Nouveaux Théorèmes relatifs aux Secteurs dans l'espace.

Par M. Louis Oppermann.

Dans le Journal de Mathématiques de Copenhague (Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af C. Tychsen), année 1865 p. 109 Mr. Zeuthen a demandé la démonstration de ce théorème remarquable :

Les secteurs dans l'espace à base commune et de volumes égaux, ont leurs sommets situés dans un même plan.

Le théorème ainsi énoncé n'est pas complet, en tant qu'il y manque la définition du plan, qui est lieu des sommets en question. Avant de connaître la manière, de laquelle Mr. Zeuthen a trouvé le théorème, sans être conduit cependant à la définition du plan; j'ai réussi à démontrer le théorème et à le compléter.

Une courbe quelconque pouvant être regardée comme la limite d'un polygone ayant ses sommets sur la courbe, nous pouvons nous borner au cas d'une base quelconque à périmètre rectiligne.

Désignons par $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ les sommets de ce périmètre et par S et S' les sommets de deux secteurs, dont les volumes soient V et V' . La différence de ces volumes dépendra de la situation relative de la base et des points S et S' . Pour trouver la loi de cette dépendance imaginons un système de coordonnées orthogonales, dont l'origine soit au point S et dont l'axe des x passe par S' ; les coordonnées des points $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$

seront désignées par $\dots \begin{cases} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \end{cases}$

et leurs projections sur le plan des xy par $B_1 B_2 B_3 \dots B_n$; la distance de S à S' sera désignée par d .

$$T_h = \frac{1}{2} (x_{h+1} y_h - x_h y_{h+1})$$

$$T'_h = \frac{1}{2} [(x_{h+1} - d) y_h - (x_h - d) y_{h+1}] = \frac{1}{2} (x_{h+1} y_h - x_h y_{h+1}) - \frac{d}{2} (y_h - y_{h+1})$$

$$T_h - T'_h = \frac{d}{2} (y_h - y_{h+1})$$

$$P_h - P'_h = \frac{d}{6} (z_h + z_{h+1}) (y_h - y_{h+1}) = \frac{d}{6} (y_h z_h - y_{h+1} z_{h+1} + y_h z_{h+1} - y_{h+1} z_h).$$

Quand on a égard aux signes des coordonnées, ces formules donneront non seulement les valeurs des aires et des volumes, mais aussi leurs signes, de manière qu'on aura généralement :

Pour éliminer la base commune des secteurs, nous n'aurons pas comparer directement les volumes V et V' , mais le ferons moyennant le solide prismatique, qui est compris entre la base des deux secteurs et sa projection sur le plan des xy , et dont le volume sera désigné par C . Car la différence $C - V$ (ou $C - V'$) est composée des prismes triangulaires tronqués, qui sont compris entre les faces latérales du secteur et leurs projections sur le plan des xy ; et les volumes de ces prismes tronqués s'expriment très facilement par les coordonnées nommées ci-dessus.

Par $T_1 T_2 \dots T_n$ nous désignerons les triangles $SB_1 B_2, SB_2 B_3 \dots SB_n B_1$, qui sont les projections des triangles $SA_1 A_2, SA_2 A_3 \dots SA_n A_1$, et par $P_1 P_2 \dots P_n$ les volumes des prismes tronqués, qui sont compris entre les triangles correspondants.

Par $T'_1 T'_2 \dots T'_n$ et $P'_1 P'_2 \dots P'_n$ nous désignerons les mêmes choses par rapport au secteur, dont le sommet est en S' .

Les prismes P_h et P'_h ayant l'un et l'autre les hauteurs z_h, z_{h+1} et 0, on aura

$$P_h = \frac{1}{3} (z_h + z_{h+1}) T_h$$

$$P'_h = \frac{1}{3} (z_h + z_{h+1}) T'_h$$

$$P_h - P'_h = \frac{1}{3} (z_h + z_{h+1}) (T_h - T'_h).$$

Nous supposons, que les sommets $B_1 B_2 B_3 \dots B_n$ soient numérotés dans le même sens, dans lequel il faut faire tourner l'axe des x pour que sa partie positive, après avoir décrit un angle droit, coïncide avec la partie positive de l'axe des y ; alors on aura

$$\text{l'aire } B_1 B_2 B_3 \dots B_n = \Sigma (T_h) = \Sigma (T'_h) = \frac{1}{2} \Sigma (x_{h+1} y_h - x_h y_{h+1})$$

$$C - V = \Sigma (P_h)$$

$$C - V' = \Sigma (P'_h)$$

$$\text{et partant } V' - V = \Sigma (P_h - P'_h) = \frac{d}{6} \Sigma (y_h z_{h+1} - y_{h+1} z_h).$$

