt worden. Bei einer Drehung der Scheibe um ihre Axe trat eine gleichförmige Drillung des Stäbchens ein und die Bewegung folgte nahezu der Gleichung (9^3).

Die Verbindung der Stäbchen mit den Haltern einerseits, den Scheiben andererseits geschieht so, dass die Enden der Stäbchen in kräftige Messingklötze eingelöthet, resp. wenn unlöthbar, eingekittet und diese Klötze an die betreffenden Theile durch Schrauben befestigt wurden. Die Einlöthung resp. Einkittung musste sehr vorsichtig geschehen, damit nicht bei den Schwingungen in den Befestigungsstellen dämpfende Kräfte entstanden, welche die in den Stäbchen selbst wirkenden weit übertrafen. Die hieraus entspringende Fehlerquelle erschwerten die Beobachtungen in der unangenehmsten Weise.

Weiter kam störend in Betracht die Inhomogenität des Materiales, die anscheinend trotz aller Vorsicht durch die Bearbeitung entstand; die Oberflächenschicht der Stäbchen wurde nämlich durch das Feilen, Schleifen und Poliren dichter als das Innere und verlor dadurch an innerer Reibung. Dies zeigte sich darin, dass dünnere Stäbchen mitunter auffällig geringere Dämpfungsconstanten ergaben als dickere. Diese Fehlerquelle konnte durch Benutzung scharfer Instrumente für die Bearbeitung verkleinert, aber nicht ganz beseitigt werden, und erschwert gleichfalls die Messungen.

Bei dem Drillungsapparate stellte die Schwierigkeit, reine Drillungsschwingungen hervorzubringen, eine bedeutende Fehlerquelle dar; jederzeit, wenn die Centrirung von Stäbchen und Scheibe nicht vollständig war, verwandelten sich im Laufe der Beobachtungen die Drillingsschwingungen zum Theil in Biegungsschwingungen, welche sehr viel mehr gedämpft wurden und daher unverhältnissmässig viel Energie verschwinden liessen.

Der Einfluss des Luftwiderstandes wurde durch eigene Beobachtungen ausgewerthet und in Rechnung gezogen. Bei dem Biegungsapparate geschah dies so, dass die Messingscheibe durch geeignete Veränderung der Massenvertheilung in ein Pendel verwandelt wurde, das auch ohne angebrachte Stäbchen Schwingungen ausführte. Deren Dämpfung gestattet den Einfluss des Luftwiderstandes und der Axenreibung zugleich zu bestimmen. Bei dem Drillungsapparate wurde die Messingscheibe bifilar aufgehängt und so in Schwingungen versetzt.

War das logarithmische Decrement bei diesen Beobachtungen $= \lambda^0$, die Schwingungsdauer $= T^0$, und ergab die definitive Beobachtung mit den Metallstäbchen resp. λ und T, so berechnet sich die dem Metall entsprechende Dämpfungsconstante

$$\alpha = \frac{T^2}{2\pi^2}\left(\frac{\lambda}{T} - \frac{\lambda^0}{T^0}\right). \tag{18}$$

Für den Biegungsapparat wuchs während der etwa 2 Jahre dauernden Beobachtungen infolge der Abnutzung der Carneolschneide λ^0/T^0 allmählich von 0,000231 bis 0,000253, für den Drillungsapparat blieb es gleich 0,000154 und zwar galt dieser Werth eigenthümlicher Weise mit und ohne Verstärkungsring.

Bei den Metallen mit geringer innerer Reibung rührte ein sehr bedeutender Theil der schliesslich beobachteten Dämpfung vom Luftwiderstande her, bei den mit grosser konnte er fast vernachlässigt werden.

Die eigentliche Untersuchung des logarthmischen Decrementes bot wegen der Kleinheit der Schwingungdauer einige Schwierigkeit. Schliesslich lieferte eine photographische Methode alle zu wünschende Genauigkeit und Bequemlichkeit.

Mit den schwingenden Scheiben war je ein kleiner Hohlspiegel verbunden, der das Bild eines sehr feinen Inductionsfunkens auf eine rotirende, mit photographischem Papier überzogene Trommel warf. Auf demselben erschien bei der Entwickelung des Bildes eine sehr zarte, aus unzähligen feinen Pünktchen gebildete Wellenlinie mit abnehmender Amplitude, deren Ausmessung mit dem Kathetometer vorgenommen werden konnte.

Die Resultate dieser Messungen zeigten, dass das logarithmische Decrement λ bei einer und derselben Beobachtungsweise mit der Amplitude Δ und zwar bei starker Dämpfung sehr stark abnahm; die Abnahme liess sich indess durch die Formel

$$\lambda = \Delta + \Delta_1 A^2, \tag{19}$$

die sich auch theoretisch rechtfertigen lässt, ausserordentlich genau darstellen. Bezüglich der Berechnung von Δ und Δ_1 aus der Reihe der gemessenen Amplituden muss ich mich begnügen auf die Originalarbeit zu verweisen.

