**I. Die Elasticität von Kalkspathstübchen;
von G. Baumgarten.**

Eine Vorlesung des Hrn. Geh.-Rath Neumann in Königsberg über Elasticitätstheorie, in der er u. a. die Aufmerksamkeit auf die Bestimmung der Elasticitätscoëfficienten krystallinischer Körper hinlenkte, veranlafte mich diese Bestimmung zu versuchen.

Während bei unkrystallinischen Medien die Angaben über die Elasticitätsconstanten für denselben Stoff oft weit aus einander gehen, durfte man bei krystallinischen von vornherein auf eine bessere Uebereinstimmung der Beobachtungen rechnen, da ja hier das Material so rein und homogen gewählt werden kann, wie nur immer die Wirklichkeit es zu bieten vermag. Dafs trotz dieser wohlbegründeten Vermuthung die Aufgabe nicht schon behandelt worden ist, hat wohl daran gelegen, dafs die erforderliche Bearbeitung krystallinischer Körper für sehr beschwerlich, wenn nicht für unmöglich gehalten wurde. Meines Wissens wenigstens sind directe Beobachtungen über das elastische Verhalten von Krystallen noch nicht vorhanden ¹⁾).

Was die specielle Wahl des Materials anlangt, so entschied ich mich aus doppeltem Grunde für Kalkspath;

- 1) Die Arbeit, wie sie vorliegt, war bereits Weihnachten 1872 fertig; sie wurde zu dieser Zeit der philosophischen Facultät zu Leipzig als Dissertation vorgelegt. Umstände halber konnte sie erst jetzt dem Druck übergeben werden. Unterdeß hat mein Freund Dr. Voigt die Elasticitätsverhältnisse des Steinsalzes untersucht. Siehe dessen Dissertation: „Untersuchung über die Elasticitätsverhältnisse des Steinsalzes.“ Leipzig.

theils weil gerade er hinsichtlich seiner übrigen physikalischen Eigenschaften besser bekannt ist, als irgend ein anderes Mineral; theils weil ich ihn von Rabenstein bei Chemnitz, einem den Mineralogen nicht unbekannten Fundorte, in größeren Quantitäten wohlfeil zu beziehen hoffte. Dieser letztere Grund freilich erwies sich bald als unstichhaltig, da die von dorthier bezogenen Stücke durchgängig nicht bruchfrei waren. Statt dessen arbeitete ich nunmehr mit vollständig reinem, bruchfreien Doppelspath aus Island, den ich anfangs vom verstorbenen Dr. Krantz in Bonn, später von einem Kopenhagener Edelsteinhändler S. Henriques in prachtvollen Spaltungsstücken bezog. —

Die Art und Weise der Elasticitätsconstantenbestimmung war durch die Natur des Materials vorgezeichnet. Jedenfalls mußte man absehen von der Dilatation herzustellender Stäbchen in der Längsrichtung und dafür versuchen Kalkspathstäbchen, nach verschiedenen Richtungen geschnitten, zu *biegen*.

Folgenden Plan hatte ich mir für die Untersuchung vorgezeichnet. Nachdem Vorarbeiten die Lösbarkeit der Aufgabe dargethan, sollten die Elasticitätsverhältnisse der Reihe nach in drei zu einander senkrechten Ebenen untersucht, und als erste der Hauptschnitt durch eine Rhomboëderkante (und die kurze Diagonale der gegenüberliegenden Rhomboëderfläche) gewählt werden. Ich glaubte auf Grund dieser Beobachtungen mir ein Bild von der Gestalt der Elasticitätsoberfläche machen zu können. Der eben bezeichnete Hauptschnitt, welcher den Anfang in der Untersuchung machte, möge im Folgenden der Kürze halber Hauptschnitt I genannt werden.

I.

Voruntersuchung. Geeignetste Form für die Stäbchen.

Es galt, wenn überhaupt die Herstellung möglichst langer und dünner Stäbchen, wie die Biegungsversuche sie erfordern, gelungen war, vor Allem diejenigen beiden Fragen

zu beantworten, an deren Entscheidung die Lösbarkeit der ganzen Aufgabe hing: einmal, ob derartige Stäbchen meßbare Biegungen zeigten, und sodann, ob die Unterschiede der Biegungen bei nach verschiedenen Richtungen hin geschnittenen Stäbchen gegen die Beobachtungsfehler beträchtlich genug wären.

Der einfachste Weg zur Herstellung brauchbarer Stäbchen — deren Querschnitt vorerst quadratisch genommen werden sollte — war der, zunächst etwas dickere Säulen mit Laubsäge und auftröpfelndem Wasser aus dem Spath herauszuschneiden und deren Querschnitt dann durch Schleifen zu verkleinern, so weit es eben ging.

Ich schnitt etwa 50^{mm} lange Stäbchen, erst parallel einer Spaltungsfläche, dann senkrecht in der Richtung einer Kante; und schliff den quadratischen Querschnitt bis auf etwa 9^{mm} ab. Wie und mit welchen Vorrichtungen ich dabei arbeitete, wird der nächste Abschnitt näher anführen.

Nachdem dieß gelungen war, prüfte ich ihre Biegsamkeit. Die Probe wurde mir außerordentlich erleichtert durch einen für dergleichen Versuche bereits gebauten und mir freundlichst zur Benutzung überlassenen Apparat des Neumann'schen Cabinets, denselben, der auch in der Folge diente und weiterhin genauer beschrieben ist. An dieser Stelle sey nur kurz erwähnt, daß das Stäbchen auf zwei vertical stehenden, oben scharfkantigen Trägern, in Abstand von etwa 47^{mm}, auflag und quer darüber eine Waagschale mit einer Schneide übergehängt war. Nach erfolgter Belastung ward durch ein fest davor angebrachtes Mikroskop mit Fadenkreuz und Mikrometerschraube die Senkung gemessen.

Das Resultat der ersten Versuche war ein, wenn auch nicht unbedingt negatives, so doch wenig versprechendes zu nennen, indem die höchsten möglichen Drucke von wenig unter 2 Pfd. ¹⁾ die außerordentlich geringe Biegung

1) Bei 2 Pfd. war die Elasticitätsgränze erreicht, und das Stäbchen brach nach einer Spaltungsfläche.

von $\frac{15}{815} \text{ mm}$ (es wurden an der Mikrometerschraube 15 Skalentheile abgelesen) hervorbrachten.

Auf Grund solcher Werthe konnte an eine exacte Behandlung der elastischen Verhältnisse nicht gedacht werden. Daher mußte ich, um größere Biegungen zu erlangen, den Stäbchen eine andere Form geben.

Der quadratische Querschnitt war unter andern um deswillen gewählt worden, weil, wenn man das Stäbchen der Reihe nach auf verschiedene Seiten auflegte, sich bei *gleich großer* Höhe und Breite am unmittelbarsten feststellen ließ, ob dasselbe Stäbchen nach verschiedenen zur Längsaxe normalen Richtungen hin verschiedene Biegbarkeit zeige oder nicht. Es war dies, wie von vornherein zu erwarten stand, *nicht* der Fall; vielmehr haben später zu erwähnende Versuche bestätigt, daß, wenn eine Dimension vor den beiden andern durch GröÙe hervorragt, von den vorkommenden Richtungen nur die der größten Dimension auf die Biegbarkeit von Einfluß ist.

War es aber hiernach erlaubt, von dem quadratischen Querschnitt abzugehen, so lag ein Mittel nahe, die Stäbchen biegbarer zu machen, ohne doch ihrer Dauerhaftigkeit Eintrag zu thun. Die Formel nämlich, welche für elastische Stäbe zunächst zwar nur unkrystallinische, gilt, für krystallinische indess auf alle Fälle eine bedeutende Annäherung liefert, gab dies Mittel an die Hand. Bedeutet s_1 eine bestimmte Senkung, s diejenige bei l mal so großer Länge, b facher Breite, d facher Dicke, so ist

$$s = \frac{l^3}{bd^3} s_1.$$

Da die BiegungsgröÙe der Dicke in dritter Potenz, der Breite hingegen nur in erster Potenz umgekehrt proportional ist, so hatte ich nur nöthig, während die Breite in etwas vergrößert ward, dafür andererseits *die Dicke erheblich zu mindern*.

