Sulle trasformazioni dei sistemi di linee, coniugate ed ortogonali, nello spazio S_n .

(Di PASQUALE CALAPSO, a Messina.)

PREFAZIONE.

La teoria delle trasformazioni per involuppo di sfere è stata recentemente generalizzata sotto vari aspetti, fra cui sono principalmente da notare le ricerche del BIANCHI relative alle trasformazioni di RIBAUCCOUR dei sistemi n^{pi} ortogonali (*).

Mi propongo nel presente lavoro di stabilire le proprietà delle trasformazioni dei *sistemi coniugati ed ortogonali* (réseaux O) dello spazio S_n , rilevando fra l'altro il modo secondo cui le proprietà dello spazio ordinario S_3 vengono generalizzate e talora modificate.

A fondamento della ricerca pongo un *sistema di $n+2$ sfere a due a due ortogonali* e il determinante formato con le coordinate di queste sfere

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{1n+1} & x_{1n+2} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & x_{2n+1} & x_{2n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} & x_{nn+1} & x_{nn+2} \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n & \xi_{n+1} & \xi_{n+2} \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n & \eta_{n+1} & \eta_{n+2} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

facendo l'ipotesi che le sfere considerate formino un *sistema di Guichard*; e seguendo le notazioni dell'autore indico con $A_1, A_2, \dots, A_n, R, S$ i centri delle sfere aventi per coordinate le successive righe del determinante.

(*) [Annali di Matematica, Tomo XXVII della serie III; pag. 183 e seguenti.]

Si sa che la retta $\overline{RS}$ descrive una congruenza ciclica di cui R ed S sono i fuochi; inoltre fra i sistemi coniugati (réseaux) armonici alla congruenza $(\overline{RS})$ esistono:

1.° ∞^{n-2} reti O [formanti il sistema (B) di GUICHARD];

2.° ∞^{n-1} reti $2O$ [formanti il sistema (A)] (*);

3.° In generale reti $3O$.

Mediante i sistemi (A) e (B) è costruibile (in infiniti modi) un sistema semplicemente infinito di reti armoniche ad $(\overline{RS})$, in guisa che una qualunque di esse è in generale $2O$; ma esistono in particolare nel sistema due reti O .

Per esempio esistono sulla retta $\overline{A_1 A_2}$ due punti P e P' , ciascuno dei quali descrive una rete O armonica ad $(\overline{RS})$.

Basandomi su queste proprietà fondamentali sono pervenuto alle trasformazioni di RIBAUCOUR colle seguenti considerazioni:

Il punto P appartiene alla sfera A_k [$k = 3, 4, \dots, n$] ed anche alle sfere R ed S , e poichè due qualunque sfere del sistema sono ortogonali la retta $\overline{A_k P}$ è perpendicolare comune a $\overline{PR}$ e $\overline{PS}$; inoltre due rette $\overline{A_k P}$ ed $\overline{A_l P}$ sono perpendicolari tra loro.

Di più entrambi i punti P ed A_k descrivono rispettivamente due reti armoniche alla stessa congruenza $(\overline{RS})$, e quindi la loro congiungente *descrive una congruenza riferita alle sviluppabili*. La retta $\overline{A_k P}$ è perciò normale alla rete (P) .

Le medesime conclusioni valgono per la rete (P') , inoltre i segmenti $\overline{A_k P}$ ed $\overline{A_k P'}$ sono uguali; dunque: *le $n - 2$ normali alla rete (P) incontrano rispettivamente le $n - 2$ normali alla rete (P') in punti equidistanti da P e da P' . Lo stesso per le tangenti alle reti (P) e (P') .*

Il passaggio dalla rete (P) alla rete (P') è perciò una *trasformazione di Ribaucour* (trasformazione R); inversamente due reti O , deducibili l'una dall'altra per trasformazione R , sono sempre armoniche ad una stessa congruenza ciclica; e quest'ultima è sempre il luogo della congiungente i centri R, S di due sfere di un sistema ortogonale di GUICHARD.

La trasformazione che fa passare dalla rete (P) alla rete (P') trasforma altresì gli elementi fondamentali di (P) in quelli di (P') ; risulta allora la *trasformazione di Bianchi* come trasformazione dei determinanti Δ di ordine n .

(*) Per rete $2O$ di uno spazio S_n intendesi la proiezione in questo spazio di una rete O (ortogonale) di uno spazio S_{n+1} .

Applicando la trasformazione di BIANCHI al determinante (1) di ordine $n+2$, si trova un nuovo determinante Δ' , ed il passaggio da Δ a Δ' è suscettibile di due differenti interpretazioni:

1.° *Gli elementi della prima riga di Δ si considerino come coordinate di Weierstrass di un punto che descrive una rete O di uno spazio S_{n+1} di curvatura costante, e similmente per Δ' ; si ottiene allora una trasformazione per le reti O dello spazio non euclideo.*

2.° *Gli elementi di Δ' si considerino come le coordinate di $n+2$ sfere a due a due ortogonali (dello spazio euclideo S_n); possiamo allora ripetere su Δ' le considerazioni fatte superiormente su Δ e dedurre in conseguenza due reti O [che indichiamo con (P_1) e (P'_1)] dello spazio S_n , analoghe alle reti (P) e (P') .*

Il passaggio dalla rete (P) alla rete (P_1) [o dalla rete (P) alla rete (P'_1)] è qui detto una *trasformazione R non euclidea* [o brevemente una trasformazione $\bar{R}$], per tenere presente che è una trasformazione delle reti O dello spazio euclideo S_n che si effettua attraverso lo spazio non euclideo S_{n+1} .

Io ho dimostrato che la trasformazione $\bar{R}$ non differisce sostanzialmente da una trasformazione R ordinaria, nel senso che *due reti O dedotte l'una dall'altra con una trasformazione $\bar{R}$ sono anche deducibili l'una dall'altra per trasformazione di Ribaucour*; ed inversamente.

Nondimeno le espressioni analitiche della R e della $\bar{R}$ sono *diverse*, il che apporta qualche modificazione ai teoremi concernenti la composizione delle trasformazioni di RIBAUCCOUR. Così appunto il *teorema di permutabilità di Bianchi* prende la forma seguente:

Se di una rete (P) si ottiene una nuova rete (P') mediante una trasformazione R ed una rete (P_1) mediante una trasformazione $\bar{R}$, esiste una quarta rete (P'_1) [deducibile in termini finiti] legata alla (P') da una trasformazione $\bar{R}$ e legata alla (P_1) da una trasformazione R .