Die auf unendlich kleine Amplituden begogenen Decremente Δ sind dann in Formel (18) an Stelle von λ einzusetzen, um den Luftwiderstand zu eliminiren;

$$l = \Delta - \frac{\lambda^0 T}{T^0} \tag{20}$$

ist als das wegen des Luftwiderstandes corrigirte, auf unendlich kleine Amplituden bezogene Decrement anzusehen.

Um eine Vorstellung davon zu geben, wie genau die Beobachtungen durch die Formel (19) wiedergegeben werden, theile ich hier die Vergleichung zweier besonders ausführlicher Beobachtungsreihen mit der Berechnung mit.

Die erste Reihe bezieht sich auf Biegungsschwingungen eines Stäbchens von Phosphorbronze (Nr. 8), die sich durch besonders geringe Dämpfung auszeichnet. Das Intervall der Beobachtungen beträgt etwa 120 Schwingungen. Die beobachteten Werthe sind die Mittel aus drei Reihen; die Einheiten sind Millimeter:

beob.	21,64	19,28	17,21	15,37	13,75	12,30	21,00	9,84	8,85	
ber.	21,71	19,31	17,21	15,36	13,73	12,28	11,00	9,86	8,84	
beob.	7,92	7,12	6,39	5,72	5,16	4,63	4,16	3,72	3,36	3,00
ber.	7,93	7,12	6,39	5,73	5,15	4,62	4,15	3,73	3,35	3,01.

Die Reihe ist berechnet mit den Zahlen:

$$\Delta = 8{,}82 \,.\, 10^{-4}, \; \Delta_1 = 0{,}20 \,.\, 10^{-6}.$$

Das logarithmische Decrement nimmt in dieser Reihe von etwa $9{,}8 \,.\, 10^{-4}$ bis $8{,}8 \,.\, 10^{-4}$ ab; die Uebereinstimmung ist innerhalb der Grenze der directen Beobachtungsfehler eine vollkommene.

Eine zweite Reihe bezieht sich auf die Biegungsschwingungen eines Stäbchens von Cadmium (Nr. 2), welche Substanz unter allen von mir beobachteten die grössten Dämpfungen zeigte. Das Intervall zwischen zwei Messungen beträgt hier nur 10 Schwingungdauern:

beob.	12,82	9,44	7,06	5,38	4,16	3,23	2,56	2,00	1,57
ber.	12,89	9,33	7,02	5,38	4,18	3,26	2,55	2,00	1,57.

$$\varDelta = 240\,.\,10^{-4},\ \varDelta_1 = 67{,}0\,.\,10^{-6}.$$

Trotzdem hier das logarithmische Decrement von $340\,.\,10^{-4}$ bis $240\,.\,10^{-4}$ abnimmt, ist die Uebereinstimmung noch sehr befriedigend.

III. Beobachtungsresultate.

Das Ziel der Beobachtungen war festzustellen, welchen Antheil an der wahrnehmbaren Dämpfung der Schwingungen die innere Reibung, wie sie in I definirt ist, besitzt, und, wenn möglich, zu numerischen Bestimmungen der Dämpfungsconstanten zu gelangen, aus denen sich dann, wie oben gezeigt, die Reibungsmoduln und Reibungsconstanten berechnen lassen.

Zur Erreichuug des ersten Zieles war es nöthig, die Bedingungen der Beobachtung, so weit es die benutzten Apparate gestatteten, zu verändern, und die so erhaltenen Resultate mit der Theorie der innern Reibung zu vergleichen. Fand sich Uebereinstimmung, so konnten dann auch die von der Theorie gewiesenen Folgerungen aus den erhaltenen Zahlen gezogen werden.

Das zu prüfende Resultat der Theorie ist die Formel (14), in welcher nach dem Vorstehenden λ durch das corrigirte und auf unendlich kleine Amplituden bezogene Decrement zu ersetzen ist, also die Beziehung:

$$\alpha = \frac{l\,T}{2\pi^2},$$

welche aussagt, dass das Product aus Decrement und Schwingungsdauer eine der beobachteten Substanz individuelle Constante ist. λ und T liessen sich aber ändern durch verschiedene Wahl der Dimensionen des schwingenden Prismas und des Trägheitsmomentes der an der Bewegung theilnehmenden Massen. In beiden Hinsichten ist die Prüfung vorgenommen worden.

Von den Dimensionen variirte ich besonders die Dicke, da dieselbe viel grösseren Einfluss auf T und λ hat, als Breite und Länge; erstere tritt nämlich in dritter Potenz auf, während letztere linear vorkommen. Grenzwerthe für die Dicke waren 0,8 mm und 1,5 mm; die Breite blieb nahezu gleich 6 mm, die Länge war meist nahe gleich 100 mm. Das Trägheitsmoment liess sich nur am Drillungsapparate durch Anbringung oder Beseitigung des oben beschriebenen Verstärkungsringes variiren.

