Sulla unicità degli sviluppi delle funzioni di una variabile in serie di funzioni X_n .

APPENDICE ALLA MEMORIA PRECEDENTE

(del prof. ULISSE DINI, a Pisa.)

A rendere più completi gli studi che ho fatto nella Memoria che precede intorno agli sviluppi delle funzioni di una o di due variabili in serie di funzioni X_n e Y_n , occorrerebbe anche fare vedere che tali sviluppi non possono farsi che in un sol modo. Fino a questi ultimi tempi si era creduto di potere dimostrare questa proprietà per mezzo della integrazione per serie, ma la dimostrazione che se ne dava, quando non si facesse alcuna limitazione intorno alla natura della serie, era tutt'altro che rigorosa. Io ho cercato perciò di dimostrare rigorosamente questa proprietà, almeno pel caso delle funzioni di una sola variabile, e ora sono giunto a dimostrare anche più in generale che « se $f(x)$ è una funzione di x che fra -1 e 1 è sempre « determinata e finita o cessa di essere tale soltanto in un numero finito « di punti o in un gruppo infinito di punti di prima specie (*), non possono « esistere due serie distinte di funzioni X_n , $\sum a_n X_n$, $\sum a'_n X_n$ che rappresen- « tino la stessa funzione $f(x)$ per tutti i valori di x fra -1 e 1 , o anche « soltanto pei valori di x che restano nello stesso intervallo da -1 a 1

(*) Per la definizione e per le proprietà dei gruppi di punti può vedersi la Memoria di CANTOR: *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (Mathem. Annalen herausgeg. von CLEBSCH und NEUMANN, V. Band, p. 128), notando però che io chiamo qui gruppi di punti i Punktmenge di CANTOR, e gruppi di punti di prima specie quelli che hanno un numero finito ν di gruppi derivati (abgeleitete Punktmenge), e che CANTOR chiama Punktmenge von der ν^{ten} Art.

« quando si tolgono quelli corrispondenti a un numero finito di punti o a « un gruppo infinito di punti di prima specie »; e la mia dimostrazione è la seguente.

Incominciamo dall'osservare che, se esistessero le due serie qui dette $\sum a_n X_n$, $\sum a'_n X_n$, dovrebbe esistere una terza serie $\sum A_n X_n$ che per tutti i valori di x fra -1 e 1 , eccettuati tutt'al più quelli corrispondenti a un numero finito di punti o a un gruppo infinito di punti di prima specie, avessero sempre per somma zero, e i cui coefficienti A_n non fossero tutti uguali a zero; e quindi pel teorema che vogliamo dimostrare basterà fare vedere che una tal serie non può esistere.

Ammettiamo perciò che una tal serie possa esistere, e sia la serie $\sum A_n X_n$; si avrà $\sum A_n X_n = 0$ per tutti i valori di x da -1 a 1 , tranne tutt'al più per quelli corrispondenti a un numero finito di punti o a un gruppo infinito di punti di prima specie; quindi, escludendo questi punti singolari (se esistono) con un numero finito d'intervalli piccoli quanto si vuole $i_1, i_2, i_3, \dots$, negli intervalli restanti $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ si avrà sempre $\sum A_n X_n = 0$; e perciò in questi intervalli le quantità $A_n X_n$ col crescere indefinito di n tenderanno sempre a zero.

Ora, ponendo $x = \cos \theta$, e indicando con ε un numero differente da zero e positivo, piccolo quanto si vuole, per tutti i valori di θ fra ε e $\pi - \varepsilon$ si avrà la formola seguente (vedi BONNET: *Sur les développements des fonctions en séries ordonnées suivant les fonctions X_n et Y_n* ; Journal de LIOUVILLE, ser. I, tom. XVII, pag. 270):

$$X_n = \frac{2 \cos \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2n\pi} \sin \theta} \left(1 + \frac{(-1)^n}{4n} \right) + \frac{\cot \theta \sin \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{4n \sqrt{2n\pi} \sin \theta} + \frac{p_n}{n^2 \sqrt{n}}, \quad (1)$$

ove $\rho = \frac{2n+1}{2}$, e p_n col crescere indefinito di n , restando però fisso ε , si mantiene sempre numericamente inferiore ad un numero finito ed è una funzione continua di θ ; quindi sarà:

$$A_n X_n = \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi} \sin \theta} \left\{ 2 \cos \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right) \left(1 + \frac{(-1)^n}{4n} \right) + \frac{\cot \theta \sin \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{4n} + \frac{p_n \sqrt{2\pi} \sin \theta}{n^2} \right\};$$

e ora, siccome per quanto abbiamo detto sopra, in uno o più intervalli finiti fra ε e $\pi - \varepsilon$ le quantità $A_n X_n$ tendono sempre a zero col crescere indefinitamente di n , ripetendo i ragionamenti fatti da CANTOR nella sua Memoria:

Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz (Giornale di BORCHARDT, vol. 72, pag. 135 e seg.), coll'osservare anche che gli ultimi tre termini fra parentesi col crescere indefinito di n tendono a zero, si concluderà intanto che se i coefficienti A_n non tendono essi pure a zero col crescere indefinito di n (*), vi tenderanno però sempre le quantità $\frac{A_n}{\sqrt{n}}$.

Di qui risulta che la serie $\sum \frac{A_n p_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{n}}$ è convergente per tutti i valori di θ fra ε e $\pi - \varepsilon$; e quindi in tutti gli intervalli $\mu_1, \mu_2, \dots$ fra ε e $\pi - \varepsilon$ che corrispondono agli antichi intervalli $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ nei quali non cadono punti singolari, si avrà sempre:

$$\sum \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left\{ 2 \sin \theta \cos \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right) \left(1 + \frac{(-1)^n}{4n} \right) + \frac{2 \cos \theta \sin \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{8n} \right\} + \sum \frac{A_n p_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{n}} = 0,$$

o anche:

$$\sum \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left\{ \left(1 + \frac{(-1)^n}{4n} \right) \left[\sin \left((\rho + 1) \theta - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left((\rho - 1) \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\sin \left[(\rho + 1) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \sin \left[(\rho - 1) \theta - \frac{\pi}{4} \right]}{8n} \right\} + \sum \frac{A_n p_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{n}} = 0,$$

e perciò in tutti gli intervalli $\mu_1, \mu_2, \dots$ fra ε e $\pi - \varepsilon$ la prima serie del primo membro sarà convergente, e avrà per somma una funzione $\phi(\theta)$ di θ .

Ora, poichè le quantità $\frac{A_n}{\sqrt{n}}$ tendono a zero col crescere indefinito di n , la stessa serie si può evidentemente ridurre ad una serie trigonometrica:

$$\sum \alpha_n \sin \left[(\rho + 1) \theta - \frac{\pi}{4} \right]$$

nella quale i coefficienti α_n tendono a zero col crescere indefinito di n ; quindi, per un teorema dato da RIEMANN nella sua Memoria: *Ueber die Darstellung einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (Göttingen, 1867) la serie:

(*) Questo accade sempre tutte le volte che uno almeno dei punti 1 e -1 non è un punto singolare, perchè allora una almeno delle due serie $\sum A_n$, $\sum (-1)^n A_n$ è convergente.

$$-\sum \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left\{ \left(1 + \frac{(-1)^n}{4n} \right) \left[\frac{\sin \left[(\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{(\rho+1)^2} - \frac{\sin \left[(\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{(\rho-1)^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{8n} \left[\frac{\sin \left[(\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{(\rho+1)^2} + \frac{\sin \left[(\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{(\rho-1)^2} \right] \right\}$$

rappresenterà una funzione $\phi_1(\theta)$ di θ finita e continua, che in ogni punto θ negli intervalli $\mu_1, \mu_2, \dots$ fra ε e $\pi - \varepsilon$ (*) soddisfarà alla condizione:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\phi_1(\theta+\alpha) - 2\phi_1(\theta) + \phi_1(\theta-\alpha)}{\alpha^2} = \phi(\theta) = -\sum \frac{A_n p_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{\pi}},$$

e per tutti i punti θ fra ε e $\pi - \varepsilon$ senza distinzione soddisfarà all'altra:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\phi_1(\theta+\alpha) - 2\phi_1(\theta) + \phi_1(\theta-\alpha)}{\alpha} = 0.$$

D'altra parte, siccome la serie $\sum \frac{A_n p_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{\pi}}$ è anche convergente in ugual grado fra ε e $\pi - \varepsilon$, se si pone $\psi(\theta) = \sum \frac{A_n p_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{\pi}}$, $\psi(\theta)$ sarà una funzione finita e continua di θ , e si avrà:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \psi(\theta) d\theta = \sum \frac{A_n}{n^2 \sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} p_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta d\theta;$$

quindi fra ε e $\pi - \varepsilon$ la serie del secondo membro sarà una funzione di θ finita e continua $\psi_1(\theta)$ che soddisfarà alle due condizioni:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\psi_1(\theta+\alpha) - 2\psi_1(\theta) + \psi_1(\theta-\alpha)}{\alpha^2} = \psi(\theta) = \sum \frac{A_n p_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{\pi}}, \\ \lim_{\alpha=0} \frac{\psi_1(\theta+\alpha) - 2\psi_1(\theta) + \psi_1(\theta-\alpha)}{\alpha} = 0;$$