La dimostrazione è immediata; infatti partiamo dalle reti (P) e (P') e costruendo il sistema delle $n+2$ sfere a due a due ortogonali formiamo il relativo determinante Δ . Operiamo ora una trasformazione $\bar{R}$ della rete (P) in una nuova rete (P_1) ; il determinante Δ si trasforma in un nuovo determinante Δ' , dal quale si deducono due reti legate tra loro da una trasformazione R . Una di queste è la (P_1) , l'altra è la (P'_1) cercata.

Nella presente Memoria è anche introdotta la trasformazione $\bar{R}$ delle reti O degli spazi di curvatura costante, ed è studiata la composizione di due trasformazioni R ed $\bar{R}$ ed il relativo *teorema di permutabilità*.

Infine è stabilita una teoria delle congruenze k , come una generalizzazione della teoria analoga introdotta dal DEMOULIN nello spazio S_3 (*).

Prendendo le quattro reti (P) , (P') , (P_1) , (P'_1) del teorema di permutabilità, esiste in infiniti modi un punto Q' equidistante da P , P' , P_1 .

Fra questi assumiamo il punto Q' appartenente al piano individuato dalla tangente ad una curva della rete (P) e dalla normale $\overline{A_k P}$; similmente assumiamo il punto Q'' individuato dalla tangente all'altra curva di (P) e dalla normale $\overline{A_k P}$.

Chiamiamo *congruenza k* la congruenza generata dalla retta $\overline{Q' Q''}$; per $n = 3$ ne esiste una sola, per $n > 3$ ne esiste una per ogni coppia di piani principali della rete, e la diciamo *coniugata* alla coppia π_k , π'_k dei detti piani principali.

Si ha il teorema: *per ciascuna congruenza k le sviluppabili corrispondono alle curve della rete (P) , ed i fuochi sono le intersezioni della retta k coi piani π_k , π'_k a cui la congruenza è coniugata.*

Se nel piano dei quattro punti P , P' , P_1 , P'_1 , prendiamo la retta $\overline{P P'}$, essa congiunge i punti corrispondenti di due reti armoniche alla congruenza $(\overline{R S})$, e quindi descrive una congruenza riferita alle sviluppabili; similmente la retta $\overline{P P_1}$ congiunge i punti corrispondenti di due reti armoniche ad una medesima congruenza [analoga ad $(\overline{R S})$] e quindi descrive pure una congruenza riferita alle sviluppabili. Dunque il piano π , a cui appartengono P , P' , P_1 , P'_1 , contiene due rette, ciascuna delle quali descrive una congruenza (riferita alle sviluppabili) coniugata alla rete (P) ; *il piano π involuppa perciò una rete (π) armonica ad entrambe le congruenze.*

Infine è fatta una classificazione delle congruenze k , basata sulle considerazioni seguenti.

Due congruenze k generate dalla stessa quaterna (P) , (P') , (P_1) , (P'_1) non sono in generale parallele; ma se lo sono in particolare, tutte le congruenze k generate dalla detta quaterna sono parallele alla congruenza $(\overline{R S})$.

In tal caso il sistema delle quattro reti (P) , (P') , (P_1) , (P'_1) è detto un *sistema k di prima specie*; in caso diverso è detto *di seconda specie*.

Risulta subito che *una congruenza k , relativa ad un sistema k di prima specie, è ciclica.*

L'ipotesi di un sistema k di prima specie porta che il piano π contiene

(*) DEMOULIN, *Sur les systèmes et les congruences k* [Comptes Rendus, anno 1910, vol. 150, pag. 156 e seguenti; pag. 310 e seguenti].

una *normale* alla rete (P) ; abbiamo dunque in π una *congruenza normale* coniugata a (P) e perciò la rete inviluppata dal piano π è armonica ad una congruenza normale e quindi è ciclica. Dunque *in un sistema k di prima specie il piano π inviluppa una rete ciclica*.

In generale è da osservare che la congruenza $(\overline{PP'})$, od anche $(\overline{PP_1})$, essendo coniugata ad una rete O , è $2O$, e la rete inviluppata da π essendo armonica ad una congruenza $2O$ è $2C$ (cioè proiezione di una rete ciclica dello spazio ad $n+1$ dimensioni).

Si dimostra che il sistema k di prima specie dà *il solo caso* in cui si ha una riduzione di grado per la rete (π) , dunque:

In un sistema k di seconda specie il piano π inviluppa una rete $2C$.

§ 1. LE TRASFORMAZIONI DI RIBAUCCOUR NELLO SPAZIO EUCLIDEO S_n .

1. Consideriamo in uno spazio S_n un sistema di $n+2$ sfere a due a due ortogonali, e con le coordinate delle sfere formiamo il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{1n+1} & x_{1n+2} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & x_{2n+1} & x_{2n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} & x_{nn+1} & x_{nn+2} \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n & \xi_{n+1} & \xi_{n+2} \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n & \eta_{n+1} & \eta_{n+2} \end{vmatrix}; \quad (1)$$

supponiamo inoltre che le sfere considerate formino un *sistema di Guichard*, per il che sono note le equazioni (necessarie e sufficienti)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi_r}{\partial u} &= - \sum_{s=1}^n a_s x_{sr} - p \eta_r, & \frac{\partial \xi_r}{\partial v} &= q \eta_r, \\ \frac{\partial \eta_r}{\partial u} &= p \xi_r, & \frac{\partial \eta_r}{\partial v} &= - \sum_{s=1}^n b_s x_{sr} - q \xi_r, \\ \frac{\partial x_{kr}}{\partial u} &= a_k \xi_r, & \frac{\partial x_{kr}}{\partial v} &= b_k \eta_r \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$(r = 1, 2, \dots, n, n+1, n+2)$

colle condizioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_s}{\partial v} &= p b_s, & \frac{\partial b_s}{\partial u} &= q a_s \\ \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u} + \sum_{s=1}^n a_s b_s &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

2. Indichiamo con A_k il centro della sfera che ha per coordinate $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}, x_{kn+1}, x_{kn+2}$ e similmente indichiamo con R ed S i centri delle sfere che hanno rispettivamente per coordinate gli elementi delle due ultime linee di Δ .

