Ueber die Integration der vollständigen Differentiale.

Von

G. MORERA in Pavia.

Mayer hat das für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung höchst wichtige Theorem gefunden, dass „die Integration eines unbeschränkt integrablen Systems von linearen totalen Differentialgleichungen auf die Integration eines Systems von ebenso viel gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden kann“.*)

In dieser Abhandlung versuche ich den wahren Grund dieses Ergebnisses streng zu entwickeln, wodurch dasselbe in ein helleres Licht gestellt wird.

Dabei habe ich Methoden verwerthet, welche von Riemann herühren und namentlich von Lipschitz weiter verfolgt worden sind.**)

Beweis einer fundamentalen Integralformel.

Es seien

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

n solche reellwerthige Functionen der unabhängigen reellen Veränderlichen

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

welche in einem einfach zusammenhängenden n -dimensionalen Grössengebiet der x , welches der Kürze halber das *Monodromiegebiet* genannt werden möge, *überall eindeutig und stetig bleiben und erste Differentialquotienten besitzen****)

Im Monodromiegebiete denken wir uns ein stetiges zweifach ausgedehntes Grössengebiet, oder in geometrischer Sprachweise ein stetiges Flächenstück Σ .

In Σ können die x immer als eindeutige und stetige Functionen von zwei unabhängigen Veränderlichen p, q aufgefasst werden, und

*) Math. Annalen, Bd. V, S. 448.

**) Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, Bd. II (Bonn 1880).

***) Für diese beiden Differentialquotienten wird nur die Integrirbarkeit vorausgesetzt.

man kann dabei annehmen, dass die Differentialquotienten $\frac{\partial x_i}{\partial p}$, $\frac{\partial x_i}{\partial q}$, $\frac{\partial^2 x_i}{\partial p \partial q}$ existiren.

Fasst man dann Σ als ein gewöhnliches Flächenstück auf, so sind die p, q bekanntlich die krummlinigen Coordinaten der Punkte der Oberfläche Σ , und man kann auf derselben ebenso von den Linien p und q ($q = \text{const.}$, $p = \text{const.}$) sprechen, wie man in einer Ebene, deren Punkte auf ein Cartesisches Axensystem bezogen sind, von den Geraden x und y ($y = \text{const.}$, $x = \text{const.}$) spricht. Wenn nun P und Q auf Σ eindeutige und stetige Functionen von p und q sind und daselbst *integrirbare* partielle Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial q}$, $\frac{\partial Q}{\partial p}$ besitzen, so hat man bekanntlich

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p} \right) dp dq = - \int (P dp + Q dq),$$

wo rechts die Integration auf den ganzen Rand von Σ zu erstrecken ist.

Man hat dabei diesen Rand in demselben Sinne zu durchlaufen, in welchem man den Rand eines unendlich kleinen Vierecks durchläuft, dessen aufeinanderfolgende Ecken sind:

$$(p, q), (p + dp, q), (p + dp, q + dq), (p, q + dq);$$

die Differentiale dp und dq werden als positiv vorausgesetzt.

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} P &= \sum_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial p}, \\ Q &= \sum_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial q}, \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

so dass also wird

$$\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p} = \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial p} & \frac{\partial x_i}{\partial q} \\ \frac{\partial x_k}{\partial p} & \frac{\partial x_k}{\partial q} \end{vmatrix}.$$

Die oben angeführte Formel bleibt auch für die gemachte Annahme gültig, so dass wir erhalten:

$$\iint_{\Sigma} \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial p} & \frac{\partial x_i}{\partial q} \\ \frac{\partial x_k}{\partial p} & \frac{\partial x_k}{\partial q} \end{vmatrix} dp dq = - \int \sum_i X_i dx_i.$$

Für $n = 3$ stimmt diese allgemeine Formel mit einer wohlbekannten der mathematischen Physik überein.