(*) Qui parrebbe a prima vista che si dovessero escludere i punti ε e $\pi - \varepsilon$ e gli estremi degli intervalli $\mu_1, \mu_2, \dots$ quando anche questi intervalli vengono presi in considerazione. Però, siccome il numero ε può sempre impiccolirsi e gli intervalli $i_1, i_2, i_3, \dots$ che escludono i punti singolari possono supporre scelti in modo che possano prendersi anche intervalli più piccoli di quelli che qui abbiamo preso, s'intende subito che la indicata esclusione sarebbe per lo meno inutile.

e conseguentemente la funzione $\phi_1(\theta) + \psi_1(\theta)$ sarà una funzione $F(\theta)$ che fra ε e $\pi - \varepsilon$ è sempre finita e continua e soddisfa alla condizione:

$$\lim_{\alpha} \frac{F(\theta + \alpha) - 2F(\theta) + F(\theta - \alpha)}{\alpha} = 0,$$

e negli intervalli $\mu_1, \mu_2, \dots$ fra ε e $\pi - \varepsilon$ soddisfa altresì all'altra:

$$\lim_{\alpha^2} \frac{F(\theta + \alpha) - 2F(\theta) + F(\theta - \alpha)}{\alpha^2} = 0.$$

Questo, per una osservazione fatta da CANTOR nella Memoria che ho già citata in principio, porta subito a dire che la funzione $F(\theta)$ è una funzione di primo grado $c\theta + c'$ in tutto l'intervallo fra ε e $\pi - \varepsilon$; quindi nello stesso intervallo si avrà:

$$\begin{aligned} & - \sum \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left\{ \left(1 + \frac{(-1)^n}{4n} \right) \left[\frac{\text{sen} \left[(\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{(\rho+1)^2} - \frac{\text{sen} \left[(\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{(\rho-1)^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8n} \left[\frac{\text{sen} \left[(\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{(\rho+1)^2} + \frac{\text{sen} \left[(\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{(\rho-1)^2} \right] \right\} + \sum \frac{A_n}{n^2 \sqrt{n}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} p_n \text{sen}^{\frac{3}{2}} \theta d\theta = c\theta + c', \end{aligned}$$

e alle serie del primo membro sarà anche applicabile una o più volte la integrazione definita in ogni intervallo fra ε e $\pi - \varepsilon$, giacchè esse sono convergenti in ugual grado.

Ora, si ha evidentemente:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen} \left[(\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{(\rho+1)^2} &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \text{sen} \left[(\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4} \right] d\theta + \frac{\text{sen}(n+1)\frac{\pi}{2}}{(\rho+1)^2} + \\ & \quad + \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\rho+1} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \\ \frac{\text{sen} \left[(\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{(\rho-1)^2} &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \text{sen} \left[(\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right] d\theta - \frac{\text{sen}(n+1)\frac{\pi}{2}}{(\rho-1)^2} - \\ & \quad - \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\rho-1} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right); \end{aligned}$$

quindi sostituendo nella formola precedente, e avendo riguardo alla formola (1) e alla circostanza che quelle serie, che oltre ad avere il $\sqrt{n}$ al denominatore hanno anche un altro divisore che è almeno di second'ordine, come $(\rho \pm 1)^2$, $n(\rho \pm 1), \dots$, sono tutte convergenti, mentre invece si è incerti sulla convergenza della serie $\sum \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \cos(n+1) \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\rho+1} + \frac{1}{\rho-1} \right)$, si avrà:

$$\sum A_n \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta d\theta - \frac{\cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}} \left(\frac{1}{\rho+1} + \frac{1}{\rho-1} \right) \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right\} = c_1 \theta + c'_1;$$

e siccome $\frac{1}{\rho+1} + \frac{1}{\rho-1} = \frac{2}{n+1} + \frac{c_n}{n^2}$ ove c_n è sempre inferiore a un numero finito, e il secondo membro di questa eguaglianza deve annullarsi per $\theta = \frac{\pi}{2}$ come si annulla il primo, si potrà anche scrivere:

$$\sum A_n \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta d\theta - \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{(n+1) \sqrt{2n\pi}} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right\} = c_2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \quad (2)$$

ove c_2 è una nuova costante; e alla serie del primo membro potrà ancora applicarsi una o più volte l'integrazione definita termine a termine in ogni intervallo compreso fra ε e $\pi - \varepsilon$.