Sappiamo da un teorema di GUICHARD che *la retta $\overline{RS}$ descrive una congruenza ciclica riferita alle sviluppabili, di cui R ed S sono i fuochi; ciascun punto A_k descrive un sistema coniugato (réseau) armonico alla congruenza $(\overline{RS})$; sopra ciascuna retta $\overline{A_i A_l}$ esiste un punto P che descrive una rete ortogonale (réseau O) (*) armonica ad $(\overline{RS})$.*

3. Completiamo l'enunciato precedente con un'importante osservazione.

Riferiamoci per fissare le idee alla retta $\overline{A_1 A_2}$, e consideriamo in essa i punti P e P' aventi rispettivamente le coordinate pentasferiche

$$\left. \begin{aligned} x_r &= x_{1r} + i x_{2r} \\ x'_r &= x_{1r} - i x_{2r} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$[r = 1, 2, \dots, n, n+1, n+2].$$

È chiaro che il punto P appartiene alla sfera A_k [$k = 3, 4, \dots, n$] ed anche alle sfere R ed S ; e poichè due qualunque sfere del sistema sono ortogonali, la retta $\overline{A_k P}$ è perpendicolare comune a $\overline{PR}$ e $\overline{PS}$; inoltre due rette $\overline{A_k P}$ ed $\overline{A_l P}$ sono perpendicolari tra loro.

Di più entrambi i punti P ed A_k descrivono rispettivamente due reti armoniche alla stessa congruenza $(\overline{RS})$, e quindi la loro congiungente descrive una congruenza riferita alle sviluppabili. *La retta $\overline{A_k P}$ è perciò normale alla rete (P) .*

Le medesime conclusioni valgono per la rete (P') ; inoltre i segmenti $\overline{A_k P}$ ed $\overline{A_k P'}$ sono uguali; dunque: *le $n-2$ normali alla rete (P) incontrano*

(*) Per *réseau O* intendosi un sistema coniugato, per cui l'elemento lineare ha la forma

$$A du^2 + B dv^2$$

con A e B diversi da zero.

rispettivamente le $n - 2$ normali alla rete (P') in punti equidistanti da P e da P' . Lo stesso per le tangenti alle reti (P) e (P') .

Il passaggio dalla rete (P) alla rete (P') è perciò una *trasformazione di RIBAUCOUR* (traformazione R).

§ 2. ESPRESSIONE ANALITICA DI BIANCHI PER LA TRASFORMAZIONE DI RIBAUCOUR.

4. Interpretiamo il determinante (1) da un punto di vista diverso.

Assumiamo gli elementi delle varie righe come coseni direttori di $n + 2$ rette (in uno spazio S_{n+2}), uscenti da un punto M . Indichiamo con

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$$

le coordinate di M che supponiamo funzioni date delle variabili u e v ; otteniamo così un sistema mobile di $n + 2$ rette a due a due ortogonali.

Ad ogni punto M facciamo corrispondere un punto M' , assegnando le coordinate di M'

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n, x'_{n+1}, x'_{n+2}$$

come nuove funzioni di u e v . Si potrà sempre porre

$$x'_i = x_i - \frac{1}{m\sigma} \left(\lambda \xi_i + \mu \eta_i + \sum_{s=1}^n w_s x_{si} \right) \quad (5)$$

essendo le quantità $\lambda, \mu, w_1, w_2, \dots, w_n, \sigma$, definite a meno di un fattore dalle (5) stesse, ed m una costante arbitraria diversa da zero. Introduciamo ancora per comodità di calcolo la funzione H mediante la relazione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \sum_{s=1}^n w_s^2 = 2mH. \quad (6)$$

Conduciamo per il punto M la retta, avente per coseni direttori

$$x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn}, x_{rn+1}, x_{rn+2};$$

esiste un segmento MN , in guisa che

$$MN = M'N.$$

Si riconosce subito che i coseni direttori della retta $M'N$ sono

$$x'_{ri} = \frac{\lambda w_r}{m H} \xi_i + \frac{\mu w_r}{m H} \eta_i + \frac{w_r}{m H} \sum_{s=1}^n w_s x_{si} - x_{ri}. \quad (7)$$

Analogamente operando per le rette di direzione ξ_i ed η_i si trova

$$\left. \begin{aligned} \xi'_i &= \frac{\lambda^2}{m H} \xi_i + \frac{\lambda \mu}{m H} \eta_i + \frac{\lambda}{m H} \sum_{s=1}^n w_s x_{si} - \xi_i, \\ \eta'_i &= \frac{\lambda \mu}{m H} \xi_i + \frac{\mu^2}{m H} \eta_i + \frac{\mu}{m H} \sum_{s=1}^n w_s x_{si} - \eta_i; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ne risulta così un nuovo determinante ortogonale

$$\Delta' = \begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \dots & x'_{1n} & x'_{1n+1} & x'_{1n+2} \\ x'_{21} & x'_{22} & \dots & x'_{2n} & x'_{2n+1} & x'_{2n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \dots & x'_{nn} & x'_{nn+1} & x'_{nn+2} \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \dots & \xi'_n & \xi'_{n+1} & \xi'_{n+2} \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \dots & \eta'_n & \eta'_{n+1} & \eta'_{n+2} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Si tratta di determinare sotto quali condizioni Δ' è ancora del tipo speciale (1), cioè sotto quali condizioni si abbiano relazioni della forma

$$\frac{\partial x'_{ri}}{\partial u} = a'_r \xi'_i, \quad \frac{\partial x'_{ri}}{\partial v} = b'_r \eta'_i. \quad (10)$$

Tralasciando di riportare i calcoli relativi, scriviamo semplicemente il sistema di equazioni differenziali a cui si è condotti; cioè

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= - \sum_{s=1}^n a_s w_s - p \mu + m \varphi \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= q \mu \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} &= p \lambda \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= - \sum_{s=1}^n b_s w_s - q \lambda + m \Omega \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial w_s}{\partial u} &= a_s \lambda \\
 \frac{\partial w_s}{\partial v} &= b_s \mu \\
 \frac{\partial H}{\partial u} &= \lambda \varphi \\
 \frac{\partial H}{\partial v} &= \mu \Omega \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= p \Omega \\
 \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= q \varphi.
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

5. Si ha frattanto il seguente teorema:

Partendo da un determinante ortogonale del tipo speciale (1), si determini una soluzione

$$\lambda, \mu, w_s, H, \varphi, \Omega$$

del sistema (11), con la relazione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \sum_{s=1}^n w_s^2 = 2mH; \quad (12)$$

le formole (7), (8) danno in conseguenza gli elementi di un nuovo determinante ortogonale dello stesso tipo.