Der Differentialausdruck unter dem doppelten Integralzeichen ist die sogenannte *bilineare Covariante* des Differentialausdrucks $\sum_i X_i dx_i$, welche in der Behandlung des *Pfaff'schen Problems* eine fundamentale Rolle spielt.

Die beschränkenden Bedingungen, unter welchen der vorige Integralsatz aufgestellt ist, können zum Theil aufgehoben werden, wenn man solche Unstetigkeiten im Monodromiegebiet zulässt, welche die Gültigkeit der zu Grunde gelegten Integralformel nicht beeinträchtigen*).

Aber auf solche Einzelheiten werde ich hier nicht weiter eingehen.

Theorie der vollständigen Differentiale.

Die oben bewiesene Formel bildet den wahren Kernpunkt einer ebenso strengen wie einfachen Theorie der totalen Differentiale**).

In der That, wenn die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

überall im Monodromiegebiete erfüllt sind, schliesst man bei geeigneter Wahl des Flächenstücks Σ :

Das Integral

$$\int \sum_i X_i dx_i$$

verschwindet jederzeit, wenn es längs einer in sich zurücklaufenden Linie des Monodromiegebietes erstreckt wird.

Nun nehmen wir im Monodromiegebiete zwei Werthsysteme

$$\begin{aligned} x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \\ x_1^{(1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \end{aligned}$$

und denken uns auf irgend eine Weise innerhalb des Monodromiegebietes eine stetige Werthfolge zwischen den beiden Werthsystemen $x_i^{(0)}, x_i^{(1)}$ ausgewählt, dann ist der Werth des längs dieser Werthfolge erstreckten Integrals

$$\int_{x_i^{(0)}}^{x_i^{(1)}} \sum_i X_i dx_i$$

unabhängig von der getroffenen Auswahl, oder, in geometrischer Sprachweise ausgedrückt, unabhängig vom Integrationswege.

*) S. z. B. Riemann's Inauguraldissertation (Ges. math. Werke, S. 16).

**) Vgl. Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, Bd. II, S. 567 und ff.)

Wenn wir daher die $x_i^{(0)}$ als fest betrachten und die $x_i^{(1)}$ als veränderlich, so erfordert die Integration des vollständigen Differentials $\sum_i X_i dx_i$ nur die Integration von $\sum_i X_i dx_i$ längs eines im Monodromiegebiete willkürlich gewählten Weges, der von $x_i^{(0)}$ ausgeht und in $x_i^{(1)}$ endet, d. h. es ist nur nöthig nach einem einzigen veränderlichen Parameter zu integrieren.

Diesen ganz elementaren Sinn hat das erwähnte Theorem von Mayer für den in Rede stehenden Fall.

Nehmen wir z. B. an, dass die Werthfolge

$$(\alpha) \quad x_i = x_i^{(0)} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) t$$

für alle Werthe von t zwischen 0 und 1 im Monodromiegebiete liegt. Das gesuchte Integral hat dann den Werth

$$\int_0^1 \sum_i |X_i| (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) dt,$$

wobei mit $|X_i|$ derjenige Ausdruck bezeichnet ist, welcher aus X_i durch die Substitutionen (α) hervorgeht.

Man kann ohne Schwierigkeit diesen Satz auch direct nachweisen, falls die X_i als analytische Functionen der x_i gedacht werden.

Wir setzen

$$v = v(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) = \int_0^1 \sum_i |X_i| (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) dt.$$

Durch Differentiation erhalten wir:

$$\frac{\partial v}{\partial x_k^{(1)}} = \int_0^1 \left\{ \sum_i \left| \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right| (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) t + |X_k| \right\} dt.$$

Nun aber ist

$$\left| \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right| = \left| \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right|$$

und ausserdem

$$\frac{\partial |X_k|}{\partial t} = \sum_i \left| \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right| (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}).$$

In Folge dessen kommt:

$$\frac{\partial v}{\partial x_k^{(1)}} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (t |X_k|) dt = |X_k|_{t=1}$$

d. h.

$$= X_k(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Ist das Gebiet, innerhalb dessen die X_i eindeutig und stetig bleiben, mehrfach zusammenhängend, so kann man nach Riemanns Vorgang durch Legung von Querschnitten ein Monodromiegebiet herstellen. In diesem Falle besitzt das Integral Periodicitätsmoduln. Aber bei diesen hauptsächlich in der mathematischen Physik (für $n=3$) üblichen Betrachtungen kann ich mich hier nicht aufhalten.