Wenn die Resultate der Beobachtung mit der obigen Formel unveinbar waren, musste nach einer andern Erklärung der Dämpfung der Schwingungen gesucht werden. Hier bot sich zunächst die zu diesem Zwecke schon mehrfach herangezogene elastische Nachwirkung, für welche zunächst Herr Boltzmann[1]) einen Ansatz aufgestellt hat. Aus demselben folgt unter bestimmten Hülfsannahmen, dass bei gedämpften Schwingungen das corrigirte logarithmische Decrement l selbst eine der Substanz individuelle Constante ist. Bei der grossen Abweichung dieses Resultates von dem der Theorie der inneren Reibung schien die Entscheidung von besonderem Interesse. Wo sie zu Gunsten der Boltzmann'schen Formeln ausfiel, durfte man dann hoffen, auch die Constanten jener Theorie für gewisse Substanzen zu bestimmen und speciell die Frage zu entscheiden, ob, wie Herr Boltzmann vermuthet, die räumliche Dilatation von elastischer Nachwirkung nicht begleitet ist.

Die zahlreichsten Beobachtungen sind an Phosphorbronze angestellt, weil ich das Material für besonders dicht und zuverlässig hielt, allerdings nicht mit vollem Rechte, da Gussporen doch nicht ganz fehlten. Ich gebe von ihnen, ebenso wie von den auf andere Substanzen bezüglichen, nur die Endresultate, indem ich bezüglich aller Einzelheiten auf die Originalarbeit verweise.

Bronze.

Biegung.

	T	l_β	α_β
Nr. 1.	$T =$ 0,707,	$l_\beta = 10{,}13 \cdot 10^{-4}$,	$\alpha_\beta = 36.3 \cdot 10^{-6}$
„ 2.	= 0,714,	= 10,13 „ ,	= 36,6 „
„ 3.	= 0,718,	= 10,76 „ ,	= 39,4 „
„ 4.	= 0,720,	= 9,23 „ ,	= 33,7 „
„ 5.	= 0,537,	= 14,21 „ ,	= 38,6 „
„ 6.	= 0,556,	= 14,09 „ ,	= 39,7 „
„ 7.	= 1,010,	= 6,13 „ ,	= 31,7 „

1) L. Boltzmann, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 7. p. 636. 1876.

Nr. 8.	$T =$ 1,030,	$l_\beta =$ 6,45 . 10^{-4},	$\alpha_\beta =$ 33,6 . 10^{-6}
„ 9.	= 1,045,	= 7,91 „ ,	= 40,8 „
„ 10.	= 1,0185,	= 6,50 „ ,	= 34,4 „
„ 11.	= 0,529,	= 14,55 „ ,	= 39,0 „
„ 12.	= 0,525,	= 14,75 „ ,	= 39,2 „
„ 13.	= 0,824,	= 7,46 „ ,	= 31,2 „
„ 14.	= 0,843,	= 8,78 „ ,	= 37,5 „
„ 15.	= 0,866,	= 8,83 „ ,	= 38,0 „

Zu diesen Zahlen ist Folgendes zu bemerken. Die Stäbchen Nr. 1)—8) sind zuerst hergestellt und beobachtet. Die Resultate für α_β zeigen eine Abnahme von α_β mit wechselnder Schwingungsdauer d. h. mit abnehmender Dicke. Ich vermuthete, dass hier die oben erwähnte als Folge der Bearbeitung auftretende Oberflächenschicht eine Rolle spielte, und liess zunächst 2) und 3) von 1 mm Dicke auf 0,8 mm mit aller Vorsicht abfeilen, um diese Schicht vielleicht zu beseitigen; diese Stäbchen sind als Nr. 9) und 10) aufgeführt. Schliesslich sind 11) und 12) neu in 1,25 mm Dicke hergestellt, darnach auf 0,9 mm abgefeilt und geschliffen und in diesem Zustande als 14) und 15) bezeichnet. Man erkennt, dass mit gesteigerter Vorsicht bei der Bearbeitung der Einfluss der Dicke auf α_β immer mehr verschwindet. Um zu untersuchen, in wie weit die *Länge* der Stäbchen auf α_β influirt, kürzte ich das besonders werthlose Stäbchen 7) auf $^2/_3$ seiner Länge und bezeichnete es so mit 13); das in diesem Zustande gefundene α_β stimmt vollständig mit dem früheren.

Bezüglich der *Biegungsschwingungen* scheinen sonach die Beobachtungen in Bronze in Uebereinstimmung mit der Theorie der innern Reibung zu stehen, und man kann das Mittel der oben erhaltenen Zahlen mit Ausschluss von Nr. 7) und 13) nämlich

$$\alpha_\beta = 37{,}5 \,.\, 10^{-6}$$

als einen ungefähren Werth der ersten Dämpfungsconstante für Bronze ansehen.

Natürlich können die Beobachtungen nun nicht mit der Boltzmann'schen Formel stimmen; es entspricht sich im Mittel (unter Ausschluss von Nr. 7 und 13)

$T =$	0,537	0,715	0,880	1,023
$l_\beta . 10^4 =$	14,40	10,06	8,54	6,71

l_β nimmt also sehr stark mit wachsendem T ab.

Bronze.

Drillung.