Con facile calcolo si hanno le rotazioni del nuovo determinante sotto la forma

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha'_r &= \alpha_r - \frac{\varphi w_r}{H}, & b'_r &= b_r - \frac{\Omega w_r}{H}, \\
 p' &= p - \frac{\varphi \mu}{H}, & q' &= q - \frac{\Omega \lambda}{H}.
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

6. Ed ora supponiamo che il punto M descriva una rete O , di cui Δ sia il determinante fondamentale; si avrà

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = h \xi_i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = l \eta_i \quad (14)$$

essendo h ed l legate alle rotazioni di Δ mediante le equazioni

$$\frac{\partial h}{\partial v} = l p, \quad \frac{\partial l}{\partial u} = h q. \quad (15)$$

Aggiungiamo alle (11) e (12) le equazioni

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = h \lambda, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = l \mu \quad (16)$$

e prendiamo nelle (5) la funzione σ data dalla formola

$$\sigma = \frac{H}{\psi}; \quad (17)$$

si avrà

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{\lambda}{\psi} (\varphi - h \sigma), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{\mu}{\psi} (\Omega - l \sigma), \quad (18)$$

e le (5) danno una nuova rete O , che è la trasformata di RIBAUCOUR della prima. Per questa nuova rete si ha:

$$h' = \frac{\varphi}{\sigma} - h, \quad l' = \frac{\Omega}{\sigma} = l. \quad (19)$$

7. Importa osservare la forma del determinante ortogonale d'ordine $n+4$, da cui la trasformazione qui posta è deducibile col metodo del paragrafo precedente. Indicando il nuovo determinante con

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \alpha_{1n+1} & \alpha_{1n+2} & \alpha_{1n+3} & \alpha_{1n+4} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \alpha_{2n+1} & \alpha_{2n+2} & \alpha_{2n+3} & \alpha_{2n+4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} & \alpha_{nn+1} & \alpha_{nn+2} & \alpha_{nn+3} & \alpha_{nn+4} \\ \alpha_{n+11} & \alpha_{n+12} & \dots & \alpha_{n+1n} & \alpha_{n+1n+1} & \alpha_{n+1n+2} & \alpha_{n+1n+3} & \alpha_{n+1n+4} \\ \alpha_{n+21} & \alpha_{n+22} & \dots & \alpha_{n+2n} & \alpha_{n+2n+1} & \alpha_{n+2n+2} & \alpha_{n+2n+3} & \alpha_{n+2n+4} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & \beta_{n+1} & \beta_{n+2} & \beta_{n+3} & \beta_{n+4} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n & \gamma_{n+1} & \gamma_{n+2} & \gamma_{n+3} & \gamma_{n+4} \end{vmatrix},$$

le espressioni degli elementi sono:

$$\alpha_{ri} = \frac{w_r}{\psi} x_i - x_{ri}, \quad \alpha_{rn+3} + i \alpha_{rn+4} = -\frac{w_r}{\psi},$$

$$\begin{pmatrix} r = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad n+1, \quad n+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha_{n+1i} + i\alpha_{n+2i}) &= x_i, \\
\psi\left[(\alpha_{n+1n+3} + i\alpha_{n+2n+3}) + i(\alpha_{n+1n+4} + i\alpha_{n+2n+4})\right] &= -1, \\
-\frac{1}{2m\sigma}(\alpha_{n+1i} - i\alpha_{n+2i}) &= x'_i, \\
-\frac{1}{2m\sigma}\left[(\alpha_{n+1n+3} - i\alpha_{n+2n+3}) + i(\alpha_{n+1n+4} - i\alpha_{n+2n+4})\right] &= -1, \\
\beta_i &= \frac{\lambda}{\psi}x_i - \xi_i, \quad \beta_{n+3} + i\beta_{n+4} = -\frac{\lambda}{\psi}, \\
\gamma_i &= \frac{\mu}{\psi}x_i - \eta_i, \quad \gamma_{n+3} + i\gamma_{n+4} = -\frac{\mu}{\psi};
\end{aligned}$$

ed i punti M ed M' rimangono individuati rispettivamente dalle coordinate pentasferiche

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+11} + i\alpha_{n+21}, \dots, \quad \alpha_{n+1n+3} + i\alpha_{n+2n+3}, \quad \alpha_{n+1n+4} + i\alpha_{n+2n+4}; \\
\alpha_{n+11} - i\alpha_{n+21}, \dots, \quad \alpha_{n+1n+3} - i\alpha_{n+2n+3}, \quad \alpha_{n+1n+4} - i\alpha_{n+2n+4}.
\end{aligned}$$

§ 3. LA TRASFORMAZIONE R NON EUCLIDEA.

8. L'espressione analitica di BIANCHI per le trasformazioni di RIBAUCCOUR si presta per fare subito una estensione agli spazi di curvatura costante.

Assumiamo il determinante (1) per definire una *rete* O di uno spazio S_{n+1} di curvatura costante, prendendo come *coordinate di Weierstrass* del punto che descrive la rete gli elementi della prima riga di Δ .

Prendendo una soluzione

$$\lambda, \quad \mu, \quad w_s, \quad H, \quad \varphi, \quad \Omega$$

del sistema (11) con la relazione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \sum w_s^2 = 2mH,$$

sappiamo che le (7) ed (8) danno gli elementi di un nuovo determinante ortogonale.

Si deduce allora una nuova rete O dello stesso spazio, assumendo come coordinate di WEIERSTRASS gli elementi della prima riga del determinante trasformato.

Noi vogliamo studiare questa trasformazione dal punto di vista dell'effetto che essa produce sulle reti O dello spazio euclideo S_n ; cioè consideriamo le reti (P) e (P') che si deducono da Δ prendendo le coordinate pentasferiche

$$x_r = x_{1r} + i x_{2r} \quad \text{e} \quad x'_r = x_{1r} - i x_{2r};$$

indi consideriamo le reti analoghe (P_1) e (P'_1) che si deducono similmente da Δ' ponendo

$$x_r^{(1)} = x'_{1r} + i x'_{2r} \quad \text{e} \quad x_r^{(1)} = x'_{1r} - i x'_{2r}.$$

Il passaggio dalla rete (P) alla rete (P_1) [o dalla rete (P') alla (P'_1)] si dirà una *trasformazione R non euclidea*, o brevemente una *trasformazione $\bar{R}$* .