Si osservi ora che quando θ è compreso fra ε e $\pi - \varepsilon$ con una doppia integrazione per parti si trova:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \sin \theta d\theta &= \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta d\theta - \left(\frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \right)' \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta d\theta + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \right)'' d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta d\theta, \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sin \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \sin \theta d\theta &= \sqrt{\sin \theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta d\theta + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sin \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \right)'' d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \sin^{\frac{3}{2}} \theta d\theta; \end{aligned}$$

e quindi sostituendo si avrà:

$$\begin{aligned} \Sigma A_n \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen} \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen} \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen} \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} \theta}} \right)'' d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta d\theta - \right. \\ \left. - \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{(n+1) \sqrt{2n\pi}} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{\operatorname{sen} \theta} \right\} = c_2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{\operatorname{sen} \theta}; \end{aligned}$$

e poichè l'essere applicabile una o più volte l'integrazione definita termine a termine alla serie del primo membro della formola (2), in ogni intervallo fra ε e $\pi - \varepsilon$, porta che si abbia:

$$\begin{aligned} \Sigma A_n \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen} \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} \theta}} \right)'' d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta d\theta - \right. \\ \left. - \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{(n+1) \sqrt{2n\pi}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen} \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} \theta}} \right)'' \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta \right\} = \\ = c_2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen} \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} \theta}} \right)'' \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta; \end{aligned}$$

e d'altra parte si ha anche:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} \theta}} \right)'' \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} \theta}} \right)' \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} \theta}} + 1, \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen} \theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} \theta}} \right)'' \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta = -\sqrt{\operatorname{sen} \theta} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - \cos \theta, \end{aligned}$$

sostituendo si troverà:

$$\Sigma A_n \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen} \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen} \theta d\theta + \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{(n+1) \sqrt{2n\pi}} \cos \theta \right\} = -c_2 \cos \theta;$$

o anche, riponendo $\cos \theta = x$:

$$\sum A_n \left\{ \int_0^x dx \int_0^x X_n dx + \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{(n+1) \sqrt{2n\pi}} x \right\} = -c_2 x;$$

e questa formola varrà per tutti i valori di x fra -1 e 1 , esclusi soltanto i valori 1 e -1 .

Ora, per $n > 0$ si ha:

$$\int_0^x X_n dx = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} - \frac{X_{n+1}^0 - X_{n-1}^0}{2n+1},$$

o anche:

$$\int_0^x X_n dx = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} + \frac{X_{n-1}^0}{n+1},$$

ove X_{n-1}^0 e X_{n+1}^0 sono i valore di X_{n-1} e X_{n+1} per $x=0$, giacchè per $x=0$ da una formola nota si ha:

$$(n+1)X_{n+1}^0 + nX_{n-1}^0 = 0;$$

quindi per $n > 1$ si avrà:

$$\begin{aligned} \int_0^x dx \int_0^x X_n dx &= \frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} + \\ &+ \frac{X_n^0}{(2n+1)(n+2)} - \frac{X_{n-2}^0}{(2n+1)n} + \frac{X_{n-1}^0}{n+1} x, \end{aligned}$$

e per $n=1$ sarà invece:

$$\int_0^x dx \int_0^x X_1 dx = \frac{X_3 - X_1}{3 \cdot 5} + \frac{x}{6};$$

e ora, poichè dalla formola (1) si ha facilmente:

$$\frac{X_{n-1}^0}{n+1} = - \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{(n+1) \sqrt{2n\pi}} + \frac{b_n}{n^2 \sqrt{n}},$$

ove b_n col crescere indefinito di n resta sempre inferiore a un numero finito, e inoltre le due serie $\sum \frac{A_n b_n x}{n^2 \sqrt{n}}$, $\sum A_n \left(\frac{X_n^0}{(2n+1)(n+2)} - \frac{X_{n-2}}{(2n+1)n} \right)$ sono convergenti, sostituendo nella formola (3) si troverà subito la seguente:

$$A_0 \frac{x^2}{2} + \frac{A_1 (X_3 - X_1)}{3 \cdot 5} + \sum_2^\infty A_n \left\{ \frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} \right\} = c_3 x + c_4,$$

ove c_3 e c_4 sono due nuove costanti; e questa formola, sebbene dimostrata pei soli valori di x fra -1 e 1 esclusi i valori ± 1 , varrà anche a questi limiti, giacchè la serie del primo membro e tutti gli altri termini sono funzioni continue di x .