Eine zweite Verbesserung konnte darin bestehen, daß ich die Stäbchenlänge vergrößerte, ein Ausweg, der freilich die Zerbrechlichkeit in nicht geringem Maasse erhöhte und von dem ich deshalb auch später wieder zurückkam.

Mit so verbesserten Stäbchen, die ca. 60^{mm}—80^{mm} lang, 4½^{mm} breit und 1¼^{mm} dick waren, erzielte ich schon weit bessere Resultate, denn die Durchbiegung bei der Maximalbelastung war bei ihnen auf $\frac{45}{815}$ mm bis $\frac{60}{815}$ mm gestiegen. Die Möglichkeit exacter Bestimmungen war hierdurch dargethan.

Aber auch die zweite Frage: ob Stäbchen, nach verschiedenen Richtungen geschnitten, meßbare Unterschiede ihrer elastischen Biegungen zeigen würden, konnte bald entschieden und zwar bejaht werden. Zwei Stäbchen, die unter Winkeln, von 22° und 74° gegen die Kante geschnitten und die beide mit einiger Vorsicht bis auf die Dimensionen der oben erwähnten Stäbchen abgeschliffen worden waren, ergaben Durchbiegungen, die nicht nur unter einander, sondern auch von denen der Kantestäbchen abwichen.

II.

Herstellung der Stäbchen.

Sägen. Anfangs, wo es sich für die Voruntersuchung nur um Stäbchen in Richtungen einer *Spaltungsfläche* handelte, reichte das einfache Mittel, etwas dickere Säulen mit Laubsäge und Wasser aus dem Spath herauszuschneiden, vollkommen aus.

Das Spaltungsstück wurde mittelst einer Mischung aus Wachs und Harz (zu gleichen Theilen) auf eine, auch fernerhin benutzte Sägevorrichtung festgeklebt. Diese besteht aus einem 40^{cm} langen, 12^{cm} breiten, unten mit Zarge versehenen Bret, quer über dessen Mitte ein Holzbügel aufsteigt, bestimmt zur Führung des Sägebügels wie des Blattes, der deshalb in seiner unteren Hälfte schmal, in seiner oberen etwas breiter gespalten ist. Derselbe ist zwar drehbar, damit auch in nicht vertikalen Ebenen gesägt werden könne, indess geschah dies *nie*.

Später, wo ich für die eigentliche Hauptuntersuchung Stäbchen in Richtungen des Hauptschnitt I. schneiden sollte, versagte die Säge den Dienst. Schon die *Herstellung* des Hauptschnitt I. überzeugte mich davon.

Ich verwendete hierfür ein vollkommen klares, sprungfreies Spaltungsstück von 55^{mm} Höhe und 65^{mm} Breite und Länge und suchte wiederum mit Laubsäge und Wasser den genau vorgezeichneten Schnitt durchzuführen, dabei zeigte sich indessen, daß überall längs des Randes beim Durchschneiden kleine Stückchen heraussprangen; Beweis genug, daß die Säge für diesen Schnitt zu grob arbeite. Das Sägeblatt wurde jetzt durch dünnen Kupferdrath ersetzt, der unter fortwährendem Zutropfeln von Schmirgelwasser freilich langsam (200 □^{mm} in 1³/₄ Stunde) aber sehr accurat und mit wenigem Bruch schnitt. Dieser Schmirgelsäge (mit einer einmal nöthigen kleinen Abänderung, von der später die Rede seyn wird) bediente ich mich in der Folge durchgehends und sie liefs nie im Stich.

Um für die weitere Bearbeitung die so erhaltene Hauptschnittfläche horizontal zu haben, gofs ich in einem umgelegten Ramen dem Spath einen Fuß aus Harzwachsmasse an, deren Niveau dem Hauptschnitt parallel gemacht wird. Danach wenn, parallel zum Hauptschnitt, vertical gesägt werden sollte, ward für jede einzelne Stäbchenrichtung im Hauptschnitt ein neuer Fuß gegossen.

Die Abtrennung jedes einzelnen Stäbchens im Hauptschnitt erfolgte, nachdem seine Axenrichtung genau vorgezeichnet worden war. Dies geschah nicht unmittelbar auf dem Hauptschnitt durch Vorritzen, sondern durch Construction auf einem Stück Papier, das dann aufgeklebt wird. Die Winkel der Axenrichtungen sind in Folgendem stets von der Hauptaxe aus, links- und rechtsum gerechnet, so daß z. B. der Winkel der Kante mit $+ 36^{\circ} 44'$, der der gegenüberliegenden Seitenfläche mit $- 45^{\circ} 20'$ bezeichnet ist. Das Stäbchen wurde erst an der Breitseite, dann behutsam an der schmalen abgetrennt.

Eine hierbei auftretende Erscheinung, welche Interesse bieten dürfte, will ich nicht unerwähnt lassen. War nämlich bei gewissen Richtungen die Schmalseite zu zwei Dritteln oder drei Vierteln losgesägt, so brach sie von selbst und zwar *rein muschelig* ab. Besonders leicht und

schön entstand dieser Bruch bei den Stäbchen parallel der Hauptaxe und den unter $-22\frac{1}{2}^{\circ}$ geneigten, weniger gut bei den $+22\frac{1}{2}^{\circ}$ = und den 90° = Stäbchen, gar nicht bei den $+45^{\circ}$ =, -45° =, $+67\frac{1}{2}^{\circ}$ = und $-67\frac{1}{2}^{\circ}$ = Stäbchen, was sich wohl aus der Lage der Stäbchenaxe gegen die Spaltungsfläche erklären wird. In noch frappanterer Weise zeigte sich diese Erscheinung, freilich nur in einem einzigen Falle bei einem Breitseitschnitt. Es sprang, nachdem die Säge etwa 1^{mm} tief eingedrungen war, eine 1^{mm} dünne, $1\frac{1}{2}^{\text{mm}}$ breite und 45^{mm} lange Lamelle ($\frac{3}{4}$ Stäbchenlänge) als ein einziges Stück los mit einer zum Hauptschnitt muschligen Bruchfläche. Ich erwartete, derselbe Bruch würde an Stäbchen der einen oder anderen Richtung des Hauptschnitts sich später beim Zerschneiden während des Biegens (das zu beobachten ich sattsam Gelegenheit hatte) einstellen; doch war dies nie der Fall. Vielleicht gelingt es trotzdem noch, die Umstände festzustellen, unter denen er immer herbeigeführt werden kann.

In der Herstellungsart machte eine Abweichung sich bei den Stäbchen senkrecht zur Hauptaxe nöthig; Kupferdrath und Schmirgel rissen hier lauter kleine dreiseitige Pyramidchen aus dem Spath heraus und arbeiteten in Folge dessen so ruck- und stoßweise, daß mit ihnen gar keine Säule unversehrt herausgeschnitten werden konnte. Eingespannter Eisendrath (Claviersaitendrath) bot in diesem Falle brauchbaren Ersatz. In allen anderen Richtungen reichte die Kupfersäge aus.

Schleifen. Als Schleifmittel diente anfangs Wasser und Streusand, der vorher mit Glasplatte auf Glas möglichst fein und gleichmäßig zerrieben worden war. Der häufige Bruch der Stäbchen beim Schleifen veranlaßte mich indessen, andere Mittel als Quarz zu probiren, lange ohne Erfolg. Schmirgel, weit härter als der freilich sehr ungleichmäßige Streusand, erschien mir zu scharf. Spät erst wurde ich (von Herrn Prof. Zirkel) wiederholt auf Schmirgel hingewiesen. Ich zerrieb nunmehr feinsten

Schmirgel vor der Benutzung möglichst gleichmäÙig und war jetzt in der That in Stand gesetzt, schneller und besser zu schleifen als vorher.

Es ist mir auf diese Weise gelungen, die Stäbchen bis auf fast $\frac{1}{2}$ mm Dicke abzuschleifen.

