Die Discriminante der binären Form 6. Ordnung.

Von

GIOVANNI MAISANO in Messina.

In meiner Abhandlung *la Sestica binaria* (Atti della R. Accademia dei Lincei vol. XIX, 3 Febbraio 1884) habe ich die Discriminante der Form 6. Ordnung benutzt, welche Prof. Brioschi in den *Annali di Matematica* berechnet hat. Es scheint mir jedoch der dort angewendeten Methode entsprechender, dieselbe Discriminante durch symbolische Rechnung darzustellen, und hierbei stütze ich mich auf die Resultate, die Prof. Gordan für die Resultante zweier binären Formen 5. Ordnung entwickelt hat*).

Einleitung.

Stellen wir eine binäre Form 6. Ordnung symbolisch durch:

$$f = a_x^5 = b_x^5 = \dots$$

dar, so ist bekanntlich ihre Discriminante, die wir mit D_f bezeichnen wollen, gleich der Resultante zweier Gleichungen:

$$a_x^5 a_1 = 0, \quad \text{und} \quad a_x^5 a_2 = 0.$$

Die Formeln für die Berechnung der Resultante $R_{\varphi\psi}$ zweier binären Formen 5. Ordnung:

$$\varphi = a_0 x_1^5 + 5a_1 x_1^4 x_2 + 10a_2 x_1^3 x_2^2 + 10a_3 x_1^2 x_2^3 + 5a_4 x_1 x_2^4 + a_5 x_2^5,$$

$$\psi = \alpha_0 x_1^5 + 5\alpha_1 x_1^4 x_2 + 10\alpha_2 x_1^3 x_2^2 + 10\alpha_3 x_1^2 x_2^3 + 5\alpha_4 x_1 x_2^4 + \alpha_5 x_2^5,$$

nach der Methode Gordan's (Math. Annalen Bd. III, S. 389), sind folgende:

*) Hr. Gordan hat selbst, wie er mir brieflich mittheilt, die Discriminante der binären Form 6. Ordnung, aber nach wesentlich anderer Methode, berechnet; vergl. Sitzungsberichte der Erlanger phys. med. Gesellschaft vom Jahre 1885.

$$\varrho = 5(\varphi\psi), \quad \sigma = \frac{25}{12}(\varphi\psi)^2, \quad \tau = \frac{5}{3}(\varphi\psi)^3,$$

$$\overline{A} = (\varrho\varphi)^4 + \frac{3}{7}(\varrho\sigma)^2 - \frac{1}{10}\varrho \cdot \tau - \frac{18}{49}\sigma^2, \quad \overline{B} = -(\varrho\sigma)^3,$$

$$\overline{C} = -\frac{2}{7}(\varrho\varphi)^6 - \frac{1}{49}(\varrho\sigma)^4 - \frac{27}{343}(\sigma\sigma)^2 + \frac{9}{70}\sigma \cdot \tau,$$

$$\overline{D} = (\varrho\varphi)^6 - \frac{3}{7}(\varrho\sigma)^4 + \frac{45}{49}(\sigma\sigma)^2 - \frac{3}{10}\sigma \cdot \tau,$$

$$E = \frac{1}{30}(\varrho\varphi)^8 - \frac{3}{70}(\sigma\sigma)^4 - \frac{1}{100}\tau^2,$$

$$\Theta = \frac{\overline{D}^2}{6} - \frac{\overline{C}^2}{6} - (\overline{A}\overline{A})^4 - 2(\overline{A}\overline{B})^3 - 2(\overline{A}\overline{C})^2 - 2\overline{A}_1 E \\ + \frac{3}{4}(\overline{B}\overline{B})^2 + (\overline{B}\overline{C}),$$

$$R_{\varphi\psi} = (\Theta\varphi)^5.$$

In unsrem Fall ist:

$$\varphi = a_x^5 a_1, \quad \psi = a_x^5 a_2,$$

und also:

$$\varrho = 5(ab) a_x^4 b_x^4 a_1 b_2 = \frac{5}{2}(ab)^2 a_x^4 b_x^4 = \frac{5}{2} H,$$

$$\sigma = \frac{25}{12}(ab)^3 a_x^2 b_x^2 a_1 b_2 = \frac{25}{24}(ab)^4 a_x^2 b_x^2 = \frac{25}{24} i,$$

$$\tau = \frac{5}{3}(ab)^5 a_1 b_2 = \frac{5}{6}(ab)^6 = \frac{5}{6} A.$$

§ 1.