Die unbeschränkt integralen Systeme von totalen Differentialgleichungen.

Es sei ein System von totalen Differentialgleichungen zur Integration vorgelegt

$$(\beta) \quad \begin{cases} dy_1 = \sum_{i=1}^n X_i^{(1)} dx_i, \\ dy_2 = \sum_{i=1}^n X_i^{(2)} dx_i, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ dy_m = \sum_{i=1}^n X_i^{(m)} dx_i, \end{cases}$$

wo die X_i solche reellwerthige Functionen der reellen x und y sind, welche den Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j^{(k)}}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial y_l} X_j^{(l)} - \frac{\partial X_j^{(k)}}{\partial y_l} X_i^{(l)} \right) = 0$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m)$$

Genüge leisten.

Ausserdem seien noch gewisse Anfangsbedingungen vorgeschrieben, nämlich dass für

$$x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \quad \dots, \quad x_n = x_n^{(0)}$$

werden soll:

$$y_1 = y_1^{(0)}, \quad y_2 = y_2^{(0)}, \quad \dots, \quad y_m = y_m^{(0)}.$$

Nach der vorangeschickten Auseinandersetzung über die Integration der *explicite* gegebenen vollständigen Differentiale kann das Problem aufgefasst werden, als eine gleichzeitige Ausführung von m gewöhnlichen Integrationen

$$\int_{x_i^{(0)}}^{\cdot} \sum_i X_i^{(k)} dx_i \quad (k=1, 2, \dots, m),$$

indem man von den Anfangswerthen ausgeht und die unter den Integralzeichen vorkommenden Unbekannten y nach und nach zugleich mit dem Fortschreiten der Integrationen bestimmt.

Diese Vorstellungsweise ist heutzutage bei der Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung sehr üblich, und auf ihr beruhen die Beweise für die Existenz der Integrale bei reellen Veränderlichen *).

Wäre ein n -dimensionales Werthgebiet der Veränderlichen x bekannt, wo alle durch die Integration bestimmten y durchweg eindeutig und stetig bleiben, ein Gebiet, welches ich als das *Monodromiegebiet* bezeichnen will, so würde man in demselben die y dadurch berechnen können, dass man die *implicite* gegebenen vollständigen Differentiale längs eines beliebigen Weges integrirt. Nach dieser Ueberlegung ist es einleuchtend, dass man die Integration der vorgelegten totalen Differentialgleichungen in unendlich vielen Weisen auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen im Monodromiegebiete zurückführen kann.

Diese Bemerkung giebt das angeführte *Mayer'sche Theorem* in seinem vollen Umfange.

Die Hauptfrage ist nun die nach der Bestimmung des Monodromiegebietes; in Betreff desselben werde ich den folgenden allgemeinen Satz beweisen.

Sind die Functionen $X_i^{(k)}$ durchweg eindeutig und stetig in einem $(n+m)$ -dimensionalen Werthgebiete der Veränderlichen x_i, y_k , wo die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial y_i}$$

überall endlich bleiben, und in welchem ausserdem das Anfangssystem $(x_i^{(0)}, y_k^{(0)})$ sich befindet, so definiren die totalen Differentialgleichungen (β) innerhalb eines gewissen einfach zusammenhängenden Werthgebietes m stetige und eindeutige Functionen y_k .