Das Schleifen geschah in der Weise, daÙ ich mehrere rohe Stäbchen, wie sie die Drathsäge geliefert hatte, mit dickflüssigem Terpentin zu einer Platte zusammenklebte und diese dann mit der oben erwähnten Harzwachsmasse auf eine Glasplatte als Handhabe befestigte. So wurden der Reihe nach alle Seiten jedes Stäbchens mit Wasser und Schleifmittel auf einer Spiegeltafel so lange abgeschliffen bis die gewünschte Kleinheit des Querschnitts erreicht war.

Sehr störend war hierbei eine Erfahrung, die ich während der Hauptuntersuchung beim Abschleifen der Stäbchen *gewisser* Richtungen machen musste. Wie in früheren Fällen klebte ich zum Abschleifen der Schmalseite die Stäbchen zu je 6 zu einer Platte zusammen, mit den Breitseiten an einander, und schliff 4—6 solche Platten — ihrerseits wieder auf einer Glasplatte befestigt — gleichzeitig. Diesen Schliff, bei dem die Stäbchenbreite von 5 mm auf 4 mm gemindert werden sollte, hielten die Stäbchen zweier Richtungen, — 45° und — $22\frac{1}{2}^\circ$ nicht aus, sondern zersprangen trotz feinen Schleifmaterials in lauter kleine Stücke. Nach wenig Schleifzügen waren alle — 45° = und — $22\frac{1}{2}^\circ$ = Stäbchen ein Aggregat von kurzen Spaltungs-lamellen. Ich half mir so, daÙ ich parallel dem Hauptschnitt eine breitere Platte heraussägte, sie bis auf ca. 4 mm Dicke abschliff, polirte*) und nun erst in einzelne Stäbchen zersägte. Das ging leicht bei den — 45° Stäbchen von Statten, deren Breitseite einer Spaltungsfläche parallel ist, weniger gut bei den — $22\frac{1}{2}^\circ$ = Stäbchen, indem diese, sowie der Schnitt 3 mm tief eingedrungen war, parallel einer der Spaltungsflächen schräg absprangen,

*) s. w. u.

so daß die untere Schmalseite der Stäbchen abgeschrägt und dadurch bedeutend verschmälert wurde. Dieselbe Beobachtung, nur in noch höherem Grade, machte ich auch sonst, wenn ich mir Stäbchen durch Zerschneiden von Platten herzustellen suchte; deshalb war für andere Richtungen diese Herstellungsweise geradezu unmöglich.

Beim Breitseitenschliff zeigten sich namentlich die Stäbchen parallel der Hauptaxe sehr empfindlich; am Dauerhaftesten die $-45^\circ = \text{u.} + 67\frac{1}{2}^\circ$ -Stäbchen.

Poliren. Meine ursprüngliche Absicht ging dahin, alle Flächen der geschliffenen Stäbchen, etwa mit geschlemmtem Colcothar so zu poliren, daß ich genaue Winkelmessungen am Reflexionsgoniometer mit ihnen vornehmen könnte. Allein trotz vielfachen Probirens kam ich mit dieser Politur nicht weit; die fertigen Flächen reflectirten nur bei großem Einfallswinkel scharf. Ich mußte mich damit begnügen und hoffen, daß eine ganz genaue Winkelbestimmung der Längsaxenrichtung der Stäbchen nicht nothwendig seyn würde, was sich denn auch später herausstellte.

III.

Beobachtungsmethode.

Messapparat. Die Biegungsversuche wurden mit einem schon früher erwähnten Apparat des Neumann'schen Cabinets hergestellt. Es sei mir gestattet, hier seine Einrichtung zu beschreiben. (Siehe Figurentafel VI.)

Ein hartes festes Tischchen, das mit drei Stellschrauben horizontal gestellt werden kann, trägt auf seiner oberen Fläche eine 15^{mm} dicke Eisenplatte eingesenkt, deren mittleres Drittel wieder von einem starken mit Führungsbolzen versehenen Messingmaafsstab bedeckt ist. Längs desselben lassen zwei geschlitzte Messingschlitten mit Marke sich hin und herschieben und können mittelst Klemmschrauben fixirt werden. Die Schlitten tragen an den einander zugewandten Enden senkrechte, oben kantig

zugeschärfte Messingstützen zum Auflegen der zu biegenden Stäbchen. Messingstreifen und Eisenplatte sind in der Mitte durchbohrt. Ein hindurch gesenkter Stift trägt an seinem oberen Ende in einem kleinen, auf Stiften lose aufgesteckten Messinggestelle eine nach unten gekehrte Schneide, die auf dem Stäbchen aufliegt, unten an einem Haken hängt die Wagschale.

Die Senkung nach Auflegen der Gewichte wird gemessen mit Hülfe eines, vor dem Stäbchen festliegenden horizontalen Mikroskops (dasselbe ist zwar verstellbar, blieb indessen stets in seiner Lage). In diesem befindet sich ein Fadenkreuz, welches durch eine sehr gut gearbeitete Mikrometerschraube auf und ab bewegt werden kann. Um Bruchtheile von Umdrehungen ablesen zu können, ist die Schraubenmutter an ihrer äußeren Peripherie in 100 Theile getheilt. Die Ganghöhe der Schraube entspricht demnach 100 solchen Skalentheilen; 815 dieser Theile gehen auf 1^{mm}, wie eine directe Messung an einer sehr genau gearbeiteten Schubleere (aus Bessel's Nachlafs) ergab.

Die Belastung erfolgte anfangs ohne Weiteres mit behutsam aufgelegten Gewichten, bald aber mußte ich bemerken, daß trotz aller Ruhe kleine Stöße unausbleiblich waren. Diese zu vermeiden ward eine höchst einfache Arretur angebracht. Der Bügel der Wagschale wurde über die Mitte eines einarmigen Hebels gehängt, der um eine feste horizontale Axe drehbar ist, während das Ende des langen Hebelarmes auf einer excentrischen Scheibe schleift. Durch Drehung derselben an langem Kurbelgriff kann die Wagschale langsam, ohne jeden Stoß, auf und ab bewegt werden. Nachdem sie arretirt, belastet worden ist, beginnt erst, nach fast halber Umdrehung der Scheibe, der Druck der Gewichte auf die Stäbchen zu wirken.

Die beiden Messingträger, die man auf gleichem Abstand von der Mitte vor dem Mikroskop einstellt, sind außerdem an der scharfen Kante mit Theilung versehen;

auf deren Mitte wieder nun kommt das Stäbchen zu liegen und es drückt dann auch die Wagschale mit der Mitte ihrer Kante.

Bestimmung der Biegungen. Als Abstände der unterstützenden Schneiden (Stäbchenlänge l) wurden im Ganzen nur zwei gewählt, $l = 16''$ par. u. $l = 20''$ par.*) und für jeden derselben sämtliche Stäbchen durchbeobachtet; und zwar bei theils drei, theils vier verschiedenen Belastungen 1, (1'), 2, 2'.

Als Marke, auf die während des Biegens der Durchschnittpunkt des Fadenkreuzes eingestellt wurde, benutzte ich in den ersten Versuchen eine Stäbchenkante. Indefs erwies sich diese Einstellung als doch nicht scharf genug. Ich zog deshalb längs jeder Schmalseite in der Mitte ein Stückchen Spinnwebefaden auf; auf diesen war eine ziemlich scharfe Einstellung des Fadenkreuzcentrums möglich.

Jeder der Biegversuche wurde nun in folgender Weise angestellt. Die Arretur der belasteten Wagschale ward aufgehoben und auf das gebogene Stäbchen das Fadenkreuz eingestellt. Jetzt ward auf's Neue arretirt, nun eingestellt auf das zurückgegangene Stäbchen, und die Senkung, die vorher stattgefunden hatte, an der Mikrometerschraube abgelesen. Dasselbe wurde in kurzen Zwischenräumen dreimal hinter einander vorgenommen, also jedesmal drei gleichwerthige Messungen gemacht.