L'aire de la projection du polygone $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ sur le plan des yz (ou sur un plan normal à la droite SS') est, au signe près, égale à $\frac{1}{2} \Sigma (y_h z_{h+1} - y_{h+1} z_h)$; la dernière formule entraîne donc ce théorème fondamental:

Si deux secteurs dans l'espace ont la même base, la différence entre leurs volumes est égale à une pyramide, dont la hauteur est égale à la distance entre les sommets des secteurs, et dont la base a la même aire, que la projection du périmètre de la base des secteurs sur un plan normal à la droite menée par leurs sommets,

ou bien: cette différence est égale au volume contenu entre deux surfaces coniques, qui ont les mêmes sommets que les secteurs, et dont la directrice commune est la projection du périmètre de la base des secteurs sur un plan normal à la droite menée par leurs sommets.

De ce théorème on conclut d'abord:

1°. Si deux secteurs dans l'espace et sur une base commune ont le même volume, la projection du périmètre de leur base sur un plan normal à la droite menée par leurs sommets aura l'aire nulle.

2°. Si la projection du périmètre d'une surface quelconque limitée, sur un plan donné, a l'aire nulle, les secteurs dans l'espace, qui ont la dite surface pour base commune, et dont les sommets sont situés sur une même droite normale au dit plan, ont le même volume.

Et puis on conclut de ces deux théorèmes:

3°. Si l'on a deux plans qui se coupent, tellement situés par rapport à une surface limitée, que la projection du périmètre de la dite surface sur l'un quelconque de ces plans a l'aire nulle; tous les secteurs dans l'espace, qui ont la dite surface pour base commune, et dont les sommets sont situés sur un même plan normal aux plans de projection, ont le même volume.

De ce dernier théorème on conclut enfin, moyennant le théorème fondamental, que:

Tous les secteurs dans l'espace à base commune, dont les volumes sont égaux, ont leurs sommets situés sur un même plan, qui est normal à deux plans non parallèles, tellement situés par rapport à la base des secteurs, que la projection du périmètre de cette base sur l'un quelconque des dits plans a l'aire nulle.

Les théorèmes précédents s'énoncent plus simplement, si l'on adopte les deux définitions suivantes:

1°. Une droite est dite normale à un périmètre donné, quand elle est l'intersection de deux plans tellement situés, que la projection du périmètre sur l'un quelconque de ces plans a l'aire nulle.

2°. Un plan est dit parallèle à un périmètre donné, quand il est perpendiculaire à une droite, normale au périmètre.

On a supposé, dans les considérations précédentes, pour base des secteurs, une surface entièrement arbitraire; il sera bon, cependant, d'ajouter que la surface non-conique, dans les différents secteurs, doit être considérée toujours de la même manière.

Les normales à un périmètre et les plans parallèles à un périmètre donné, me paraissent se présenter dans plusieurs considérations générales, et ouvrir un accès vers des questions difficiles sur les polygones gauches et les courbes à double courbure. Je me bornerai à ajouter comme exemples les corollaires suivants:

1°. La projection d'un périmètre gauche sur un plan parallèle est une figure à l'aire maxima.

2°. Si l'on projette une courbe à double courbure sur le plan parallèle, et qu'ensuite on projette la courbe même et sa projection sur un plan pris arbitrairement, les aires des deux figures projectives sont égales entr'elles.

Mr. Zeuthen ayant bien voulu me permettre de publier sa démonstration du théorème qu'on lui doit, je profite de cette permission pour compléter mon article en ajoutant cette démonstration:

„Il suffit de prouver le théorème dans le cas où la base „se compose de polygones plans.“

Soit p_m l'aire d'un polygone quelconque de la base. En désignant par x, y, z les coordonnées orthogonales d'un point quelconque S , on aura pour sa distance au plan du polygone p_m une expression de la forme:

$$a_m \cdot x + b_m \cdot y + c_m \cdot z + d_m.$$

Le volume de la pyramide qui a pour sommet S et pour base p_m , sera donc égal à

$$\frac{1}{3} p_m (a_m \cdot x + b_m \cdot y + c_m \cdot z + d_m).$$

Par conséquent le secteur polyédral composé des différentes pyramides qui résultent de la variation de l'indice m , aura le volume:

$$\frac{1}{3} \Sigma (p_m \cdot a_m) \cdot x + \frac{1}{3} \Sigma (p_m \cdot b_m) \cdot y + \frac{1}{3} \Sigma (p_m \cdot c_m) \cdot z + \frac{1}{3} \Sigma (p_m \cdot d_m).$$

Tout que cette quantité reste constante, le sommet (x, y, z) restera dans un même plan. Donc etc.

Copenhague, 1866 Jan. 4. *Louis Oppermann.*