Nr.	1.	$T = 0{,}398$,	$l_\gamma = 3{,}22 . 10^{-4}$,	$\alpha_\gamma = 6{,}48 . 10^{-6}$
„	2.	$= 0{,}411$,	$= 2{,}95$ „ ,	$= 6{,}13$ „
„	3.	$= 0{,}408$,	$= 3{,}05$ „ ,	$= 6{,}31$ „
„	4.	$= 0{,}405$,	$= 3{,}12$ „ ,	$= 6{,}41$ „
„	5.	$= 0{,}307$,	$= 4{,}18$ „ ,	$= 6{,}19$ „
„	6.	$= 0{,}319$,	$= 3{,}98$ „ ,	$= 6{,}13$ „
„	11.	$= 0{,}306$,	$= 3{,}99$ „ ,	$= 6{,}18$ „
„	12.	$= 0{,}304$,	$= 4{,}02$ „ ,	$= 6{,}18$ „

Wegen der Schwierigkeit, reine Drillungsschwingungen hervorzubringen sind die Stäbchen, deren Dicke kleiner als 1 mm war, diesen Beobachtungen gar nicht unterworfen worden. Um die Schwingungsdauer in weiteren Grenzen zu verändern, wurde bei den folgenden Beobachtungen der Verstärkungsring vom Drillungsapparat entfernt.

Nr.	1.	$T = 0{,}330$,	$l_\gamma = 3{,}50 . 10^{-4}$,	$\alpha_\gamma = 5{,}86 . 10^{-6}$
„	5.	$= 0{,}260$,	$= 4{,}30$ „ ,	$= 5{,}63$ „
„	6.	$= 0{,}264$,	$= 4{,}36$ „ ,	$= 5{,}83$ „

Im Mittel entsprechen einander

$T =$	0,405	0,312	0,262
$l_\gamma . 10^{+4} =$	3,08	3,92	4,33
α_γ „ $=$	6,33	6,16	5,73

Es ist also zwar jedenfalls l_γ stark von T abhängig, aber auch α_γ ändert sich mit T; die einfachen Formeln der inneren Reibung stellen daher die Erscheinung nicht befriedigend dar.

Fasst man sie als eine Superposition von innerer Reibung und elastischer Nachwirkung auf, so gelangt man zu der Formel

$$\alpha = \frac{l^0\, T}{2\,\pi^2} + \alpha^0 \tag{21}$$

worin l^0 den Antheil bezeichnet, den die elastische Nachwirkung zu dem logarithmischen Decrement liefert und α^0 die von dem Einfluss der Nachwirkung befreite Dämpfungsconstante ist.

Man findet aus Obigem für Bronze

$$\alpha_\gamma{}^0 = 4{,}70 \,.\, 10^{-6}, \; l_\gamma{}^0 = 0{,}829 \,.\, 10^{-4}.$$

Diese Zahlen sind naturgemäss als mit Hülfe einer Hypothese berechnet, wenig sicher.

Messing.

Biegung.

Nr.	1.	$T = 0{,}726$,	$l_\beta = 6{,}74 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\beta = 26{,}7 \,.\, 10^{-6}$
„	2.	$T = 0{,}721$,	$l_\beta = 7{,}16 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\beta = 26{,}1 \,.\, 10^{-6}$
„	3.	$T = 0{,}751$,	$l_\beta = 6{,}44 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\beta = 24{,}5 \,.\, 10^{-6}$
„	4.	$T = 0{,}732$,	$l_\beta = 6{,}62 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\beta = 24{,}6 \,.\, 10^{-6}$
„	5.	$T = 0{,}822$,	$l_\beta = 5{,}65 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\beta = 23{,}5 \,.\, 10^{-6}$
„	6.	$T = 0{,}844$,	$l_\beta = 5{,}91 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\beta = 25{,}3 \,.\, 10^{-6}$
„	7.	$T = 0{,}578$,	$l_\beta = 8{,}43 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\beta = 24{,}7 \,.\, 10^{-6}$
„	8.	$T = 0{,}592$,	$l_\beta = 7{,}13 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\beta = 21{,}4 \,.\, 10^{-6}$

Im Mittel entspricht sich

$T =$	0,833	0,732	0,585
$l_\beta \,.\, 10^{+4} =$	5,78	6,74	7,78
$\alpha_\beta \,.\, 10^{+6} =$	24,4	25,0	23,0

l_β wächst stark, während α_β mehr constant ist;

$$\alpha_\beta = 23{,}8 \,.\, 10^{-6}$$

kann als die erste Dämpfungsconstante für Messing angesehen werden.

Messing.

Drillung.

Nr.	1.	$T = 0{,}438$,	$l_\gamma = 3{,}09 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\gamma = 6{,}85 \,.\, 10^{-6}$
„	5.	$T = 0{,}441$,	$l_\gamma = 3{,}11 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\gamma = 6{,}94 \,.\, 10^{-6}$
„	7.	$T = 0{,}305$,	$l_\gamma = 3{,}47 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\gamma = 5{,}36 \,.\, 10^{-6}$
„	8.	$T = 0{,}318$,	$l_\gamma = 3{,}33 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\gamma = 5{,}36 \,.\, 10^{-6}$

Ferner ohne Verstärkungsring

Nr.	7.	$T = 0{,}253$,	$l_\gamma = 3{,}75 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\gamma = 4{,}81 \,.\, 10^{-6}$
„	8.	$T = 0{,}265$,	$l_\gamma = 3{,}79 \,.\, 10^{-4}$,	$\alpha_\gamma = 5{,}07 \,.\, 10^{-6}$ (?)