Zu weiterer Controle aber ward an jedem Stäbchen bei bestimmter Länge und Belastung nicht nur in einer, sondern in vier verschiedenen Lagen beobachtet; jedes Stäbchen ward nach der ersten dreifachen Beobachtung umgedreht, danach umgewendet, zuletzt nach dem Umwenden wieder umgedreht, so daß ein Punkt, den auf einer Breitseite ich mit Tinte markirte, der Reihe nach rechts oben, links oben, links unten, rechts unten zu liegen kam. Dieß ergab also für jedes Stäbchen bei bestimmter Länge und Belastung je 3 mal 4 Messungen, welche, wie die Tabellen ausweisen, als gleichwerthig anzusehen sind.

*) $36,2^{mm}$; $45,2^{mm}$;

IV.

Bestimmung der Dimensionen, der Winkel und der Gewichte.

Um die Resultate aller dieser Beobachtungsreihen unter einander vergleichen zu können, kam es vor Allem darauf an, die Dimensionen der Stäbchen einer genauen Messung zu unterwerfen. Denn obschon sämtliche hier benutzte Stäbchen parthienweis (auf nur zwei Male) geschliffen sind, so konnte es nicht fehlen, daß gleichwohl ihre Dimensionen kleine Abweichungen zeigen (bei gleichzeitig geschliffenen höchstens $\frac{1}{13}$ mm).

Die Verschiedenheiten der *Längen* waren gleichgültig, weil von jedem Stäbchen nur das Stück zwischen den beiden Trägern in Betracht kommt. Deren Abstand aber war in der angegebenen zweifachen Weise fixirt worden, um von Haus aus Reductionen thunlichst zu umgehen. Die Längen $l = 16''$ par. und $l = 20''$ par. wurden auf dem Messingmaßstab mit Hülfe der Loupe eingestellt.

Die geringen Unterschiede der *Breite* ferner sind zwar wenig von Einfluß, da diese in der Formel nur in erster Potenz im Nenner auftritt, doch wurden auch sie mittelst eines Mikroskops und Glasmikrometer genau bestimmt.

Um so wichtiger war die Messung der *Dicke*, weil diese in dritter Potenz in die Formel eingeht. Diese Messung ward an dem Biegungsapparat vorgenommen, und zwar für jedes Stäbchen in jenen vier verschiedenen Lagen und aus den gefundenen Werthen das Mittel gezogen.

Da es galt die beobachteten Biegungen als Functionen der Stäbchen*richtungen* aufzufassen, so mußte ferner sorgfältig geprüft werden, in wie weit die wirklichen Richtungen mit den beabsichtigten übereinstimmten. Zu diesen Messungen diente ein von Herrn Geh. Rath Hankel gütigst überlassenes Reflexionsgoniometer. Dieselben boten eine doppelte Schwierigkeit: die Stäbchen*form* war wenig handlich; und andererseits zerbrachen mehrere Stäbchen beim Anbrechen der nöthigen natürlichen Flächen. Dels-

halb stand ich von noch genaueren Messungen ab, da ich mich überzeugt hatte, daß die Abweichung meist $\frac{1}{2}$ bis 1° , und stets unter $1\frac{1}{2}^\circ$ betrug, eine gröfsere Genauigkeit aber nicht erforderlich schien.*)

Endlich damit die Abhängigkeit der Biegungen von dem *Gewicht* festgestellt werden konnte, waren diese genau nachzuwägen. Es waren ein 1-Lothstück und ein 2-Lothstück (altes preufs. Gewicht), die gerade als geeignet zur Hand waren, und ausserdem ein wohl justirtes 10-Grammstück benutzt worden; beim Wägen auf einer feiner Wage fanden sich jene $14_{,786}$ Gr. (Einlothstück) und $29_{,400}$ Gr. (Zweilothstück) schwer.

V.

Ergebnisse der Beobachtung.

In der nun folgenden Uebersicht der für die Senkung gefundenen Werthe sind alle Angaben in Skalentheilen

*) z. B. wurde beobachtet als Winkel

				der Breitseite		der Schmalseite	
				mit derselben Spaltungsfläche.			
0°	No. 1	44° 40'	(statt 45°)	)	91° 0'	(statt 90°)	
0°	No. 2	44° 10'	(" ")	)	91° 0'	" "	
22½°	No. 3	67° 0'	(" 67° 30')	)	89° 0'	" "	
22½°	No. 4	67° 0'	(" ")	)	89° 30'	" "	
45°	No. 5	90° 8'	(" 90°)	)	90° 4'	" "	
45°	No. 6	90° 4'	(" 90°)	)	91° 15'	" "	
67½°	No. 7	112° 50'	(" 112° 30')	)	90° 5'	" "	
67½°	No. 8	113°	(" ")	)	89° 50'	" "	
90°	No. 9	135° 26'	(" 135°)	)	90° 38'	" "	
90°	No. 10	135° 35'	(" ")	)	90° 40'	" "	
— 67½°	No. 11	158° 4'	(" 157° 30')	)	91° 8'	" "	
— 67½°	No. 12	157° 36'	(" ")	)	89° 50'	" "	
— 45°	No. 13	180°	(" 180°)	)	(vacat.) Die fehlenden		
— 45°	No. 14	180°	(" ")	)	6 Winkelmessungen		
— 22½°	No. 15	} (vacat)				konnte ich nicht vor-	
— 22½°	No. 16					nehmen, da es unmöglich	
						war, den nebenstehenden	
						Stäbchen <i>diese</i> bestimmte	
						Spaltungsfläche anzu-	
						brechen.	

der Miktrometerschraube des Apparats zu verstehen, 815 auf 1^{mm}.

In gleichem Maße sind die *Dicken* ausgedrückt.

Die Einheiten der *Breite* sind die Skalentheile des pag. 380 erwähnten Glasmikrometers von denen 41,7 auf 1 par Linie, 18,5 auf 1^{mm} gehen.

Gewichte: 1 14,786 Gr. (Verhältniß ders. 1

1' 24,286 „ : 1,6764

2 29,400 „ : 1,9885

2' 39,400 „ : 2,6918)

für jedes Stäbchen und jede Belastung sind, wie bereits erwähnt, 12 Beobachtungen gemacht, indem der auf der einen Breitseite liegende Punkt der Reihe nach rechts oben, l. o., l. u., r. u. zu liegen kam und in jeder Lage dreimal beobachtet ward, wie das nachstehende Beispiel zeigt.

Längsrichtung + 67½°

Länge 20''' par. (45,2^{mm}); Breite 75 (4,06^{mm});

Dicke 456 (⁴⁵⁶/₈₁₅^{mm}).

Gew.	P. r. o. *)			P. l. o.			P. l. u.			P. r. u.		
	s.											
1.	37.	36.	36.	37.	36.	36.	35.	37.	37.	35.	37.	37.
1'.	53.	53.	53.	52.	52.	52.	52.	53.	54.	52.	53.	53.
2.	60.	60.	60.	59.	60.	59.	60.	60.	59.	60.	60.	60.
2'.	77.	77.	78.	76.	77.	76.	76.	77.	77.	76.	78.	77.

Im Folgenden sind jedoch der Kürze halber aus den jedesmaligen 3 zusammengehörigen Werthen die Durchschnitte angegeben. Aus diesen wieder die arithmetischen Mittel, sind in Colonne m verzeichnet, genau bis auf halbe Skalentheile. In der nächsten stehen die Verhältnisse der im Mittel beobachteten Senkungen. Endlich enthalten die letzten Colonnen die auf *andere Dimensionen reducirten* Werthe der Senkungen unter *vorläufiger* Anwendung der Formel $s = \frac{l^3}{b d^3} s_1$. Und zwar ist erst jedesmal reducirt

*) „Punkt rechts oben.“

auf die Dicke des (daneben aufgeführten) Stäbchens derselben Richtung (Breite constant). Sodann durchweg auf *dieselbe Breite* β und *Dicke* δ . Gewählt wurde dazu das Mittel aller vorkommenden: Breite β 76 ($4,10^{\text{mm}}$); Dicke δ 514 Sk.-Thle. ($\frac{514}{815}^{\text{mm}}$). Schliesslich sind die Werthe der zweiten Gruppe (Länge 20''') auf die erste Länge 16''' reducirt worden durch Multiplikation mit $(\frac{16}{20})^3$ d. i. 0,51.