In sostanza la $\bar{R}$ è una trasformazione delle reti O dello spazio euclideo S_n , che si effettua attraverso lo spazio non euclideo S_{n+1} .

9. Dimostriamo anzitutto che *due reti O , dedotte l'una dall'altra con una trasformazione di Ribaucour, sono anche deducibili l'una dall'altra per trasformazione R non euclidea*.

Supponiamo dato un determinante Δ , per il quale manteniamo le notazioni del n.º 1, e formiamo un nuovo determinante analogo a Δ ; cioè:

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} & \dots & \bar{x}_{1n} & \bar{x}_{1n+1} & \bar{x}_{1n+2} \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}_{22} & \dots & \bar{x}_{2n} & \bar{x}_{2n+1} & \bar{x}_{2n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_{n1} & \bar{x}_{n2} & \dots & \bar{x}_{nn} & \bar{x}_{nn+1} & \bar{x}_{nn+2} \\ \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 & \dots & \bar{\xi}_n & \bar{\xi}_{n+1} & \bar{\xi}_{n+2} \\ \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 & \dots & \bar{\eta}_n & \bar{\eta}_{n+1} & \bar{\eta}_{n+2} \end{vmatrix}, \quad (20)$$

con la condizione che le prime due righe di quest'ultimo siano legate alle prime due righe di Δ da relazioni della forma

$$\bar{x}_{1r} + i \bar{x}_{2r} = \frac{x_{1r} + i x_{2r}}{\Theta}. \quad (21)$$

La rete $(\bar{P})$ definita dalle coordinate pentasferiche

$$\bar{x}_{1,r} - i \bar{x}_{2,r}$$

è nel modo più generale una trasformata di RIBAUCCOUR di (P) .

Avendosi

$$\frac{\partial \bar{x}_{1,r}}{\partial u} + i \frac{\partial \bar{x}_{2,r}}{\partial u} = \frac{a_1 + i a_2}{\Theta} \left[\bar{\xi}_r - \frac{x_{1,r} + i x_{2,r}}{a_1 + i a_2} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u} \right],$$

si deducono le espressioni

$$\bar{\xi}_r = \bar{\xi}_r - \frac{x_{1,r} + i x_{2,r}}{a_1 + i a_2} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u}; \quad (22)$$

similmente

$$\bar{\eta}_r = \bar{\eta}_r - \frac{x_{1,r} + i x_{2,r}}{b_1 + i b_2} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial v}. \quad (23)$$

Esprimendo che le quantità $\bar{\xi}_r$, $\bar{\eta}_r$ sono le due ultime linee di un determinante ortogonale del tipo speciale considerato, si trova per Θ l'equazione

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = \frac{b_1 + i b_2}{a_1 + i a_2} \cdot p \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{a_1 + i a_2}{b_1 + i b_2} \cdot q \frac{\partial \Theta}{\partial v}. \quad (24)$$

Inversamente se questa equazione è soddisfatta, dalle (22) e (23) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\xi}_r}{\partial v} &= \left[q - \frac{b_1 + i b_2}{a_1 + i a_2} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u} \right] \bar{\eta}_r \\ \frac{\partial \bar{\eta}_r}{\partial u} &= \left[p - \frac{a_1 + i a_2}{b_1 + i b_2} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial v} \right] \bar{\xi}_r \end{aligned}$$

e le (22) e (23) danno effettivamente le ultime due linee del determinante richiesto, che rimane da esse determinato a meno di una sostituzione ortogonale a coefficienti costanti sugli elementi delle colonne.

Per completare $\bar{\Delta}$, determiniamo per quadrature le funzioni

$$w_3, w_4, \dots, w_n$$

ponendo

$$\frac{\partial w_k}{\partial u} = \frac{a_k}{a_1 + i a_2} \frac{\partial \Theta}{\partial u}, \quad \frac{\partial w_k}{\partial v} = \frac{b_k}{b_1 + i b_2} \frac{\partial \Theta}{\partial v}; \quad (25)$$

potremo allora assumere

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{kr} &= x_{kr} - \frac{x_{1r} + i x_{2r}}{\Theta} w_k (*), \\ (k &= 3, 4, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ed il determinante $\bar{\Delta}$ è conosciuto.

Dimostriamo ora che il passaggio da (P) a $(\bar{P})$ si ottiene anche per trasformazione R non euclidea.

Infatti introduciamo le funzioni

$$\lambda = \frac{1}{a_1 + i a_2} \frac{\partial \Theta}{\partial u}, \quad \mu = \frac{1}{b_1 + i b_2} \frac{\partial \Theta}{\partial v}; \quad (27)$$

sarà per la (24)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = q \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = p \lambda. \quad (28)$$

Determiniamo ancora per quadrature la funzione w_1 , ponendo

$$\frac{\partial w_1}{\partial u} = a_1 \lambda, \quad \frac{\partial w_1}{\partial v} = b_1 \mu; \quad (29)$$

indi prendiamo

$$w_1 + i w_2 = \Theta. \quad (30)$$

Le funzioni

$$\lambda, \mu, w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$$

danno un sistema di funzioni trasformatrici per una trasformazione non euclidea di (P) . Ed allora indicando con le notazioni (9) il determinante Δ' trasformato di Δ , si avrà

$$x'_{1r} + i x'_{2r} = \frac{\Theta}{m H} \left[\lambda \xi_r + \mu \eta_r + \sum_{s=1}^n w_s x_{sr} \right] - (x_{1r} + i x_{2r});$$

e ponendo

$$y_r = \frac{2 m H}{\Theta} (x'_{1r} + i x'_{2r}), \quad (31)$$

(*) Si noti che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}_{kr}}{\partial u} &= \left[a_k - \frac{a_1 + i a_2}{\Theta} w_k \right] \bar{\xi}_r \\ \frac{\partial x_{kr}}{\partial v} &= \left[b_k - \frac{b_1 + i b_2}{\Theta} w_k \right] \eta_r. \end{aligned}$$

si ricava

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=1}^{n+2} \bar{\xi}_r y_r = 0, \quad \sum_{r=1}^{n+2} \bar{\eta}_r y_r = 0, \quad \sum_{r=1}^{n+2} \bar{x}_{kr} y_r = 0, \\ (k = 3, 4, \dots, n); \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ed ancora

$$\sum_{r=1}^{n+2} (\bar{x}_{1r} + i \bar{x}_{2r}) y_r = 2 \quad (*), \quad (33)$$

dalle quali si deduce facilmente

$$y_r = \bar{x}_{1r} - i \bar{x}_{2r}$$

e la proposizione è stabilita.