Unter Ausschluss der letzten verdächtigen Reihe findet sich im Mittel

$T =$	0,440	0,311	0,253
$l_\gamma \,.\, 10^{+4} =$	3,10	3,40	3,71
$\alpha^\gamma \,.\, 10^{-6} =$	6,89	5,36	4,81

Das Verhalten ist ähnlich, wie bei Bronze. Nach Formel (21) berechnet liefern diese Zahlen

$$\alpha_\gamma{}^0 = 1{,}97 \,.\, 10^{-6},\ l_\gamma{}^0 = 2{,}195 \,.\, 10^{-4}.$$

Kupfer.

Biegung.

Nr. 1. $T = 0{,}711,\ l_\beta = 7{,}44 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\beta = 26{,}8 \,.\, 10^{-6}$
„ 2. $T = 0{,}709,\ l_\beta = 7{,}54 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\beta = 27{,}1 \,.\, 10^{-6}$
„ 3. $T = 0{,}708,\ l_\beta = 7{,}58 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\beta = 27{,}2 \,.\, 10^{-6}$
„ 4. $T = 0{,}734,\ l_\beta = 6{,}06 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\beta = 22{,}6 \,.\, 10^{-6}$
„ 5. $T = 0{,}532,\ l_\beta = 10{,}39 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\beta = 28{,}0 \,.\, 10^{-6}$
„ 6. $T = 0{,}517,\ l_\beta = 9{,}99 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\beta = 26{,}2 \,.\, 10^{-6}$

Das Stäbchen Nr. 4 ist vielleicht bei der Bearbeitung zufällig etwas stärker in Anspruch genommen worden, als die übrigen, und zeigt daher eine zu kleine Dämpfung; im Uebrigen ist α_β so nahe constant, dass das Mittel aus allen Zahlen

$$\alpha_\beta = 26{,}2 \,.\, 10^{-6}$$

als ein nahe richtiger Werth gelten kann.

Kupfer.

Drillung.

Nr. 1. $T = 0{,}381,\ l_\gamma = 4{,}19 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\gamma = 8{,}09 \,.\, 10^{-6}$
„ 3. $T = 0{,}373,\ l_\gamma = 4{,}21 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\gamma = 7{,}95 \,.\, 10^{-6}$
„ 4. $T = 0{,}390,\ l_\gamma = 4{,}20 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\gamma = 8{,}31 \,.\, 10^{-6}$
„ 5. $T = 0{,}274,\ l_\gamma = 6{,}27 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\gamma = 8{,}25 \,.\, 10^{-6}$
„ 6. $T = 0{,}268,\ l_\gamma = 6{,}46 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\gamma = 8{,}77 \,.\, 10^{-6}$

Ohne Verstärkungsring

Nr. 6. $T = 0{,}225,\ l_\gamma = 7{,}18 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\gamma = 8{,}11 \,.\, 10^{-6}.$

Hier ist auch α_γ nahe von der Schwingungsdauer unabhängig; das Mittel gibt

$$\alpha_\gamma = 8{,}18 \,.\, 10^{-6}.$$

l_γ variirt bei Biegung und Drilling sehr stark mit T.

Nickel.

Biegung.

Nr. 1. $T = 0{,}553,\ l_\beta = 17{,}1 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\beta = 48{,}1 \,.\, 10^{-6}$
„ 2. $T = 0{,}548,\ l_\beta = 17{,}9 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\beta = 49{,}7 \,.\, 10^{-6}$
„ 3. $T = 0{,}551,\ l_\beta = 18{,}8 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\beta = 52{,}6 \,.\, 10^{-6}$
„ 4. $T = 0{,}540,\ l_\beta = 17{,}0 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\beta = 46{,}5 \,.\, 10^{-6}$
„ 5. $T = 0{,}375,\ l_\beta = 27{,}1 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\beta = 51{,}5 \,.\, 10^{-6}$
„ 6. $T = 0{,}376,\ l_\beta = 26{,}2 \,.\, 10^{-4},\ \alpha_\beta = 49{,}9 \,.\, 10^{-6}$

α_β zeigt sich nahe constant; im Mittel ist[1])

$$\alpha_\beta = 49{,}7 . 10^{-6}.$$

Nickel.

Drillung.

Nr. 1. $T = 0{,}310$, $l_\gamma = 10{,}8 . 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 16{,}9 . 10^{-6}$
„ 2. $T = 0{,}308$, $l_\gamma = 11{,}8 . 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 18{,}4 . 10^{-6}$
„ 3. $T = 0{,}310$, $l_\gamma = 11{,}3 . 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 17{,}8 . 10^{-6}$
„ 4. $T = 0{,}306$, $l_\gamma = 9{,}6 . 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 14{,}9 . 10^{-6}$
„ 5. $T = 0{,}214$, $l_\gamma = 14{,}4 . 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 15{,}6 . 10^{-6}$
„ 6. $T = 0{,}217$, $l_\gamma = 13{,}9 . 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 15{,}2 . 10^{-6}$

Ohne Verstärkungsring:

Nr. 5. $T = 0{,}178$, $l_\gamma = 16{,}6 . 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 15{,}0 . 10^{-6}$
„ 6. $T = 0{,}179$, $l_\gamma = 18{,}5 . 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 16{,}8 . 10^{-6}$

Der Verlauf von α_γ zeigt keine regelmässige Zu- oder Abnahme mit T; das Mittel

$$\alpha_\gamma = 16{,}3 . 10^{-6}$$

wird daher der angenäherte richtige Werth der zweiten Dämpfungsconstante sein.