Berechnung der Formen $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, E .

Bei Anwendung der folgenden Beziehungen:*)

$$(1) \quad (HH)^4 = \frac{2}{3 \cdot 7} l \cdot f + \frac{5^2}{2 \cdot 3 \cdot 7^2} i^2 - \frac{1}{3 \cdot 5} A \cdot H,$$

$$(2) \quad (HH)^6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 7} A \cdot i + \frac{2 \cdot 5}{7^2} \Delta,$$

$$(3) \quad (HH)^8 = -\frac{5}{7} B + \frac{2}{3 \cdot 5} A^2,$$

$$(4) \quad (Hi)^2 = \frac{1}{2 \cdot 3} f \cdot l - \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 7} i^2,$$

$$(5) \quad (Hi)^3 = -\frac{1}{2}(aI) a_x^5 l_x = -\frac{1}{2} \delta,$$

$$(6) \quad (Hi)^4 = \frac{2}{7} \Delta + \frac{2}{3 \cdot 5} A \cdot i$$

erhält man:

*) Vgl. Cap. II, § 3 der angedeuteten Abhandlung.

$$(7) \quad \overline{A} = \frac{5}{2^5} (5l \cdot f - 4A \cdot H),$$

$$(8) \quad \overline{B} = \frac{5^3}{2^5 \cdot 3} (al) a_x^5 l_x,$$

$$(9) \quad \overline{C} = \frac{5^3}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7} (2A \cdot i - 3 \cdot 5\Delta),$$

$$(10) \quad \overline{D} = -\frac{5^2}{2^6 \cdot 3} (2A \cdot i - 3 \cdot 5\Delta) = -\frac{3 \cdot 7}{5} \overline{C},$$

$$(11) \quad E = \frac{1}{2^7 \cdot 3} (2^3 A^2 - 3 \cdot 5^2 B).$$

§ 2.

Berechnung der Form $(\overline{AA})^4$.

Nach der von Gordan gegebenen Reihenentwicklung (Ueber das Formensystem binärer Formen S. 7), hat man für die Form $a_x^4 a_y^2 l_y^2$ die nach Potenzen von (xy) fortschreitende Reihe:

$$a_x^4 a_y^2 l_y^2 = \varphi_x^4 \varphi_y^4 + (xy) \cdot [(al) a_x^5 l_x]_y + \frac{2}{7} \cdot (xy)^2 [(al)^2 a_x^4]_y,$$

wobei

$$a_x^6 l_x^2 = \varphi_x^8$$

gesetzt ist.

Man hat ähnlicherweise für die Form $(al) a_x^3 a_y^2 l_y$:

$$(al) a_x^3 a_y^2 l_y = \delta_x^3 \delta_y^3 + \frac{1}{2} \cdot (xy) [(al)^2 a_x^4]_y,$$

und es entsteht somit:

$$a_x^4 a_y^2 l_y^2 = \varphi_x^4 \varphi_y^4 + (xy) \cdot (al) a_x^3 a_y^2 l_y - \frac{3}{14} (xy)^2 \cdot [(al)^2 a_x^4]_y,$$

oder, wenn man die Formel

$$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} A \cdot i$$

anwendet,

$$(12) \quad a_x^4 a_y^2 l_y^2 = \varphi_x^4 \varphi_y^4 + (xy) \cdot (al) a_x^3 a_y^2 l_y - \frac{3}{7} (xy)^2 \cdot \Delta_x^2 \Delta_y^2 \\ - \frac{1}{14} (xy)^2 \cdot A \cdot i_x^2 i_y^2.$$

Entwickelt man die Form $a_y^3 a_x^3 l_x^2$ in Reihen, so erhält man:

$$a_y^3 a_x^3 l_x^2 = \varphi_x^5 \varphi_y^3 - \frac{3}{4} (xy) \cdot \delta_x^4 \delta_y^2 + \frac{1}{7} (xy)^2 \cdot [(al)^2 a_x^4]_y.$$