Eine definitive Abgrenzung des Monodromiegebietes kann desshalb nicht a priori angegeben werden, weil die Mannigfaltigkeiten, welche die Integrale darstellen, die Grenzen des genannten $(m+n)$ -dimensionalen Gebiets nicht überschreiten dürfen.

Denken wir uns irgend einen Weg, welcher im Gebiete der x vom Anfangspunkt $(x_i^{(0)})$ ausgeht, und leiten wir die Integration auf demselben hin. Dann sind die x_i als Functionen eines einzigen Para-

*) Lipschitz l. c. und „Erörterung der Möglichkeit ein gegebenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen vollständig zu integriren“, Bonn 1868. Eine italienische Uebersetzung davon befindet sich in „*Annali di matematica*“, serie 2^a, t. 2, p. 288.

meters aufzufassen und die totalen Differentialgleichungen (β) gehen daher in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen über. Aber bei unseren Voraussetzungen sind nach einem bekannten Satze diese Differentialgleichungen nur auf eine einzige Weise integrirbar, so lange die x und y die angegebenen Grenzen nicht überschreiten*).

Es bleibt also nur der Beweis durchzuführen, dass das Resultat der Integration in einem einfach zusammenhängenden Gebiete vom Integrationswege unabhängig ist.

Im Gebiete, wo die x_i die von unserem Satze vorgeschriebenen Grenzen nicht überschreiten, betrachten wir ein einfach zusammenhängendes Flächenstück Σ , welches den Anfangspunkt $x_i^{(0)}$ enthält.

Um die Punkte in Σ durch die Werthe von zwei unabhängigen Veränderlichen p, q eindeutig darzustellen, nehmen wir ein System von krummlinigen Coordinaten, welche den Charakter der gewöhnlichen Polarcoordinaten besitzen, und zwar so, dass die Linien $p(q = \text{const.})$ alle vom Anfangspunkte ausgehen und die Linien $q(p = \text{const.})$ um denselben herum in sich zurücklaufen**).

Dabei können wir annehmen, dass der Pol dem Werthe Null des Parameters p entspricht; dann ist

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial q} \right)_{p=0} = 0.$$

Wird nun die Integration längs solcher Integrationswege ausgeführt, welche in Σ liegen, so erfordert die Bestimmung der Functionen $y_1 \dots y_m$ die Integration der folgenden totalen Differentialgleichungen:

$$(\beta') \quad dy_k = P_k dp + Q_k dq, \\ (k=1, 2, 3, \dots, m),$$

wo

$$P_k = \sum_{i=1}^n X_i^{(k)} \frac{\partial x_i}{\partial p}, \\ Q_k = \sum_{i=1}^n X_i^{(k)} \frac{\partial x_i}{\partial q}$$

gesetzt ist.

Ausserdem erkennt man leicht, dass die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial P_k}{\partial q} - \frac{\partial Q_k}{\partial p} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial P_k}{\partial y_i} Q_i - \frac{\partial Q_k}{\partial y_i} P_i \right) = 0$$

*) S. die schon angeführte Arbeit von Herrn Lipschitz „Erörterung der Möglichkeiten“, oder auch die Abh. von Herrn Volterra „Sui principii del calcolo integrale.“ Giornale di matematiche, Vol. XIX.

**) S. Riemann — Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung — Ges. math. Werke, S. 283.

wegen der früheren befriedigt sind. Denken wir uns die Integration längs der Linien p ausgeführt, so werden in einem gewissen einfach zusammenhängenden Theil von Σ m endliche und eindeutige Functionen $y_1 \dots y_m$ bestimmt, welche den Gleichungen

$$\frac{\partial y_k}{\partial p} = P_k$$

genügen. Nun kann leicht gezeigt werden, dass diese Functionen wirklich den Differentialgleichungen (β') Genüge leisten und ausserdem, dass es sonst *keine anderen* Functionen giebt, welche dies thun.