Stäbchen derselben Längsrichtung
mit *verschieden stehenden Seitenflächen*.

+ 45°

Breitseite parallel dem Hauptschnitt.

Länge 16,25''' par.; Breite 4,1^{mm}; Dicke 716 ($\frac{716}{815}^{\text{mm}}$).

G.	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.
	s.				
4*)	17	17 $\frac{1}{3}$	18	18 $\frac{2}{3}$	18
5.	22 $\frac{2}{3}$	23	22 $\frac{1}{3}$	23 $\frac{1}{3}$	23
6.	27 $\frac{1}{3}$	26 $\frac{2}{3}$	26 $\frac{1}{3}$	27 $\frac{1}{3}$	27

Stäbchen derselben Längsrichtung
mit *verschieden stehenden Seitenflächen*.

+ 45°

Schmalseite parallel dem Hauptschnitt.

Länge 16''' 25 par.; Breite 4,1^{mm}; Dicke 712 ($\frac{712}{815}^{\text{mm}}$).

G.	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.
	s.				
4	18 $\frac{1}{3}$	19	17 $\frac{2}{3}$	19	18,5
5	23 $\frac{1}{3}$	22 $\frac{2}{3}$	23 $\frac{1}{3}$	23 $\frac{2}{3}$	23
6	28	26 $\frac{2}{3}$	27 $\frac{1}{3}$	28 $\frac{1}{3}$	27,5

*) Diese Gewichte waren ein 4-Lothstück, 5-Lothstück, 6-Lothstück altes preuß. Gewicht.

Stäbchen mit Schmalseite im Hauptschnitt.

Länge 16''' par. (36,2^{mm}).

0° (Hauptaxe.)

Stäbchen No. 1.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 527 (⁵²⁷/₈₁₅).

G.	s.								G.	s.								reducirt auf $\beta\delta$
	P.r.o.	L.o.	l. u.	r. u.	m.	anfD.No.2	reducirt auf $\beta\delta$	P.r.o.		l. o.	l. u.	r. u.	m.	reducirt auf $\beta\delta$				
1	28	27 $\frac{1}{2}$	28	28 $\frac{1}{2}$	28	1	24,9	30,6	1	26	25 $\frac{3}{4}$	26 $\frac{1}{4}$	27	26	1	31,1		
2	47 $\frac{1}{2}$	46 $\frac{1}{2}$	47 $\frac{1}{2}$	47 $\frac{1}{2}$	47	: 1,7	41,8	51,3	2	44 $\frac{2}{3}$	44 $\frac{1}{3}$	43 $\frac{2}{3}$	44	44	: 1,7	52,6		
2'	62 $\frac{2}{3}$	62	61 $\frac{1}{3}$	63	62	: 2,2	55,1	67,7	2'	57	57	57	57	57	: 2,2	68,2		

Stäbchen No. 2.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 548 (⁵⁴⁸/₈₁₅).

+ 22 $\frac{1}{2}$ °.

Stäbchen No. 3.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 552 (⁵⁵²/₈₁₅).

G.	P.r.o.					l. o.	l. u.	r. u.	m.	reducirt		G.	P.r.o.					l. o.	l. u.	r. u.	m.	reducirt		aufD.No.3	auf $\beta\delta$	
	auf $\beta\delta$									auf $\beta\delta$																
	s.													s.												
1	22 $\frac{1}{2}$	23	22 $\frac{1}{2}$	22 $\frac{1}{2}$	23	1	28,8		1	25	25	24 $\frac{1}{2}$	25 $\frac{3}{4}$	25	1	23,2	28,3									
2	37	38	38 $\frac{1}{2}$	38	38	: 1,7	47,7		2	41 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	43 $\frac{1}{2}$	42	: 1,7	38,9	47,5									
2'	47 $\frac{2}{3}$	49 $\frac{1}{3}$	49 $\frac{1}{3}$	49 $\frac{2}{3}$	49	: 2,1	61,4		2'	53 $\frac{2}{3}$	53 $\frac{1}{3}$	53 $\frac{2}{3}$	56	55	: 2,2	50,9	62,2									

Stäbchen No. 4.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 538 (⁵³⁸/₈₁₅).

+ 45°.

Stäbchen No. 5.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 592 ($\frac{592}{815}$).

G.	s.					reducirt auf $\beta\delta$	
	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.		
1	13 $\frac{1}{2}$	13	13	13 $\frac{1}{2}$	13	1	20,0
2	21 $\frac{1}{2}$	21	21 $\frac{1}{2}$	22	22	2	34,0
2'	27	27	27 $\frac{1}{2}$	27	27	2'	42,0

Stäbchen No. 6.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 561 ($\frac{561}{815}$).

G.	s.					reducirt auf $\beta\delta$	
	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.		
1	15 $\frac{1}{2}$	14 $\frac{1}{2}$	14	15	15	1	12,8
2	25	24	24 $\frac{1}{2}$	25 $\frac{1}{2}$	25	: 1,7	21,3
2'	31 $\frac{1}{2}$	31 $\frac{1}{2}$	31 $\frac{1}{2}$	32 $\frac{1}{2}$	32	: 2,1	27,2

+ 67 $\frac{1}{2}$ ° (Kante 63° 44').

Stäbchen No. 7.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 563 ($\frac{563}{815}$).

G.	s.					reducirt auf No. 8 auf $\beta\delta$	
	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.		
1	11	11	11	10 $\frac{1}{2}$	11	1	9,5
2	18 $\frac{1}{2}$	17	18	18	18	: 1,6	16,0
2'	23 $\frac{1}{2}$	22	23	21 $\frac{1}{2}$	22	: 2,0	19,5

Stäbchen No. 8.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 586 ($\frac{586}{815}$).

G.	s.					reducirt auf $\beta\delta$	
	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.		
1	9 $\frac{1}{2}$	9	8 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{1}{2}$	9	1	13,0
2	16	15 $\frac{1}{2}$	15	16	16	: 1,8	23,5
2'	19	18 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{2}$	19 $\frac{1}{2}$	19	: 2,1	28,0

+ 90° (senkrecht zur Hauptaxe).

Stäbchen No. 9.*)

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 452 ($\frac{452}{815}$ mm).

Stäbchen No. 10.

Breite 75,5 (4,08^{mm}); Dicke 455 ($\frac{455}{815}$ mm).

G.	P.r.o.				s.				reducirt	
	l. o.	l. u.	r. u.	m.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	auf β	auf β
1	28	27	27 $\frac{1}{2}$	27	1	28	27 $\frac{1}{2}$	27	1	18,5
2	47 $\frac{1}{2}$	48	47 $\frac{1}{2}$	48	2	47 $\frac{1}{2}$	48	48	: 1,8	33,0
2'	60	60 $\frac{1}{2}$	60	61	60	61	60	60	: 2,2	41,5
1'	41 $\frac{1}{2}$	41	40 $\frac{1}{2}$	42 $\frac{1}{2}$	41	41	40 $\frac{1}{2}$	41	: 1,5	28,0

— 67 $\frac{1}{2}$ °.

Stäbchen No. 11.

Breite 76,5 (4,13^{mm}); Dicke 493 ($\frac{493}{815}$ mm).

Stäbchen No. 12.

Breite 76,5 (4,13^{mm}); Dicke 501 ($\frac{501}{815}$ mm).

G.	P.r.o.				s.				reducirt	
	l. o.	l. u.	r. u.	m.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	auf β	auf β
1	36 $\frac{1}{2}$	36 $\frac{1}{2}$	34 $\frac{1}{2}$	36	1	34,5	31,5	31,5	1	31,5
1	63 $\frac{1}{2}$	62 $\frac{1}{2}$	62 $\frac{1}{2}$	63	1	60,0	56,0	56,0	1,8	55,0
2'	80	81	79	80	2'	76,0	71,0	71,0	: 2,2	70,0
					1'	49 $\frac{1}{2}$	50	50 $\frac{1}{2}$	: 1,5	46,5

*) zerbrach gleich bei Beginn dieses Versuchs durch eine kleine Unvorsichtigkeit; zuvor waren mit ihm die Biegungen bei 19'' par. Länge bestimmt worden, siehe pag. 390.