Sussistendo ora questa formola anche per $x = \pm 1$, si avrà $\frac{A_0}{2} = c_3 + c_4$, e $\frac{A_0}{2} = -c_3 + c_4$; quindi sarà $c_3 = 0$, $c_4 = \frac{A_0}{2}$, e perciò si avrà:

$$A_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{A_1(X_3 - X_1)}{3 \cdot 5} + \sum_2^{\infty} A_n \left\{ \frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} \right\} = 0,$$

ovvero:

$$\frac{A_0(X_2 - X_0)}{3} + \frac{A_1(X_3 - X_1)}{3 \cdot 5} + \sum_2^{\infty} A_n \left\{ \frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} \right\} = 0,$$

giacchè $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{X_2 - X_0}{3}$.

Osservando ora che, siccome la serie del primo membro è convergente in ugual grado nell'intervallo da -1 a 1 , si può applicarle l'integrazione definita termine a termine da -1 a 1 dopo averla moltiplicata tutta per X_m ; si troverà subito che i coefficienti di ogni funzione X_n nel primo membro della formola precedente devono essere tutti nulli, e si avranno quindi i due sistemi di equazioni seguenti:

$$-\frac{A_0}{3} + \frac{A_2}{3 \cdot 5} = 0,$$

$$\frac{A_0}{1 \cdot 3} - \frac{A_2}{3 \cdot 5} - \frac{A_4}{5 \cdot 7} + \frac{A_6}{7 \cdot 9} = 0,$$

$$\frac{A_2}{5 \cdot 7} - \frac{A_4}{7 \cdot 9} - \frac{A_6}{9 \cdot 11} + \frac{A_8}{11 \cdot 13} = 0,$$

.....

$$\frac{A_{2n-4}}{(4n-7)(4n-5)} - \frac{A_{2n-2}}{(4n-5)(4n-3)} - \frac{A_{2n-2}}{(4n-3)(4n-1)} + \frac{A_{2n}}{(4n-1)(4n+1)} = 0,$$

$$\frac{A_{2n-2}}{(4n-3)(4n-1)} - \frac{A_{2n}}{(4n-1)(4n+1)} - \frac{A_{2n}}{(4n+1)(4n+3)} + \frac{A_{2n+2}}{(4n+3)(4n+5)} = 0,$$

$$-\frac{A_1}{3 \cdot 5} + \frac{A_3}{5 \cdot 7} = 0,$$

$$\frac{A_1}{3 \cdot 5} - \frac{A_3}{5 \cdot 7} - \frac{A_3}{7 \cdot 9} + \frac{A_5}{9 \cdot 11} = 0,$$

$$\frac{A_3}{7 \cdot 9} - \frac{A_5}{9 \cdot 11} - \frac{A_5}{11 \cdot 13} + \frac{A_7}{13 \cdot 15} = 0,$$

.....

$$\frac{A_{2n-5}}{(4n-9)(4n-7)} - \frac{A_{2n-3}}{(4n-7)(4n-5)} - \frac{A_{2n-3}}{(4n-5)(4n-3)} + \frac{A_{2n-1}}{(4n-3)(4n-1)} = 0,$$

$$\frac{A_{2n-3}}{(4n-5)(4n-3)} - \frac{A_{2n-1}}{(4n-3)(4n-1)} - \frac{A_{2n-1}}{(4n+1)(4n+3)} + \frac{A_{2n+1}}{(4n+3)(4n+5)} = 0,$$

le quali sommate rispettivamente conducono alle altre:

$$\frac{A_{2n+2}}{4n+5} = \frac{A_{2n}}{4n+1}, \quad \frac{A_{2n+1}}{4n+3} = \frac{A_{2n-1}}{4n-1},$$

che valgono per tutti i valori di n , e quindi ci danno:

$$A_{2n} = (4n+1)A_0, \quad A_{2n+1} = (4n+3)\frac{A_1}{3};$$

e ora, poichè di qui risulta che, se A_0 e A_1 non fossero zero, le quantità A_n non sarebbero tali che i rapporti $\frac{A_n}{\sqrt[n]{n}}$ tendano a zero col crescere indefinito di n , perchè esse diverrebbero infinite di prim'ordine insieme con n , si conclude che A_0 e A_1 e così tutte le A_n devono essere identicamente nulle, e così il teorema enunciato in principio resta completamente dimostrato.

Pisa, 7 dicembre 1873.