10. Inversamente se due reti O sono dedotte l'una dall'altra con una trasformazione R non euclidea, sono deducibili l'una dall'altra per trasformazione di Ribaucour.

Infatti riprendiamo il risultato del n.º 5 che dà la trasformazione del determinante Δ in Δ' , e consideriamo il passaggio della rete (P) alla rete (P_1) [o dalla rete (P') alla (P'_1)].

Scriviamo le coordinate pentasferiche di P e di P_1 , sotto la forma

$$x_r = x_{1r} + \alpha x_{2r}; \quad x_r^{(0)} = x'_{1r} + \alpha x'_{2r}$$

$$(\alpha = \pm i)$$

ed assumiamo le funzioni

$$\left. \begin{aligned} 2 \bar{x}_{1r} &= \frac{x_{1r} + \alpha x_{2r}}{w_1 + \alpha w_2} + 2 m H \frac{x'_{1r} + \alpha x'_{2r}}{w_1 + \alpha w_2}, \\ 2 i \bar{x}_{2r} &= \frac{x_{1r} + \alpha x_{2r}}{w_1 + \alpha w_2} - 2 m H \frac{x'_{1r} + \alpha x'_{2r}}{w_1 + \alpha w_2}, \\ \bar{x}_{kr} &= x_{kr} - \frac{x_{1r} + \alpha x_{2r}}{w_1 + \alpha w_2} w_k, \\ \bar{\xi}_r &= \xi_r - \frac{x_{1r} + \alpha x_{2r}}{w_1 + \alpha w_2} \lambda, \\ \bar{\eta}_r &= \eta_r - \frac{x_{1r} + \alpha x_{2r}}{w_1 + \alpha w_2} \mu; \end{aligned} \right\} \quad (k = 3, 4, \dots, n) \quad (34)$$

(*) Si noti altresì che per la (31) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_r}{\partial u} &= 2 m \left(\varphi - \frac{a_1 + i a_2}{\Theta} H \right) \bar{\xi}_r, \\ \frac{\partial y_r}{\partial v} &= 2 m \left(\Omega - \frac{b_1 + i b_2}{\Theta} H \right) \bar{\eta}_r. \end{aligned}$$

ne risulta un nuovo determinante $\bar{\Delta}$ di forma ortogonale. Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\bar{x}_{1r} + i \bar{x}_{2r} &= \frac{x_{1r} + \alpha x_{2r}}{w_1 + \alpha w_2}; & \bar{x}_{1r} - i \bar{x}_{2r} &= 2mH \frac{x'_{1r} + \alpha x'_{2r}}{w_1 + \alpha w_2}; \\ \frac{\partial \bar{x}_{1r}}{\partial u} + i \frac{\partial \bar{x}_{2r}}{\partial u} &= \frac{a_1 + \alpha a_2}{w_1 + \alpha w_2} \bar{\xi}_r, \\ \frac{\partial \bar{x}_{1r}}{\partial u} - i \frac{\partial \bar{x}_{2r}}{\partial u} &= 2m \left[\varphi - \frac{a_1 + \alpha a_2}{w_1 + \alpha w_2} \cdot H \right] \bar{\xi}_r, \\ \frac{\partial \bar{x}_{kr}}{\partial u} &= \left[a_k - \frac{a_1 + \alpha a_2}{w_1 + \alpha w_2} w_k \right] \bar{\eta}_r\end{aligned}$$

e le analoghe per le derivate rispetto a v , donde si conclude che si passa da (P) a (P_1) [ed anche da (P') a (P'_1)] con una trasformazione di RIBAUCOUR.

§ 4. IL TEOREMA DI PERMUTABILITÀ.

11. I risultati precedenti permettono di dimostrare rapidamente il *teorema di permutabilità* sotto la forma seguente:

Se di una rete (P) si ottiene una nuova rete (P') mediante una trasformazione R ed una nuova rete (P_1) mediante una trasformazione $\bar{R}$, esiste una quarta rete (P'_1) [deducibile in termini finiti] legata alla (P') da una trasformazione $\bar{R}$ e legata alla P_1 da una trasformazione R .

Infatti partiamo dalle reti (P) e (P') , che supponiamo nello spazio S_n , e costruendo come al n.º 7 il sistema delle $n+2$ sfere a due a due ortogonali, deduciamo il relativo determinante (1). Operiamo una trasformazione $\bar{R}$ della rete (P) in una nuova rete (P_1) ; il determinante Δ si trasforma in un nuovo determinante Δ' , dal quale si deducono due reti legate tra loro da una trasformazione R . Una di queste è la (P_1) , l'altra è la (P'_1) cercata (*).

(*) Si è visto precedentemente che due reti O , legate da una trasformazione $\bar{R}$, sono anche legate da una R ordinaria ed inversamente. Perciò il teorema dimostrato coincide col *teorema di permutabilità* di BIANCHI. Ho già indicato in una precedente Memoria le successive estensioni fatte dall'illustre geometra intorno a questa importante proposizione. [Vedasi la prima nota alla Memoria *Sulla teoria generale delle trasformazioni* di RIBAUCOUR e sue applicazioni alla generalizzazione delle trasformazioni di DARBOUX. Annali di Matematica, Tomo XXIX della Serie III, pag. 17 e seguenti].

§ 5. RAPPRESENTAZIONE CONFORME DELLE RETI (P) E (P')
SULLO SPAZIO NON EUCLIDEO.