— 45° (Rhombusdiagonale).

Stäbchen No. 13.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 431 ($\frac{431}{815}$ mm).

G.	s.					reducirt	
	P.r.o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	auf D. No. 14	auf $\beta \delta$
1	57 $\frac{1}{2}$	59	57 $\frac{1}{2}$	57	58	1	52,0
2	99	98 $\frac{1}{2}$	98 $\frac{1}{2}$	98 $\frac{1}{2}$	99	17	89,0
2'	124 $\frac{2}{3}$	125 $\frac{1}{3}$	125 $\frac{1}{3}$	126 $\frac{1}{3}$	126	22	113,0
1'	85	85 $\frac{1}{2}$	86 $\frac{1}{2}$	85 $\frac{1}{2}$	86	15	77,0
							51,5

Stäbchen No. 14.

Breite 77,5 (4,19^{mm}); Dicke 447 ($\frac{447}{815}$ mm).

G.	s.					reducirt auf $\beta \delta$	
	P.r.o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.		
1	51 $\frac{1}{2}$	51 $\frac{1}{2}$	50 $\frac{1}{2}$	49 $\frac{1}{2}$	51	1	34,0
2	88 $\frac{1}{2}$	88 $\frac{1}{2}$	87	85 $\frac{1}{2}$	87	: 1,7	58,5
2'	115	114	112	112 $\frac{1}{2}$	113	: 2,2	76,0
1'	78 $\frac{1}{2}$	77 $\frac{1}{2}$	75 $\frac{1}{2}$	74	76	: 1,5	51,0

— 22 $\frac{1}{2}$ °.

Stäbchen No. 15.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 466 ($\frac{466}{815}$ mm).*)

G.	s.					reducirt auf $\beta \delta$	
	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.		
1	41	41	42	42 $\frac{1}{2}$	42	1	31,0
2	71 $\frac{1}{2}$	71 $\frac{1}{2}$	71 $\frac{1}{2}$	73 $\frac{1}{2}$	72	1,7	53,0
2'	92 $\frac{1}{2}$	91	91	92	92	2,2	67,5

Stäbchen No. 16.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 522 ($\frac{522}{815}$ mm).

G.	s.					reducirt auf $\beta \delta$	
	P.r.o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.		
1	30½	32	34½	31	32	1	33,5
2	51½	53½	53½	51½	53	1,7	55,5
2'	67	69	67½	65½	67	2,1	70,5

*) Die Kante dieser Säule war beim Schleifen bruchig geworden, deshalb war eine genaue Dickenmessung unmöglich. Der Einfluß der zu geringen Dicke 466 zeigt sich denn auch in den reducirten Beobachtungen, noch besser in später erwähnten Curven.

25*

Länge 20" par. (45,2^{mm}).
0° (Hauptaxe).

Stäbchen No. 1 a.*)

Stäbchen No. 2 a.

Länge 17"; Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 527 ($\frac{527}{315}).$

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 548 ($\frac{548}{315}).$

G.	P. r. o.			l. o.	l. u.	m.	auf D. No. 2 a.			reducirt		auf β δ	auf L. 16'''	auf β δ	auf L. 16'''			
	s.						s.											
1	33 $\frac{1}{2}$	32 $\frac{1}{2}$	(35 $\frac{1}{2}$)	34	33	1	36,0	(59,5)	30,5	1	51	50	50 $\frac{1}{2}$	51	1	61,0	31,0	
1'	51	49 $\frac{1}{2}$	(54 $\frac{1}{2}$)	50 $\frac{1}{2}$	50,5	: 1,5	55,0	(91,0)	46,5	1'	72 $\frac{1}{2}$	74 $\frac{1}{2}$	74 $\frac{1}{2}$	74 $\frac{1}{2}$	: 1,5	88,5	45,0	
2	56	56 $\frac{1}{2}$	(63)	57 $\frac{1}{2}$	57	: 1,7	62,0	(102,5)	52,0	2	(93 $\frac{1}{2}$)	86 $\frac{1}{2}$	85 $\frac{1}{2}$	87	86,5	: 1,7	103,5	53,0
2'	72 $\frac{1}{2}$	73 $\frac{1}{2}$	(78)	73	73	: 2,2	79,5	(131,5)	67,0	2'	109	108 $\frac{1}{2}$	110 $\frac{1}{2}$	109 $\frac{1}{2}$	109,5	: 2,2	131,0	67,0

+ 22 $\frac{1}{2}$ °.

Stäbchen No. 3 a.

Stäbchen No. 4 a.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 552 ($\frac{552}{315}$).

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 538 ($\frac{538}{315}$).

G	P. r. o.					m.	reducirt					auf β δ	auf L. 16'''
	l. o.	l. u.	r. u.	r. u.	r. u.		l. o.	l. u.	r. u.	r. u.			
1	44	45	44	44	44	1	48 $\frac{1}{2}$	50	49	1	45,5	55,5	28,5
1'	64	65 $\frac{1}{2}$	64 $\frac{1}{2}$	65	64 $\frac{1}{2}$	1'	71	durch Unvor-	71	1,5	66,0	80,5	41,0
2	75 $\frac{1}{2}$	76 $\frac{1}{2}$	75 $\frac{1}{2}$	76	76	2	83 $\frac{1}{2}$	sichtigkeit zer-	83	1,7	77,0	94,0	48,0
2'	95	96 $\frac{1}{2}$	96	96	96 $\frac{1}{2}$	2'	106 $\frac{1}{2}$	brochen.	107	2,2	99,0	121,0	61,5

*) Das Stäbchen No. 1 oder 1 a. war für 20" zu kurz, konnte nur bei 17" beobachtet werden. Die dabei gefundenen Biegungen sind reducirt auf L = 20", es sind die in Colonne β δ stehenden eingeklammerten Werthe. Die übrigen Reductionen auf D. No. 2 a. wurden unterlassen. Die in Colonne l. u. eingeklammerten Beobachtungen verdanken ihre Größe jedenfalls einer nicht gefundenen kleinen Störung.

+ 45°.

Stäbchen No. 5 a.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 592 ($\frac{592}{813}$ mm).

G.	s.				P. r. o.	s.				P. r. o.	s.				auf L. 16'''	auf β δ	reducirt
	l. o.	l. u.	r. u.	m.		l. o.	l. u.	r. u.	m.		l. o.	l. u.	r. u.	m.			
1	23 $\frac{1}{2}$	25	24 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{1}{2}$	1	30	29	29 $\frac{1}{2}$	29 $\frac{1}{2}$	1	30	29	29 $\frac{1}{2}$	29 $\frac{1}{2}$	19,5	38,0	
1'	37	37	36 $\frac{1}{2}$	36 $\frac{1}{2}$	1,5	1'	41 $\frac{1}{2}$	41	41		1'	41 $\frac{1}{2}$	41	41	29,0	57,0	
2	40 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	41	1,7	2	46 $\frac{1}{2}$	46	47 $\frac{1}{2}$		2	46 $\frac{1}{2}$	47	46 $\frac{1}{2}$	32,5	63,5	
2'	51 $\frac{1}{2}$	52 $\frac{1}{2}$	51 $\frac{1}{2}$	52	2,1	2'	59 $\frac{1}{2}$	58 $\frac{1}{2}$	60		2'	59 $\frac{1}{2}$	61	60	41,0	80,5	

Stäbchen No. 6 a.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 561 ($\frac{561}{813}$ mm).

G.	s.				P. r. o.	s.				auf L. 16'''	auf β δ	reducirt
	l. o.	l. u.	r. u.	m.		l. o.	l. u.	r. u.	m.			
1	23 $\frac{1}{2}$	25	24 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{1}{2}$	1	30	29	29 $\frac{1}{2}$	29 $\frac{1}{2}$	1	25,0	39,0
1'	37	37	36 $\frac{1}{2}$	36 $\frac{1}{2}$	1,5	1'	41 $\frac{1}{2}$	41	41		1,4	35,0
2	40 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	41	1,7	2	46 $\frac{1}{2}$	46	47 $\frac{1}{2}$		1,6	40,0
2'	51 $\frac{1}{2}$	52 $\frac{1}{2}$	51 $\frac{1}{2}$	52	2,1	2'	59 $\frac{1}{2}$	58 $\frac{1}{2}$	60		2,0	51,0
												79,0
												40,5

+ 67 $\frac{1}{2}$ ° (Kante 63° 44').