Die Form $\delta_x^4 \delta_y^2$ auf der rechten Seite kann hier, nach der Formel

$$(al) a_x^3 a_y^2 l_x = \delta_x^4 \delta_y^2 - \frac{1}{3} (xy) \cdot [(al)^2 a_x^2]_y,$$

durch

$$(al) a_x^3 a_y^2 l_x + \frac{2}{3} (xy) \cdot \Delta_x^3 \Delta_y + \frac{1}{9} (xy) \cdot A \cdot i_x^3 i_y$$

ersetzt werden; mithin ist:

$$(13) \quad a_y^3 a_x^3 l_x^2 = \varphi_x^5 \varphi_y^3 - \frac{3}{4} (xy) \cdot (al) a_x^3 a_y^2 l_x - \frac{3}{14} (xy)^2 \cdot \Delta_x^3 \Delta_y \\ - \frac{1}{28} (xy)^2 \cdot A \cdot i_x^3 i_y.$$

Ebenso, wenn man die Form $a_x^6 l_y^2$ in Reihen entwickelt, erhält man nach der Relation:

$$(al) a_x^5 l_y = \delta_x^5 \delta_y + \frac{5}{6} (xy) \cdot (al)^2 a_x^4, \\ (14) \quad a_x^6 l_y^2 = \varphi_x^6 \varphi_y^2 + \frac{3}{2} (xy) \cdot (al) a_x^5 l_y - \frac{15}{14} (xy)^2 \cdot \Delta \\ - \frac{5}{28} (xy)^2 \cdot A \cdot i.$$

Nach (12) ist:

$$(15) \quad (a\varphi)^4 a_x^2 l_x^2 \varphi_x^4 = (\varphi\varphi')^4 \varphi_x^4 \varphi_x'^4 + (al)(a\varphi)^3 a_x^2 l_x \varphi_x^5 \\ - \frac{3}{7} (\Delta\varphi)^2 \Delta_x^2 \varphi_x^6 - \frac{1}{14} A \cdot (i\varphi)^2 i_x^2 \varphi_x^6,$$

und ebenso:

$$(ab)^4 a_x^2 b_x^2 l_x^2 = (\varphi a)^4 \varphi_x^4 a_x^2 + (al)(ab)^3 a_x^2 b_x^3 l_x \\ - \frac{3}{7} (\Delta a)^2 \Delta_x^2 a_x^4 - \frac{1}{14} A \cdot (ia)^2 i_x^2 a_x^4.$$

Das zweite Glied rechts ist gleich:

$$\frac{1}{2} (ab)^3 a_x^2 b_x^2 l_x \{ (al) b_x - (bl) a_x \} = \frac{1}{2} (ab)^4 a_x^2 b_x^2 \cdot l_x^2 = \frac{1}{2} i \cdot l$$

und daher:

$$(16) \quad (\varphi a)^4 \varphi_x^4 a_x^2 = \frac{1}{2} i \cdot l + \frac{3}{7} (\Delta a)^2 \Delta_x^2 a_x^4 + \frac{1}{14} A \cdot (ia)^2 i_x^2 a_x^4.$$

Nach (13) hat man:

$$(ab)^3 (bl') a_x^3 b_x^2 l_x^2 l_x' = (\varphi a)^3 (al) \varphi_x^5 a_x^2 l_x + \frac{3}{4} (ab)^2 (al) (bl') a_x^3 b_x^3 l_x l_x' \\ - \frac{3}{14} (\Delta a) \Delta_x^3 a_x^4 (al) l_x - \frac{1}{28} A \cdot (ia) i_x^3 a_x^4 (al) l_x.$$

Die linke Seite ist gleich:

$$\frac{1}{2} (ab)^3 a_x^2 b_x^2 l_x^2 l_x' \{ (bl') a_x - (al') b_x \} = - \frac{1}{2} i \cdot l^2.$$

Das zweite Glied rechts, nach der Formel

$$(ab)^2 a_x^3 b_x^3 a_y b_z = H_x^6 H_y H_z - \frac{3}{14} (xy) (xz) \cdot i,$$

ist gleich:

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{4} H_x^6 (Hl)(Hl') l_x l_{x'} - \frac{9}{56} i \cdot l^2 \\
&= \frac{3}{8} H_x^6 \{ (Hl)^2 l_{x'}^2 + (Hl') l_x^2 - (ll')^2 H_x^2 \} - \frac{9}{56} i \cdot l^2 \\
&= -\frac{1}{4} B f \cdot l + \frac{1}{4} A \cdot p \cdot l + \frac{3}{8} i \cdot l^2 - \frac{3}{8} A_{ll} \cdot H. *)
\end{aligned}$$

Das dritte Glied ist gleich:

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{28} \Delta_x^2 a_x^4 \{ (a\Delta)^2 l_x^2 + (al)^2 \Delta_x^2 - (\Delta l)^2 a_x^2 \} \\
&= \frac{3}{56} i \cdot l^2 + \frac{1}{56} B \cdot f \cdot l + \frac{3}{14} \Delta^2 + \frac{1}{28} A \cdot i \cdot \Delta - \frac{3}{28} f \cdot n. **)
\end{aligned}$$

Das vierte Glied ist gleich:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{56} A \cdot i_x^2 \cdot a_x^4 \{ (ai)^2 l_x^2 + (al)^2 i_x^2 - (il)^2 a_x^2 \} \\
&= \frac{1}{56} A \cdot p \cdot l + \frac{1}{28} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{1}{3 \cdot 56} A^2 \cdot i^2 - \frac{1}{56} A \cdot f \cdot m.
\end{aligned}$$

Man bekommt also:

$$\begin{aligned}
(17) \quad & (\varphi a)^3 (al) \varphi_x^5 a_x^2 l_x \\
&= -\frac{13}{14} i \cdot l^2 + \frac{13}{56} B \cdot f \cdot l - \frac{15}{56} A \cdot p \cdot l + \frac{3}{8} A_{ll} \cdot H - \frac{3}{14} \Delta^2 \\
&\quad - \frac{1}{14} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{3}{28} f \cdot n - \frac{1}{168} A^2 \cdot i^2 + \frac{1}{56} A \cdot f \cdot m.
\end{aligned}$$

Bei Anwendung der Formel (14) hat man:

$$f \cdot (\Delta l)^2 \Delta_x^2 = (\varphi \Delta)^2 \varphi_x^6 \Delta_x^2 - \frac{3}{2} (al)(l\Delta) a_x^5 i_x^3 - \frac{15}{14} \Delta^2 - \frac{5}{28} A \cdot i \cdot \Delta.$$

Das zweite Glied rechts ist gleich:

$$\frac{3}{4} a_x^4 \Delta_x^2 \{ (al)^2 \Delta_x^2 + (\Delta l)^2 a_x^2 - (a\Delta)^2 l_x^2 \},$$

und daher:

$$(18) \quad (\varphi \Delta)^2 \varphi_x^6 \Delta_x^2 = \frac{1}{4} f \cdot n - \frac{5}{24} B \cdot f \cdot l - \frac{3}{7} \Delta^2 - \frac{1}{14} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{3}{8} i \cdot l^2.$$

Nach derselben Formel ist:

$$f \cdot (il)^2 i_x^2 = (\varphi i)^2 \varphi_x^6 i_x^2 - \frac{3}{2} (al)(li) a_x^5 i_x^3 - \frac{15}{14} i \cdot \Delta - \frac{5}{28} A \cdot i^2,$$

und ähnlicherweise:

$$(19) \quad (\varphi i)^2 \varphi_x^6 i_x^2 = \frac{1}{4} f \cdot m - \frac{3}{7} i \cdot \Delta - \frac{1}{14} A \cdot i^2 + \frac{3}{4} p \cdot l.$$

Die Formeln (15), (16), (17), (18), (19) gebrauchend, erhält man:

*) Vgl. Cap. II Formel (9) der gen. Abhandlung.

**) Formel (8) ebenda.

$$(20) \quad (\varphi\varphi)^4 = -\frac{3}{56} i \cdot l^2 + \frac{1}{14} B \cdot f \cdot l - \frac{1}{7} A \cdot p \cdot l + \frac{5}{8} A_{ii} \cdot H \\ - \frac{13}{98} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{3}{14} f \cdot n - \frac{13}{24 \cdot 7^2} A^2 \cdot i^2 \\ + \frac{1}{28} A \cdot f \cdot m - \frac{39}{98} \Delta^2.$$

Nach (12) hat man:

$$(aH)^4 H_x^4 a_x^2 l_x^2 = (\varphi H)^4 \varphi_x^4 H_x^4 + (al)(aH)^3 a_x^2 l_x H_x^3 \\ - \frac{3}{7} (\Delta H)^2 \Delta_x^2 H_x^6 - \frac{1}{14} A \cdot (iH)^2 i_x^2 H_x^6,$$

und aus der Formel:

$$(ab)^2 a_x^3 b_x^2 a_y b_y^2 = H_x^5 H_y^3 - \frac{1}{7} (xy)^2 \cdot i_x^3 i_y$$

folgt:

$$(ab)^2 (ac)(bc)^2 (cl) a_x^3 b_x^2 c_x^2 l_x = (Ha)^3 (al) H_x^5 a_x^2 l_x \\ - \frac{1}{7} (ia)(al) i_x^3 a_x^4 l_x.$$