12. Riprendiamo le reti (P) e (P') definite dalle coordinate pentasferiche (4), e poniamo

$$\left. \begin{aligned} y_r &= \frac{i x_r}{x_{n+2}} \\ y'_r &= \frac{-i x'_r}{x'_{n+2}}; \end{aligned} \right\} \quad (r = 1, 2, \dots, n, n+1) \quad (35)$$

in questo modo le reti (P) e (P') vengono rappresentate conformemente sullo spazio non euclideo in due nuove reti (π) e (π') . Se poniamo

$$\left. \begin{aligned} \xi'_r &= \frac{\xi_{n+2}}{x_{n+2}} x_r - \xi_r, \\ \eta'_r &= \frac{\eta_{n+2}}{x_{n+2}} x_r - \eta_r, \\ y_{kr} &= \frac{x_{kn+2}}{x_{n+2}} x_r - x_{kr}, \end{aligned} \right\} \quad (k = 3, 4, \dots, n) \quad (36)$$

ne risulta un determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n+1} \\ y_{31} & y_{32} & \dots & y_{3n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn+1} \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \dots & \xi'_{n+1} \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \dots & \eta'_{n+1} \end{vmatrix}$$

e si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{kr}}{\partial u} &= \left[a_k - \frac{a_1 + i a_2}{x_{n+2}} x_{kn+2} \right] \xi'_r \\ \frac{\partial y_r}{\partial u} &= - \frac{i (a_1 + i a_2)}{x_{n+2}} \xi'_r \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y_{kr}}{\partial v} = \left[b_k - \frac{b_1 + i b_2}{x_{n+2}} x_{kn+2} \right] \eta'_r$$

$$\frac{\partial y_r}{\partial v} = - \frac{i (b_1 + i b_2)}{x_{n+2}} \eta'_r.$$

Ponendo ancora

$$\left. \begin{aligned} \lambda' &= \frac{\xi_{n+2}}{x_{n+2}}, \quad \mu' = \frac{\eta_{n+2}}{x_{n+2}}, \quad w'_k = \frac{x_{kn+2}}{x_{n+2}} \quad (k = 3, 4, \dots, n) \\ w'_1 &= \frac{i}{x_{n+2}}, \quad 2mH' = i w'_1 x'_{n+2} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

si ha il sistema di funzioni trasformatrici per il passaggio dalla rete (π) alla (π') (*).

§ 6. RAPPRESENTAZIONE CONFORME DI DUE RETI (π) E (π') SULLO SPAZIO EUCLIDEO.

13. Riprendiamo il determinante (1) per definire una rete O di uno spazio S_{n+1} di curvatura costante e mediante una soluzione

$$\lambda, \mu, w_s, H, \varphi, \Omega$$

del sistema (11) con la relazione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \sum_{s=1}^n w_s^2 = 2mH$$

deduciamo una nuova rete O dello stesso spazio; indichiamo con (π) e (π') la rete primitiva e la sua trasformata.

Se poniamo

$$\left. \begin{aligned} x_r &= - \frac{x_{1r}}{x_{1n+2} - 1} \\ x'_r &= - \frac{x'_{1r}}{x'_{1n+2} + 1} \end{aligned} \right\} \quad (r = 1, 2, \dots, n+1) \quad (38)$$

(*) Precisamente si ha:

$$y'_r = \frac{\lambda' w'_1}{m H'} \xi'_r + \frac{\mu' w'_1}{m H'} \eta'_r + \frac{w'_1}{m H'} \sum_{k=3}^n w'_k y_{kr} + \frac{w'_1}{m H'} w'_1 y_r - y_r.$$

le reti (π) e (π') vengono rappresentate conformemente sullo spazio euclideo in due nuove reti (P) e (P') .

Per avere gli elementi della rete (P) deriviamo la prima delle (38); otteniamo

$$\frac{\partial x_r}{\partial u} = \frac{a_1}{x_{1n+2} - 1} \left[\frac{\xi_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} x_{1r} - \xi_r \right]$$

quindi

$$\xi'_r = \frac{\xi_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} x_{1r} - \xi_r. \quad (39)$$

Similmente

$$\eta'_r = \frac{\eta_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} x_{1r} - \eta_r. \quad (40)$$

Introducendo ancora le funzioni

$$y_{kr} = \frac{x_{kn+2}}{x_{1n+2} - 1} x_{1r} - x_{kr}, \quad (k = 2, 3, \dots, n) \quad (41)$$

le (39), (40), (41) danno tutti gli elementi della rete (P) e si ha

$$\frac{\partial \xi'_r}{\partial v} = \left[q - \frac{\xi_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} b_1 \right] \eta'_r,$$

$$\frac{\partial \eta'_r}{\partial u} = \left[p - \frac{\eta_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} a_1 \right] \xi'_r,$$

$$\frac{\partial y_{kr}}{\partial u} = \left[a_k - \frac{x_{kn+2}}{x_{1n+2} - 1} a_1 \right] \xi'_r,$$

$$\frac{\partial y_{kr}}{\partial v} = \left[b_k - \frac{x_{kn+2}}{x_{1n+2} - 1} b_1 \right] \eta'_r.$$

Se ora poniamo

$$\lambda' = \lambda - \frac{\xi_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} w_1, \quad \mu' = \mu - \frac{\eta_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} w_1,$$

$$\psi' = \frac{w_1}{x_{1n+2} - 1}, \quad \sigma' = -\frac{H}{w_1} (x'_{1n+2} + 1),$$

$$w'_k = w_k - \frac{x_{kn+2}}{x_{1n+2} - 1} w_1, \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

avremo il sistema di funzioni trasformatrici per passare dalla rete (P)

alla (P') , e precisamente si ha:

$$x'_r = x_r - \frac{1}{m\sigma'} \left(\lambda' \xi'_r + \mu' \eta'_r + \sum_{k=2}^n w'_k y_{kr} \right).$$

§ 7. LE TRASFORMAZIONI R ED $\overline{R}$ E IL TEOREMA DI PERMUTABILITÀ
NEGLI SPAZI DI CURVATURA COSTANTE.

14. Abbiamo visto che, partendo da un determinante della forma (1), le (35) danno due reti O di uno spazio S_n di curvatura costante legate tra loro da una trasformazione di RIBAUCOUR (trasformazione R).

Dimostriamo facilmente che *ogni trasformazione di Ribaucour dello spazio S_n di curvatura costante si ottiene nella maniera suddetta.*

Infatti siano (π) e (π') le due reti O , legate dalla trasformazione R e rappresentiamole conformemente sullo spazio euclideo in (P) e (P') . Formando il sistema di GUICHARD delle $n+2$ sfere a due a due ortogonali, relativo alle reti (P) e (P') , si ottiene il determinante (1) e le coordinate pentasferiche di (P) e (P') saranno

$$x_r = x_{1r} + i x_{2r}; \quad x'_r = x_{1r} - i x_{2r}.$$

Se ora operiamo il passaggio inverso per trasformare (P) e (P') in (π) e (π') , le coordinate di WEIERSTRASS di (π) e (π') prendono appunto la forma (35).