Stäbchen No. 7 a.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 563 ($\frac{563}{813}$ mm).

G.	s.				P. r. o.	s.				auf D. No. 8 a.	auf L. 16'''	auf β δ	reducirt
	l. o.	l. u.	r. u.	m.		l. o.	l. u.	r. u.	m.				
1	18 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{2}$	18,5	1	15 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{2}$	16		12,0	24,0	
1'	26 $\frac{1}{2}$	26 $\frac{1}{2}$	26 $\frac{1}{2}$	27	1,4	1'	24 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{1}{2}$	24,5		18,0	35,0	
2	30	30 $\frac{1}{2}$	30	31	1,4	2	28 $\frac{1}{2}$	27 $\frac{1}{2}$	28		20,0	39,0	
2'	38 $\frac{1}{2}$	39	39 $\frac{1}{2}$	39	1,7	2'	34 $\frac{1}{2}$	35 $\frac{1}{2}$	35		26,0	50,5	

Stäbchen No. 8 a.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 586 ($\frac{586}{813}$ mm).

G.	s.				P. r. o.	s.				auf β δ	auf L. 16'''	reducirt
	l. o.	l. u.	r. u.	m.		l. o.	l. u.	r. u.	m.			
1	18 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{2}$	18,5	1	15 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{2}$	16		23,5	11,5
1'	26 $\frac{1}{2}$	26 $\frac{1}{2}$	26 $\frac{1}{2}$	27	1,4	1'	24 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{1}{2}$	24,5		36,0	18,5
2	30	30 $\frac{1}{2}$	30	31	1,4	2	28 $\frac{1}{2}$	27 $\frac{1}{2}$	28		41,0	21,0
2'	38 $\frac{1}{2}$	39	39 $\frac{1}{2}$	39	1,7	2'	34 $\frac{1}{2}$	35 $\frac{1}{2}$	35		51,0	26,0

+ 90° (senkrecht zur Hauptaxe).

Stäbchen No. 9 a.

Stäbchen No. 10 a.

Länge 19''*); Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 452 ($\frac{452}{315}$).Breite 75,5 (4,08^{mm}); Dicke 455 ($\frac{455}{315}$).

G.	s.					s.					s.				
	P.r.o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	auf D. No. 10a.	reducirt auf β δ	auf L. 16''' G.	P.r.o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	reducirt auf β δ	auf L. 16'''
2	50	51 $\frac{1}{2}$	51		51	1	58,5	34,0 (39,9)	1	55 $\frac{1}{2}$	56	56	56	1	38,5
1'	73	75	73 $\frac{1}{2}$		74	: 1,5	84,5	49,5 (58,0)	1'	82	82 $\frac{1}{2}$	83	82	: 1,5	56,5
2	83	84 $\frac{1}{2}$	83 $\frac{1}{2}$		84	: 1,6	96,0	56,5 (65,5)	2	95 $\frac{1}{2}$	95 $\frac{1}{2}$	95 $\frac{1}{2}$	96	: 1,7	66,0
2'	109	109 $\frac{1}{2}$			109	: 2,1	124,5	73,0 (85,0)	2'	123	123	122	122,5	: 2,2	84,5
															43,0

— 67 $\frac{1}{2}$.

Stäbchen No. 11 a.

Stäbchen No. 12 a.

Breite 76,5 (4,13^{mm}); Dicke 493 ($\frac{493}{315}$).Breite 76,5 (4,13^{mm}); Dicke 501 ($\frac{501}{315}$).

G.	s.					s.					s.						
	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	auf D. No. 12 ^a .	reducirt auf β δ		auf L. 16''' G.	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	reducirt auf β δ		auf L. 16'
1	71	70 $\frac{1}{2}$	72	71 $\frac{1}{2}$	71	1	67,5	63,0	1	68	65 $\frac{1}{2}$	66	66 $\frac{1}{2}$	66,5	1	62,5	32,0
1'	103 $\frac{1}{2}$	103 $\frac{1}{2}$	104 $\frac{1}{2}$	104	: 1,5	99,0	92,5	47,5	1'	100 $\frac{1}{2}$	98 $\frac{1}{2}$	98 $\frac{1}{2}$	98 $\frac{1}{2}$	99	: 1,5	92,0	47,0
2	117 $\frac{1}{2}$	119	118 $\frac{1}{2}$	118,5	: 1,7	113,0	105,0	53,5	2	112	112	112 $\frac{1}{2}$	112 $\frac{1}{2}$	112	: 1,7	104,5	53,0
2'	153 $\frac{1}{2}$	154 $\frac{1}{2}$	154 $\frac{1}{2}$	153 $\frac{1}{2}$	154	: 2,2	146,5	136,0	2'	144	144	143 $\frac{1}{2}$	143 $\frac{1}{2}$	144	: 2,2	134,0	68,5

*) auch bei diesem Stäbchen 9 a. reichte die Länge für 20'' nicht aus, es konnte nur bei 19'' beobachtet werden. Die Reductionen auf L. 20'' sind in den eingeklammerten Werthen der Colonne δ β enthalten. Bei der Reduction auf D. No. 10 a. ist L. zu 20'' zu Grunde gelegt.

VI.

Folgerungen.

Der Betrag der Senkung in der Mitte der gebogenen Stäbchen ist eine Function von mancherlei Argumenten; die beobachteten Werthe nun gestatten Schlüsse auf die Natur dieser Function. Und zwar soll die Senkung der Reihe nach in ihrer

Abhängigkeit von der Stellung der Seitenflächen,
 von den Dimensionen, der Dicke und Breite,
 der Länge,
 von den Richtungen,
 von dem Gewicht

betrachtet werden.

Abhängigkeit von der Stellung der Seitenflächen. Was die *erste* Abhängigkeit, die *von der Stellung der Seitenflächen* anlangt, so hatte schon die Eingangs erwähnte Umlegung eines quadratischen Stäbchens *vermuthen* lassen, daß eine solche nicht stattfindet. Die erste der vorstehenden Tabellen nun giebt die Beobachtungen an zwei Stäbchen von derselben Richtung und fast denselben Dimensionen, deren Breitseiten die abweichendsten möglichen Stellungen haben. Aus diesen geht vielleicht zur Genüge hervor:

1. die Biegung eines Stäbchens ist unabhängig von der Stellung der Seitenfläche.

Abhängigkeit von den Dimensionen der Dicke und Breite. In Betreff sodann der *Dimensionen* ist zu untersuchen, in wie weit die Formel für unkrystallinische Medien

$$s = \frac{l^3}{b d^3} s_1$$

auch hier ihre Gültigkeit behält.

Mit der Dicke ist die beim Biegen verticale, dem Zuge der Gewichte parallele, *hier* kleinste Dimension gemeint, während die Breite in der obern oder untern Fläche liegt.

Zuerst liefs sich an sämmtlichen Paaren von Stäbchen gleicher Richtung, gleicher Länge, (fast) gleicher Breite darthun, daß für die *Dicke* das Gesetz — immer selbstverständlich gemeint: innerhalb der Genauigkeitsgrenzen — auch hier bei dem krystallinischen Material *dasselbe* bleibt: vergleiche die auf Grund dieses Gesetzes berechneten ersten Reductions-Colonnen.

Für die *Breiten* konnten zwar, wegen der nur sehr geringen Unterschiede *separate*, entscheidende Reductionen nicht vorgenommen werden, sondern immer nur solche gleichzeitig mit denen für die andern Dimensionen, indess ist eine Abweichung von jenem Gesetze gerade für sie in keiner Weise wahrscheinlich.