Kupfer und Nickel scheinen nach dieser Zusammenstellung den einfachen Gesetzen der inneren Reibung nahezu zu folgen.

Man kann daher aus den für sie gefundenen Dämpfungsconstanten α_β und α_γ die Reibungsmoduln und Reibungsconstanten wirklich berechnen. Hierzu sind die Elasticitätsmoduln dieser Substanzen nöthig; eigens zu ihrer Bestimmung angestellte Beobachtungen haben in absolutem Maasse ergeben:

für Kupfer:

$$s = 0{,}934 . 10^{-12}, s_2 = 2{,}195 . 10^{-12}, s_1 = -0{,}163 . 10^{-12},$$

für Nickel

$$s = 0{,}499 . 10^{-12}, s_2 = 1{,}300 . 10^{-12}, s_1 = -0{,}151 . 10^{-12}.$$

Nun folgt durch Combination von (16) und (17)

$$\alpha_\beta = \frac{n}{s} = \frac{2a_2}{s}(s^2 + 2\,s_1^{\,2}) + \frac{a_1}{s}(s + 2\,s_1)^2,$$

$$\alpha_\gamma = \frac{n_2}{s_2} = a_2\,s_2$$

und hieraus lässt sich leicht berechnen:

---

1) In der Originalabhandlung steht durch ein Versehen 59,4.

für Kupfer:

$n = 24{,}3 \,.\, 10^{-18}$, $n_2 = 17{,}9 \,.\, 10^{-18}$ also $n_1 = 15{,}3 \,.\, 10^{-18}$.
$a_1 = 47{,}3 \,.\, 10^6$, $a_2 = 3{,}73 \,.\, 10^6$, also $a = 54{,}8 \,.\, 10^6$;

für Nickel[1]):

$n = 24{,}8 \,.\, 10^{-18}$. $n_2 = 21{,}2 \,.\, 10^{-8}$ also $n_1 = 14{,}2 \,.\, 10^{-18}$,
$a_1 = 448 \,.\, 10^6$, $a_2 = 12{,}5 \,.\, 10^6$, also $a = 473 \,.\, 10^6$.

Die Constanten a und a_1, welche nach (1) und (15) in den Ausdrücken für die *normalen* Druckcomponenten auftreten, erweisen sich als viel grösser wie a_2, mit welchem die Werthe der tangentialen Componenten proportional sind.

Was die absoluten Werthe angeht, so bestimmen die Beobachtungen über innere Reibung in tropfbaren Flüssigkeiten nur die Constante a_2, da wegen der Incompressibilität die normalen Componenten zum Theil unwirksam werden. Diese Constante findet sich bei Wasser in denselben absoluten Einheiten gleich 0,012; der für Kupfer und Nickel gefundene Werth von a_2 und noch mehr von a und a_1 ist also enorm viel grösser.

Die vier Metalle Bronze, Messing, Kupfer, Nickel nehmen eine Ausnahmestellung ein, indem sie entweder für Biegung und Drillung, oder wenigstens für Biegung allein den einfachen Gesetzen der inneren Reibung nahezu folgen. Die übrigen von mir untersuchten von grösserer, zum Theil sehr grosser Dämpfung weichen in ihrem Verhalten sämmtlich mehr oder weniger hiervon ab; bei einigen ist nicht die Dämpfungsconstante a sondern das corrigirte logarithmische Decrement l von der Schwingungsdauer nahezu unabhängig, wie dies die Boltzmann'sche Theorie der elastischen Nachwirkung verlangt, bei anderen wächst l und a mit wachsender Schwingungsdauer, sodass die Erscheinung auch nicht durch Zusammenwirkung von Reibung und Nachwirkung erklärt werden kann. Für diese habe ich die Dämpfungsconstante unten gar nicht mitgetheilt, da sie keine Bedeutung besitzt.

1) Diese Werthe sind gegenüber den in der Originalabhandlung gegebenen zum Theil berichtigt.

Gussstahl.

Biegung.

Nr. 1. $T = 0{,}722$, $l_\beta = 21{,}0 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\beta = 76{,}1 \,.\, 10^{-6}$
„ 2. $T = 0{,}721$, $l_\beta = 21{,}4 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\beta = 76{,}1 \,.\, 10^{-6}$
„ 3. $T = 0{,}724$, $l_\beta = 21{,}2 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\beta = 77{,}8 \,.\, 10^{-6}$
„ 4. $T = 0{,}713$, $l_\beta = 21{,}5 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\beta = 77{,}7 \,.\, 10^{-6}$
„ 5. $T = 0{,}508$, $l_\beta = 24{,}0 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\beta = 61{,}7 \,.\, 10^{-6}$
„ 6. $T = 0{,}518$, $l_\beta = 23{,}8 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\beta = 62{,}4 \,.\, 10^{-6}$

Im. Mittel entspricht sich

$$T = 0{,}513 \quad 0{,}720$$
$$l_\beta\, 10^{+4} = 23{,}9 \quad 21{,}3$$
$$\alpha_\beta\, 10^{+6} = 62{,}0 \quad 77{,}0$$

Drillung.