Die linke Seite ist gleich:

$$\frac{1}{2} (ab)^2 (bc)^2 (ac) a_x^2 b_x^2 c_x^2 l_x \{ (cl) a_x - (al) c_x \} = -\frac{1}{2} j \cdot l.$$

Das zweite Glied rechts ist gleich:

$$\frac{1}{14} a_x^4 i_x^2 \{ (ai)^2 l_x^2 + (al)^2 i_x^2 - (il)^2 a_x^2 \} \\ = \frac{1}{14} p \cdot l + \frac{1}{14} i \cdot (al)^2 a_x^4 - \frac{1}{14} f \cdot m,$$

und also:

$$(21) \quad (aH)^3 (al) a_x^2 l_x H_x^3 \\ = -\frac{3}{7} p \cdot l + \frac{1}{12} A \cdot f \cdot l + \frac{1}{7} i \cdot \Delta + \frac{1}{42} A \cdot i^2 - \frac{1}{14} f \cdot m.$$

Man hat folglich:

$$(22) \quad (\varphi H)^4 \varphi_x^4 H_x^4 = \frac{13}{210} A \cdot f \cdot l - \frac{5}{14} p \cdot l - \frac{5}{98} i \cdot \Delta + \frac{1}{14} f \cdot m \\ - \frac{5}{3 \cdot 14^2} A \cdot i^2.$$

Nach (8) ergibt sich:

$$(\overline{AA})^4 = \frac{5^2}{2^{10}} [5^2 \cdot (\varphi\varphi)^4 + 2^4 \cdot A^2 \cdot (HH)^4 - 2^3 \cdot 5 A \cdot (\varphi H)^4],$$

und nach (1), (20), (22) bekommt man hiernach als Endresultat:

$$(23) \quad \frac{2^{10}}{3^2} (\overline{AA})^4 = -\frac{3 \cdot 5^2}{56} i \cdot l^2 + \frac{5^2}{14} B \cdot f \cdot l + \frac{3 \cdot 5^2}{7} A \cdot p \cdot l + \frac{3 \cdot 5^2}{8} A_{ii} \cdot H \\ - \frac{5^2 \cdot 39}{98} \Delta^2 - \frac{5^2}{98} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{3 \cdot 5^2}{14} f \cdot n + \frac{5^2 \cdot 67}{7^2 \cdot 24} A^2 \cdot i^2 \\ - \frac{55}{28} A \cdot f \cdot m - \frac{20}{21} A^2 \cdot f \cdot l - \frac{2^4}{15} A^3 \cdot H.$$

§ 3.

Berechnung der Form $(\overline{AB})^3$.

Nach den Formeln (7), (8) hat man:

$$(\overline{AB})^3 = \frac{5^4}{3 \cdot 2^{10}} [5(\varphi\delta)^3 - 4A \cdot (H\delta)^3],$$

und nach der Formel

$$(al) a_x^3 a_y^2 l_y = \delta_x^3 \delta_y^3 + (xy) \cdot \Delta_x^2 \Delta_y^2 + \frac{1}{6} A \cdot i_x^2 i_y^2$$

ist:

$$\begin{aligned} & (al) (a\varphi)^3 a_x^2 l_x \varphi_x^5 \\ &= (\delta\varphi)^3 \delta_x^3 \varphi_x^5 + (\Delta\varphi)^2 \Delta_x^2 \varphi_x^6 + \frac{1}{6} A \cdot (i\varphi)^2 i_x^2 \varphi_x^6; \end{aligned}$$

folglich ist auf Grund der Formeln (17), (18), (19):

$$\begin{aligned} (24) \quad (\varphi\delta)^3 \varphi_x^5 \delta_x^3 &= -\frac{31}{56} i \cdot l^2 + \frac{1}{42} B \cdot f \cdot l - \frac{1}{7} A \cdot p \cdot l + \frac{3}{8} A_{ll} \cdot H \\ &\quad - \frac{9}{14} \Delta^2 - \frac{3}{14} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{5}{14} f \cdot n - \frac{1}{56} A^2 \cdot i^2 \\ &\quad + \frac{5}{84} A \cdot f \cdot m. \end{aligned}$$