Hiernach müßte es also als erlaubt angesehen werden, alle die verschiedenen wirklichen Breiten und Dicken auf eine und dieselbe angenommene mittlere β und δ zu reduciren, — zweite Reductionscolonne; so daß nur noch die Abhängigkeit von der Länge, die von den Richtungen und den Gewichten übrig blieb.

Abhängigkeit von der Länge. Auch hinsichtlich der *Längen* findet das Gesetz für unkrystallinische Stäbe sich hier ebenfalls ausreichend bestätigt — wie in der Gruppe für Länge 20", nach bereits erfolgter Reduction wegen Breite und Dicke, die *dritte* Reductions-Colonne ausweist.

Somit ergibt sich im Ganzen:

2. Die Biegung hängt — innerhalb der Genauigkeitsgrenzen — von den Dimensionen in der nämlichen Weise ab, wie bei unkrystallinischen Medien: sie ist wie dort

direct proportional dem Cubus der Länge,
indirect proportional der Breite,
indirect proportional dem Cubus der Dicke.

Abhängigkeit von den Richtungen. Von besonderer Wichtigkeit ist nunmehr, wie die Biegung mit den Richtungen der Längsaxe im Hauptschnitt sich ändert.

Diese Abhängigkeit wird veranschaulicht durch die Curven auf der angehängten Figurentafel. Den Biegungen, sämmtlich ungerechnet für die *eine* angenommene Breite und Dicke, proportional sind von einem Punkt aus in den betrachteten Richtungen Radiivectores aufgetragen.

Die rechte Gruppe von 3 Curven entspricht der Länge 16''' bei dreierlei Belastung, die 4 gestrichelten Curven links ergeben sich für die andere Länge von 20''' bei 4 verschiedenen Belastungen, während die punktirten Curven der Reduction auf die Länge 16''' entspringen.

Muß nun auch eine vollständige Discussion dieses Curvensystems ausgesetzt werden, bis eine Gleichung für dasselbe auf theoretischem Wege aufgefunden ist, so lassen sich doch bereits eine Reihe sehr bemerkenswerther Eigenschaften an ihm erkennen.

Dafs die Curven parallelläufig sind, d. h. nach jeder Richtung einen *Diameter* besitzen, der halbirt wird und in congruente Hälften theilt, folgt mit Nothwendigkeit daraus, dafs hier eine Richtung von ihrer entgegengesetzten physikalisch nicht unterschieden ist.

Vor Allem fällt in die Augen, zuwider dem, was auf Grund optischer und thermischer Thatsachen sich hätte vermuthen lassen können:

3. Es existirt keine Symmetrie gegen die Hauptaxe.

Vielmehr zeichnen sich die im Krystalle ausgezeichneten Richtungen rechts- und linksum von der Hauptaxe auch in der Biegungcurve aus:

4. bei Stäbchen nach Richtungen der Kante findet Minimum der Biegung

und

5. bei solchen nach Richtung der kurzen Rhombusdiagonale Maximum der Biegung statt.

Eine der merkwürdigsten auftretenden Erscheinungen ist aber wohl die folgende.

Legt man um die Curve ein Parallelogramm, das Diagonalschnitt einer rhomboedriscen Grundform ist, und von der Gröfse, dafs die beiden Langseiten (die Rhombus-

diagonalen) die Curve tangiren, so *tangirt* (dem Anscheine nach) *auch das andere Seitenpaar* (die Kanten).

Es war von Interesse die Eigenschaften der Biegungscurve im Hauptschnitt als Eigenschaften einer Biegungsoberfläche auszusprechen, und es galt diese nach Möglichkeit zu construiren.

Da alle Werthe im Hauptschnitt durch *eine* Kante für jede der 3 oberen und der 3 unteren Kanten sich wiederholen müssen, so hatte ich schon 6 verschiedene Constructionsebenen, die ich zusammensetzen konnte. In der oberen wie in der unteren Hälfte wechseln Aus- und Einbiegungen unter einander ab. Ueberlegte ich nun ferner, daß in einem Hauptschnitt normal zum jetzigen (ein Hauptschnitt II., dessen Untersuchung noch bevorsteht) Symmetrie zur Hauptaxe statthaben, und daß er den Uebergang von einer Aus- zu einer Einbuchtung vermitteln muß; und schaltete ich demgemäß passende symmetrische Ovale ein: so hatte ich bereits ein leidlich vollständiges Bild der Biegungsoberfläche fertig.

Wenn nun im Hauptschnitt Kante sowohl, als Rhombendiagonale tangiren, so wird die Oberfläche in Punkten zweier Kanten und einer Rhombendiagonale von einer *Seitenfläche* tangirt.

Dann aber ist es in hohem Grade wahrscheinlich, daß diese auch die zwischenliegenden Schnitte berühre; kurz:

6. es scheint, daß die Biegungsoberfläche von allen Flächen einer rhomboedriscen Grundform längs einer Curve tangirt werde.

Was die Krümmung anlangt, so hat es weiterhin den Anschein, als ob die Hauptaxenrichtung auf der Curve, bezüglich der Oberfläche normal stehe, es also Hornpunkte nicht gebe.

Abhängigkeit von den Gewichten. Zum Schlusse ist noch zu untersuchen, wie bei derselben Längsrichtung, denselben Dimensionen, die Größe der Biegungen

mit den *Gewichten* sich ändert. Und hier gelangt man nun zu einem jedenfalls ganz unerwarteten Resultate.

Das Erste, was beim Betrachten der für die verschiedenen Belastungen enthaltenen Curven in die Augen fällt, war nicht anders zu vermuthen: Die Curven sind *ähnlich*, das will besagen: die Abhängigkeit der Biegungen von den Gewichten ist nach allen Richtungen hin dieselbe, nicht nach anderer Richtung hin eine andere.

Nun aber zeigt sich zweitens, daß diese Abhängigkeit die folgende ist:

Verhältni- nisse der Gewichte.	Verhältnisse der zugehörigen Biegungen.
1	1 d. i. 1
: 1,68	: 1,5 d. i. 1,68 . 0,90 oder 1,68—1,50 = 0,18
: 1,99	: 1,7 d. i. 1,99 . 0,86 oder 1,99—1,7 = 0,29
: 2,69	: 2,2 d. i. 2,69 . 0,82 oder 2,69—2,2 = 0,49

Dies findet sich mit einer Uebereinstimmung, die Zweifel ausschließt und findet sich noch lange vor der Nähe der Elasticitätsgrenze, d. h. also:

7. die Biegungen sind nicht proportional den Gewichten.

Vielmehr nur einem Bruchtheile derselben und zwar *einem um so kleineren, je größer das Gewicht*; oder:

8. die Zunahme der Biegungen wird geringer bei größerem Gewicht,
und dies schon in reichlicher Entfernung an der Elasticitätsgrenze.

Trägt man die Gewichte als Abscissen, die Biegungen als Ordinaten auf, so steigt die Curve nicht ganz gerade-linig, sondern folgendermaßen an:

Das gefundene negative Resultat muß allerdings elasticitätstheoretischen Betrachtungen gegenüber in hohem Grade befremden. Zu seiner Erklärung scheint etwas anderes kaum übrig zu bleiben, als daß die linearen Differentialgleichungen der Elasticität hier im Krystall ihre Gültigkeit *verlieren*.

Um indeß für positive Aufschlüsse hierüber einen Anhalt zu gewinnen, wird es vor Allem weiterer Beobachtungen mit noch anderen Gewichten bedürfen.

Die Resultate der Untersuchung des zweiten Hauptschnitts, und einer zur Axe normalen Ebene, die ich in nächster Zeit abzuschließen gedenke, sowie Untersuchungen über elastische Nachwirkung beim Kalkspath werde ich in einer zweiten Abhandlung folgen lassen. Es werden sich daran einige theoretische Betrachtungen anschließen.

Nachtrag: Hr. Geh. R. Neumann hat in neuester Zeit eine ganz allgemeine Theorie der Elasticitätsverhältnisse krystallinischer Körper entwickelt, die nur auf der Annahme fußt, daß den äußeren Symmetrieverhältnissen der Krystalle die gleichen im Innern entsprechen. Die obigen experimentellen Daten stimmen mit ihren Ergebnissen völlig überein.