Nr. 1. $T = 0{,}397$, $l_\gamma = 20{,}61 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 41{,}4 \,.\, 10^{-6}$
„ 2. $T = 0{,}402$, $l_\gamma = 20{,}37 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 41{,}5 \,.\, 10^{-6}$
„ 6. $T = 0{,}292$, $l_\gamma = 19{,}33 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 28{,}6 \,.\, 10^{-6}$
„ 5. $T = 0{,}235$, $l_\gamma = 18{,}11 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 21{,}6 \,.\, 10^{-6}$

Letzteres ohne Verstärkungsring. Im Mittel:

$$T = 0{,}235 \quad 0{,}292 \quad 0{,}400$$
$$l_s \,.\, 10^{+4} = 21{,}6 \quad 28{,}6 \quad 41{,}4$$
$$\alpha'_\nu \,.\, 10^{+6} = 18{,}11 \quad 19{,}33 \quad 20{,}49$$

Aluminium.

Biegung.

Nr. 2. $T = 0{,}934$, $l_\beta = 8{,}44 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\beta = 39{,}9 \,.\, 10^{-6}$
„ 3. $T = 0{,}956$, $l_\beta = 7{,}96 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\beta = 38{,}6 \,.\, 10^{-6}$
„ 5. $T = 0{,}684$, $l_\beta = 7{,}24 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\beta = 25{,}1 \,.\, 10^{-6}$
„ 6. $T = 0{,}684$, $l_\beta = 7{,}42 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\beta = 25{,}7 \,.\, 10^{-6}$

Im Mittel

$$T = 0{,}684 \quad 0{,}945$$
$$l_\beta \,.\, 10^{+4} = 7{,}33 \quad 8{,}20$$
$$\alpha_\beta \,.\, 10^{+6} = 25{,}4 \quad 39{,}3.$$

Drillung.

Nr. 2. $T = 0{,}520$, $l_\gamma = 6{,}39 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 16{,}8 \,.\, 10^{-6}$
„ 4. $T = 0{,}542$, $l_\gamma = 5{,}66 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 15{,}6 \,.\, 10^{-6}$
„ 5. $T = 0{,}387$, $l_\gamma = 6{,}00 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 11{,}75 \,.\, 10^{-6}$
„ 6. $T = 0{,}387$, $l_\gamma = 6{,}49 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 12{,}72 \,.\, 10^{-6}$

Ferner ohne Verstärkungsring:

Nr. 5. $T = 0{,}321$, $l_\gamma = 6{,}00 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 9{,}76 \,.\, 10^{-6}$
„ 6. $T = 0{,}320$, $l_\gamma = 6{,}44 \,.\, 10^{-4}$, $\alpha_\gamma = 10{,}43 \,.\, 10^{-6}$

Im Mittel:

$T =$	0,320	0,387	0,521
$l_\gamma \, . \, 10^{+4} =$	6,22	6,25	6,03
$\alpha_\gamma \, . \, 10^{+6} =$	10,10	12,24	16,2.

l_γ ist hier anscheinend von T nahezu unabhängig.

Gusseisen.

Biegung.

Nr. 2. $T = 0{,}661$, $l_\beta = 208 \, . \, 10^{-4}$
„ 3. $T = 0{,}641$, $l_\beta = 211 \, . \, 10^{-4}$
„ 5. $T = 0{,}480$, $l_\beta = 168 \, . \, 10^{-4}$
„ 6. $T = 0{,}483$, $l_\beta = 163 \, . \, 10^{-4}$

Drillung.

Nr. 2. $T = 0{,}363$, $l_\gamma = 131 \, . \, 10^{-4}$
„ 3. $T = 0{,}355$, $l_\gamma = 150 \, . \, 10^{-4}$
„ 5. $T = 0{,}269$, $l_\gamma = 105 \, . \, 10^{-4}$
„ 6. $T = 0{,}269$, $l_\gamma = 97 \, . \, 10^{-4}$

Cadmium.

Biegung.

Nr. 1. $T = 0{,}892$, $l_\beta = 252 \, . \, 10^{-4}$
„ 2. $T = 0{,}901$, $l_\beta = 238 \, . \, 10^{-4}$
„ 3. $T = 0{,}908$, $l_\beta = 257 \, . \, 10^{-4}$
„ 4. $T = 0{,}921$, $l_\beta = 249 \, . \, 10^{-4}$
„ 5. $T = 1{,}208$, $l_\beta = 259 \, . \, 10^{-4}$
„ 6. $T = 1{,}220$, $l_\beta = 262 \, . \, 10^{-4}$

Drillung.