Um dies zu beweisen setzen wir in den P und Q statt der y die eben gefundenen Functionen ein, was wir durch Einklammerung andeuten wollen. Aus den Integrabilitätsbedingungen ergibt sich dann:

$$\frac{\partial |P_k|}{\partial q} - \frac{\partial |Q_k|}{\partial p} = \sum_i \left| \frac{\partial P_k}{\partial y_i} \right| \left(\frac{\partial y_i}{\partial q} - |Q_i| \right)$$

und ausserdem aus der Definition der y :

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial y_k}{\partial q} = \frac{\partial |P_k|}{\partial q},$$

daher folgt

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial y_k}{\partial q} - |Q_k| \right) = \sum_i \left| \frac{\partial P_k}{\partial y_i} \right| \left(\frac{\partial y_i}{\partial q} - |Q_i| \right).$$

Also befriedigen die Functionen $\left(\frac{\partial y_k}{\partial q} - |Q_k| \right)$ m lineare Differentialgleichungen, welche ihrerseits, nach einem schon benutzten Satze, sobald die Anfangswerthe gegeben sind, diese Functionen auf eine unzweideutige Weise bestimmen. Nun ist im Pole

$$\left(\frac{\partial y_k}{\partial q} \right)_{p=0} = 0, \quad |Q_k|_{p=0} = 0,$$

folglich muss immer

$$\frac{\partial y_k}{\partial q} = |Q_k|$$

sein, d. h.

$$dy_k = |P_k| dp + |Q_k| dq = \sum_i |X_i^{(k)}| dx_i.$$

Wenn die Integration in Σ auf einem beliebigen Wege ausgeführt wird, so sind die Functionen y nach den gemachten Voraussetzungen vollständig defnirt, also können sie keine anderen sein als die schon gefundenen. Durch geeignete Wahl der Fläche Σ ergibt sich also, dass man längs eines willkürlichen Weges integrieren kann. w. z. b. w.

Um mit etwas Fertigem zu schliessen, werde ich noch den folgenden Satz aussprechen, welcher aus den obigen Betrachtungen ohne

Weiteres folgt, und welcher eine einfache und dabei symmetrische Integrationsmethode angiebt:

„Das System der totalen Differentialgleichungen (β) sei unbeschränkt integrabel. In einem $(n+m)$ -fach ausgedehnten Gebiet der x und y , innerhalb dessen das Anfangswerthsystem

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}$$

liegt, seien ausserdem die Functionen

$$X_i^{(k)} \quad (i=1, 2, \dots, n, k=1, 2, \dots, m)$$

durchweg eindeutig und stetig und zugleich ihre Ableitungen nach den y überall endlich.

Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich die Functionen $y_1 \dots y_m$ in einer gewissen Umgebung des Anfangswerthsystems durch Integration eines Systems von m gewöhnlichen Differentialgleichungen, welches folgendermassen zu bilden ist:

Setzt man

$$(\gamma) \quad x_i = x_i^{(0)} + \alpha_i t \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

wo die α_i willkürliche Constanten bedeuten, und bezeichnet man mit $|X_i^{(k)}|$ das Resultat der Substitutionen (γ) in $X_i^{(k)}$, so hat man die Differentialgleichungen zu bilden:

$$\frac{\partial y_k}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \alpha_i |X_i^{(k)}| \quad (k=1, 2, \dots, m).$$

Man integrirt dieselben unter Zugrundelegung der Anfangswerthe:

$$t = 0, \quad y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)}, \dots, y_m = y_m^{(0)},$$

was immer auf eine einzige Weise geschehen kann, solange t zwischen gewissen Grenzen bleibt.

Die so erhaltenen Integrale geben dann die Werthe der gesuchten Functionen y_k für die durch (γ) dargestellten Werthe der x_i .“

Dieser Satz entspricht dem Falle, wo die Integrationswege die vom Anfangspunkte ausgehenden *Radii vectores* sind.

Pavia, im Februar 1886.