Aus derselben Formel ergibt sich:

$$\begin{aligned} & (al) (aH)^3 a_x^2 l_x H_x^5 \\ &= (\delta H)^3 \delta_x^3 H_x^5 + (\Delta H)^2 \Delta_x^2 H_x^6 + \frac{1}{6} A \cdot (iH)^2 i_x^2 H_x^6, \end{aligned}$$

und nach (21):

$$\begin{aligned} (25) \quad & (H\delta)^3 H_x^5 \delta_x^3 \\ &= \frac{11}{42} p \cdot l - \frac{1}{18} A \cdot f \cdot l + \frac{1}{14} i \cdot \Delta + \frac{1}{84} A \cdot i^2 + \frac{1}{14} f \cdot m. \end{aligned}$$

Endlich aus den Formeln (24), (25):

$$\begin{aligned} (26) \quad (\overline{AB})^3 &= \frac{5^4}{3 \cdot 2^{10}} \left(-\frac{5 \cdot 31}{56} i \cdot l^2 + \frac{5}{42} B \cdot f \cdot l + \frac{15}{8} A_{ll} \cdot H \right. \\ &\quad - \frac{45}{14} \Delta^2 + \frac{25}{14} f \cdot n - \frac{37}{21} A \cdot p \cdot l - \frac{19}{14} A \cdot i \cdot \Delta \\ &\quad \left. - \frac{23}{168} A^2 \cdot i^2 + \frac{2}{9} A^2 \cdot f \cdot l + \frac{1}{84} A \cdot f \cdot m \right). \end{aligned}$$

§ 4.

Berechnung der Form $(\overline{AC})^3$.

Nach (7) und (9) hat man:

$$(\overline{AC})^2 = \frac{5^4}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 7} [10A \cdot (\varphi i)^2 - 75(\varphi\Delta)^2 - 8A^2 \cdot (Hi)^2 + 60A \cdot (H\Delta)^2],$$

und nach (18) und (19):

$$(27) \quad (\overline{AC})^2 = \frac{5^4}{2^{11} \cdot 3^2 \cdot 7} \left(-\frac{15^3}{8} i \cdot l^2 + \frac{5^3}{8} B \cdot f \cdot l + \frac{15^3}{7} \Delta^2 - \frac{75}{4} f \cdot n \right. \\ \left. - \frac{5}{2} A \cdot p \cdot l + \frac{13 \cdot 15}{14} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{25}{7} A^2 \cdot i^2 \right. \\ \left. - \frac{4}{3} A^2 \cdot f \cdot l + \frac{5}{2} A \cdot f \cdot m \right).$$

§ 5.

Berechnung der Form $(\overline{BB})^2$.

Man hat die Formel:

$$(al) a_x^3 a_y^2 l_x = \delta_x^4 \delta_y^2 - \frac{1}{3} (xy) \cdot (al)^2 a_x^3 a_y,$$

und folglich:

$$(28) \quad (ab)^2 (al)(bl') a_x^3 b_x^3 l_x l_x' = (\delta\delta)^2 + \frac{1}{9} (\alpha\alpha)^2 + \frac{2}{3} (al)^2 (a\delta) a_x^3 \delta_x^3,$$

wobei gesetzt ist:

$$\alpha_y^2 = (xy) \cdot (al)^2 a_x^3 a_y.$$

Die linke Seite ist, nach der Formel

$$(ab)^2 a_x^3 b_x^3 a_y b_x = H_x^6 H_y H_x - \frac{3}{14} (xy) \cdot (xz) \cdot i_x^4,$$

gleich:

$$(Hl)(Hl') H_x^6 l_x l_x' - \frac{3}{14} i \cdot l^2,$$

und also auch:

$$= \frac{1}{2} H_x^6 \{ (Hl)^2 l_x'^2 + (Hl')^2 l_x^2 - (ll')^2 H_x^2 \} - \frac{3}{14} i \cdot l^2 \\ = -\frac{1}{2} A_{ll} \cdot H - \frac{1}{8} B \cdot f \cdot l + \frac{1}{3} A \cdot p \cdot l + \frac{1}{2} i \cdot l^2.$$

Nun hat man:

$$(\alpha\alpha)^2 = - (al)^2 (a\alpha) a_x^3 a_x.$$

Indessen ist:

$$\alpha_x \alpha_y = \frac{1}{2} (xy) (al)^2 a_x^4,$$

und also:

$$(29) \quad (\alpha\alpha)^2 = (\alpha\alpha) (al)^2 a_x^3 a_x = -\frac{1}{2} (al)^2 a_x^4 \cdot (bl')^2 b_x^4.$$