Nr. 2. $T = 0{,}545$, $l_\gamma = 308 \, . \, 10^{-4}$
„ 6. $T = 0{,}715$, $l_\gamma = 311 \, . \, 10^{-4}$

Hier scheint bei Biegung und Drillung l nahezu constant zu sein, wie dies die Boltzmann'sche Theorie der elastischen Nachwirkung fordert.

Dies sind die Metalle, bei denen ich den Einfluss der Dimensionen und dadurch der Schwingungsdauer auf die Werthe des logarithmischen Decrementes ausführlicher untersucht habe. Bei Zinn und Silber war es nicht möglich, befriedigend übereinstimmende Zahlen zu erhalten, wahrscheinlich weil diese Substanzen durch die Bearbeitung sehr stark beeinflusst werden. Hier, wie bei Magnesium, Zink und Wismuth will ich nur die logarithmischen Decremente angeben, die ich für Stäbe von beiläufig 1 mm Dicke, 6 mm Breite und

100 mm Länge erhalten habe und will diesen Zahlen, um eine Uebersicht eines Theiles meiner Resultate zu ermöglichen, diejenigen Werthe beifügen, die in den vorstehenden ausführlicheren Beobachtungstafeln sich auf Stäbe der gleichen Dimensionen beziehen. Ordnet man sie nach ihrer Grösse, so erhält man die folgenden Reihen, in welchen der Kürze halber *St*, *Bo* und *Me* für Gussstahl, Bronze und Messing gesetzt ist.

Logarithmische Decremente.

$l_\beta \cdot 10^4$		$l_\gamma \cdot 10^4$	
Me	6,74	Bo	3,08
Cu	7,15	Me	3,10
Al	8,20	Cu	4,20
Bo	10,06	Al	6,03
Ni	17,7	Ni	10,9
St	23,9	Ag	16,5(?)
Ag	38 (?)	St	19,3
Zn	60,5	Zn	58,1
Mg	69	Mg	65 (?)
Sn	129	Sn	110
Bi	160	Te	140
Te	210	Bi	150
Cd	252	Cd	308

Betont mag nochmals werden, dass die Zahlen an sehr wahrscheinlich isotropem Material, nämlich an Stäben, die aus gegossenen und im Uebrigen unbearbeiteten Blöcken geschnitten sind, erhalten wurden.

Die Resultate der vorstehend beschriebenen Beobachtungen sind etwa folgende.

Von den untersuchten Metallen befolgen innerhalb des Umfanges, in dem sich die Umstände variiren liessen, *Kupfer* und *Nickel* nahezu die Gesetze, welche im Eingang aus dem für die innere Reibung fester Körper gemachten Ansatz gefolgert sind. *Messing* und *Bronze* gehorchen ihnen bei Biegungsschwingungen, nicht aber bei Drillungsschwingungen; die Erscheinungen, welche sie bei letzteren zeigen, lassen sich als eine Superposition der Wirkung von innerer Reibung und elastischer Nachwirkung — letztere nach dem Boltzmann'schen Ansatz behandelt — auffassen. Cadmium liefert logarithmische Decremente, die nahezu von der Schwingungsdauer unabhängig sind und bietet demgemäss das Beispiel einer bei

Biegung und Drillung mit den Boltzmann'schen Formeln übereinstimmenden Substanz. Von den übrigen Metallen haben die meisten logarithmische Decremente ergeben, welche mit wachsender Schwingungsdauer selbst wachsen und demgemäss mit beiden Theorien unvereinbar sind.

Hieraus folgt, dass für die Beschreibung der Gesammtheit der beobachteten Erscheinungen man auch mit der Superposition der Wirkung von innerer Reibung und Nachwirkung nicht ausreicht, sondern man den allgemeineren Maxwell'schen Ansatz benutzen müssen wird, der die Druckcomponenten durch Reihen darstellt, die nach steigenden Differentialquotienten der Deformationsgrössen nach der Zeit fortschreiten. Dieselben stellen sich als eine Erweiterung der an die Spitze dieser Mittheilung gestellten Formeln (1) dar. Zu ihrer Anwendung schien indessen das vorliegende Beobachtungsmaterial nicht umfangreich genug.

Schliesslich sei noch auf eine merkwürdige Folgerung aus den gefundenen Zahlen hingewiesen. Gleichviel ob die betrachteten Substanzen den Gesetzen der inneren Reibung oder der elastischen Nachwirkung folgen, jederzeit ergibt sich aus ihnen, dass diejenigen Constanten, welche die normalen Druckcomponenten A_x, B_y, C_z messen, viel grösser sind als diejenigen, mit welchen die tangentialen B_z, C_x, A_y proportional sind. Daraus folgt aber unter anderem, dass bei allseitig gleicher Compression Reibung und Nachwirkung nicht nur nicht verschwindend, sondern umgekehrt äusserst gross sind. Es dürfte dieses Resultat gegen diejenigen Theorien sprechen, welche versuchen, diese Wirkungen aus einer Drehung der Moleküle der ponderabeln Substanzen zu erklären; denn bei allseitig gleichem Drucke kann nach Symmetrie von einer Drehung der Moleküle nicht wohl die Rede sein.

Göttingen, Sept. 1892.