Nach der Formel

$$(al) a_x^5 l_y = \delta_x^5 \delta_y + \frac{5}{6} (xy) \cdot (al)^2 a_x^4,$$

ergibt sich:

$$(al) a_x^5 (lb) (bl')^2 b_x^3 = (\delta a) (al)^2 \delta_x^5 a_x^3 - \frac{5}{6} (al)^2 a_x^4 \cdot (bl')^2 b_x^4.$$

Die linke Seite ist gleich:

$$-\frac{1}{2}(bl')^2 a_x^4 b_x^2 \{ (al)^2 b_x^2 + (bl)^2 a_x^2 - (ab)^2 l_x^2 \} \\ = -\frac{1}{2}(bl')^2 b_x^4 \cdot (al)^2 a_x^4 - \frac{1}{2}(bl)^2 (bl')^2 b_x^2 \cdot f + \frac{1}{2}(ab)^2 (bl')^2 a_x^4 b_x^2 \cdot l,$$

folglich ist:

$$(30) \quad (a\delta)(al)^2 a_x^3 \delta_x^5 \\ = -\frac{1}{3}(al)^2 a_x^4 \cdot (bl')^2 b_x^4 + \frac{1}{2}f \cdot (bl)^2 (bl')^2 b_x^2 - \frac{1}{2}(al)^2 (bl')^2 a_x^4 b_x^2 \cdot l.$$

Wegen (28), (29), (30) ist endlich:

$$(31) \quad (\overline{B\overline{B}})^2 = \frac{5^6}{3^2 \cdot 2^{10}} (\delta\delta)^2 \\ = \frac{5^6}{3^2 \cdot 2^{10}} \left[-\frac{1}{2} A_{ii} \cdot H - \frac{2}{9} B \cdot f \cdot l + \frac{4}{9} A \cdot p \cdot l + \frac{5}{6} i \cdot l^2 \right. \\ \left. + \frac{10}{9} \Delta^2 + \frac{10}{27} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{5}{162} A^2 \cdot i^2 - \frac{1}{9} A \cdot f \cdot m \right. \\ \left. - \frac{2}{3} f \cdot n \right].$$

§ 6.

Berechnung der Form $(\overline{B\overline{C}})$.

Nach (8) und (9) hat man:

$$(\overline{B\overline{C}}) = \frac{5^6}{2^{11} \cdot 3^3 \cdot 7} [2A \cdot (\delta i) - 15(\delta\Delta)],$$

und setzt man in die Formel:

$$[(\varphi\psi), \chi] = \frac{m-n}{2(m+n-2)} \chi \cdot X - \frac{1}{2} (\varphi \cdot \Phi - \psi \cdot \Psi) *$$

für φ, ψ, χ bez. ein:

$$\varphi = \varphi_x^m = a_x^6, \quad \psi = \psi_x^n = l_x^2, \quad \chi = \chi_x^p = i_x^4,$$

so erhält man:

$$(\delta i) = \frac{2}{3} i \cdot \Delta + \frac{1}{9} A \cdot i^2 - \frac{1}{2} f \cdot m + \frac{1}{2} p \cdot l.$$

Setzt man ferner:

$$\varphi = a_x^6, \quad \psi = l_x^2, \quad \chi = \Delta_x^4,$$

so hat man ähnlicherweise:

$$(\delta\Delta) = \frac{2}{3} \Delta + \frac{1}{9} A \cdot i \cdot \Delta - \frac{1}{2} f \cdot n + \frac{1}{12} B \cdot f \cdot l + \frac{1}{4} i \cdot l^2,$$

*) Vgl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen S. 117.

folglich:

$$(32) \quad (\overline{BC}) = \frac{5^6}{2^{11} \cdot 3^3 \cdot 7} \left(-\frac{1}{3} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{2}{9} A^2 \cdot i^2 - A \cdot f \cdot m + A \cdot p \cdot l \right. \\ \left. - 10 \Delta^2 + \frac{15}{2} f \cdot n - \frac{5}{4} B \cdot f \cdot l - \frac{15}{4} i \cdot l^2 \right).$$

§ 7.

Berechnung der Form Θ und der Discriminante D_f .

Nach den Formeln:

$$\Theta = \frac{\overline{D}^2}{6} - \frac{\overline{C}^2}{6} - (\overline{A} \overline{A})^4 - 2(\overline{A} \overline{B})^3 - 2(\overline{A} \overline{C})^2 - 2\overline{A} \cdot E \\ + \frac{3}{4} (\overline{B} \overline{B})^2 + (\overline{B} \overline{C}),$$

$$E = \frac{1}{2^7 \cdot 3} (8A^2 - 75B),$$

und nach (23), (26), (27), (31), (32) ist:

$$(33) \quad \frac{2^{11} \cdot 3^3}{5} \cdot \Theta = \cdot 2^4 \cdot 3 (2^4 \cdot 3 A^3 - 5^2 \cdot 29 AB - 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 C) H \\ + 2^2 \cdot 5^3 A^2 \cdot i^2 - 2^6 \cdot 3 \cdot 5 A^2 \cdot f \cdot l + 2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11 A \cdot i \cdot \Delta \\ + 2^5 \cdot 5^3 \cdot 3 A \cdot p \cdot l - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 A \cdot f \cdot m - 2^3 \cdot 5^3 \cdot 3 B \cdot f \cdot l \\ + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \Delta^2 + 3^2 \cdot 5^3 \cdot 23 i \cdot l^2 - 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 f \cdot n.$$

Aus der Formel:

$$(iH)^4 H_x^4 = \frac{2}{7} \Delta + \frac{2}{15} A \cdot i$$

bekommt man:

$$(iH)^4 (i'H)^4 = \frac{2}{7} C + \frac{2}{15} A \cdot B,$$

$$(iH)^4 (\Delta H)^4 = \frac{1}{21} B^2 + \frac{2}{15} A \cdot C,$$

$$(iH)^4 (lH)^2 (l'H)^2 = \frac{2}{7} D - \frac{4}{21} B \cdot C + \frac{2}{35} A \cdot B^2 + \frac{4}{45} A^2 \cdot C.$$

Aus der Formel

$$(aH)^6 H_x^2 = \frac{5}{7} l,$$

ist:

$$(aH)^6 (Hl)^2 = \frac{10}{7} C + \frac{5}{21} AB,$$

$$(aH)^6 (Hm)^2 = \frac{10}{21} B^2 + \frac{10}{21} A \cdot C,$$

$$(aH)^6 (Hn)^2 = \frac{5}{7} D.$$

Aus den Formeln:

$$(\Delta H)^4 H_x^4 = -\frac{5}{42} B \cdot i - \frac{1}{30} A \cdot \Delta + \frac{1}{4} l^2,$$

$$(ai)^2 a_x^4 i_y^2 = p_x^4 p_y^2 + \frac{3}{5} (xy)^2 \cdot l$$

folgt weiter:

$$(\Delta H)^4 (\Delta' H)^4 = -\frac{2}{7} B \cdot C - \frac{1}{30} A \cdot B^2 + \frac{1}{4} D,$$

$$(pH)^6 (Hl)^2 = -\frac{1}{7} B^2 + \frac{13}{105} A \cdot C + \frac{2}{45} A^2 \cdot B.$$

Uebrigens hat man:

$$(HH')^8 = -\frac{5}{7} B + \frac{2}{15} A^2.$$

Also ergibt sich am Ende:

$$(34) \quad \frac{2^{12} \cdot 3^3}{5^2} (\Theta \rho)^8 = \frac{2^{11} \cdot 3^3}{5} (\Theta H)^8 = \frac{2^7 \cdot 3}{5} A^5 - 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 A^3 \cdot B \\ - 2^4 \cdot 5^3 A^2 \cdot C + 2 \cdot 3 \cdot 5^4 A \cdot B^2 + 2^2 \cdot 3 \cdot 5^4 B \cdot C \\ + 3^2 \cdot 5^4 D$$

was das gesuchte Resultat ist.

Anmerkung. — Durch das Verschwinden von D , erhält $f = a_x^6 = 0$ eine Doppelwurzel ($\xi = 0$). Den Doppelfactor von f bestimmt man folgenderweise:

Nach den Ergebnissen Gordan's (a. a. O.) ist:

$$\Theta = \alpha_0 x_1^8 + 8\alpha_1 x_1^7 x_2 + \dots = (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)^8,$$

somit ist

$$\xi_1^8 = \alpha_0, \quad \xi_1^7 \xi_2 = \alpha_1 \dots;$$

also

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$

Palermo, den 23. Mai 1885.