15. Anche nello spazio di curvatura costante possiamo introdurre la trasformazione $\overline{R}$, procedendo nel seguente modo. Trasformiamo il determinante Δ in Δ' col metodo del § 2; le reti (π) e (π') si cambiano rispettivamente in due altre (π_1) e (π'_1) .

Il passaggio dalla rete (π) alla (π_1) [o da (π') a (π'_1)] continueremo ancora a chiamare *trasformazione $\overline{R}$* .

Due reti O , dedotte l'una dall'altra con una trasformazione R , sono anche deducibili l'una dall'altra per trasformazione $\overline{R}$, ed inversamente ().*

(*) Per l'esattezza di questo teorema, in relazione alle definizioni superiori, si prendano per (π) e (π') le coordinate di WEIERSTRASS

$$i \frac{x_r + i x_{2r}}{x_{1n+2} + i x_{2n+2}}; \quad -i \frac{x_{1r} - i x_{2r}}{x_{1n+2} - i x_{2n+2}},$$

16. Infine osservando che la trasformazione $\overline{R}$ cambia due reti O , legate da una R , in due altre tali reti, risulta senz'altro il teorema di permutabilità.

§ 8. LE CONGRUENZE k NELLO SPAZIO S_n EUCLIDEO.

17. Assumiamo le quattro reti (P) , (P') , (P_1) , (P'_1) del teorema di permutabilità; esiste in infiniti modi un punto Q' equidistante da P , P' , P_1 . Un tale punto Q' è individuato dalla condizione di appartenere ad uno dei piani principali della rete.

Consideriamo il piano individuato dalla tangente alla linea $u = \text{cost.}$ e dalla normale $\overline{A_k P}$, che indichiamo con π_k ; la sfera che ha per coordinate

$$\frac{w_k n_r - \mu x_{kr}}{\sqrt{w_k^2 + \mu^2}} \quad \begin{matrix} (r = 1, 2, \dots, n, n+1, n+2) \\ (k = 3, 4, \dots, n) \end{matrix} \quad (42)$$

ha il centro sul piano π_k , inoltre le relazioni

$$\sum_{r=1}^{n+2} (w_k n_r - \mu x_{kr}) (x_{1r} \pm i x_{2r}) = 0$$

mostrano che la sfera passa pei punti P e P' . Inoltre per le (7) ed (8) le espressioni (42) si possono anche scrivere

$$- \frac{w_k n'_r - \mu x'_{kr}}{\sqrt{w_k^2 + \mu^2}}$$

donde segue subito

$$\sum_{r=1}^{n+2} (w_k n'_r - \mu x'_{kr}) (x'_{1r} \pm i x'_{2r}) = 0$$

e per (π'_1) e (π'_1) le coordinate di WEIERSTRASS

$$-i \frac{x'_{1r} + i x'_{2r}}{x'_{1n+2} + i x'_{2n+2}}; \quad i \frac{x'_{1r} - i x'_{2r}}{x'_{1n+2} - i x'_{2n+2}}$$

essendo x_{kr} ed x'_{kr} gli elementi dei determinanti (1) e (9).

(*) Semprechè $(w_k n_{n+1} - \mu x_{kn+1}) + i(w_k n_{n+2} - \mu x_{kn+2})$ sia diverso da zero, il che qui diamo per ipotesi; analogamente supponiamo pure $(w_k \xi_{n+1} - \lambda x_{kn+1}) + i(w_k \xi_{n+2} - \lambda x_{kn+2})$ diverso da zero.

e la sfera passa anche per P_1 e P'_1 . Il centro della sfera considerata è dunque il punto Q' richiesto.

Similmente la sfera che ha per coordinate

$$\frac{w_k \xi_r - \lambda x_{kr}}{\sqrt{w_k^2 + \lambda^2}}$$

ha il centro nel piano individuato dalla tangente alla linea $v = \text{cost.}$ e dalla stessa normale $\overline{A_k P}$, e questo centro (che chiamiamo Q'') è pure equidistante dai punti P, P', P_1, P'_1 .

Chiamiamo *congruenza k* la congruenza generata dalla retta $\overline{Q' Q''}$; per $n = 3$ ne esiste una sola, per $n > 3$ ne esiste una per ogni coppia di piani principali della rete e la diremo *coniugata* alla coppia π_k, π'_k dei detti piani principali.

18. Dimostreremo subito che *per ciascuna congruenza k le sviluppabili corrispondono alle curve (u, v) della rete, ed i fuochi sono le intersezioni della retta k coi piani principali π_k e π'_k a cui la congruenza è coniugata.*

Infatti se poniamo per un momento

$$y_r = w_k \eta_r - \mu x_{kr}, \quad z_r = w_k \xi_r - \lambda x_{kr}$$

e teniamo presenti le (2) e le (11) troviamo

$$\frac{\partial y_r}{\partial u} = \frac{a_k}{w_k} (\lambda y_r - \mu z_r) + p z_r,$$

donde

$$\begin{aligned} & \frac{(y_{n+1} + i y_{n+2}) \frac{\partial y_r}{\partial u} - y_r \left(\frac{\partial y_{n+1}}{\partial u} + i \frac{\partial y_{n+2}}{\partial u} \right)}{(y_{n+1} + i y_{n+2}) (z_{n+1} + i z_{n+2})} = \\ & = \left(\frac{a_k}{w_k} \mu - p \right) \left[\frac{y_r}{y_{n+1} + i y_{n+2}} - \frac{z_r}{z_{n+1} + i z_{n+2}} \right]. \end{aligned}$$

Questa relazione prova che, variando solamente u , il punto Q' descrive una curva tangente alla retta k ; similmente per Q'' e la proposizione è stabilita.

19. Riprendiamo le espressioni delle coordinate pentasferiche dei quattro punti P, P', P_1, P'_1 ; cioè

$$\begin{aligned} x_r &= x_{1r} + i x_{2r}; & x'_r &= x_{1r} - i x_{2r} \\ x_r^{(1)} &= x'_{1r} + i x'_{2r}; & x_r^{(2)} &= x'_{1r} - i x'_{2r}. \end{aligned}$$

Tenendo presenti le espressioni (7), otteniamo

$$\begin{aligned} x_r^{(1)} &= \frac{n_1 + i n_2}{m H} \left(\lambda \xi_r + \mu \eta_r + \sum_{s=1}^n n_s x_{sr} \right) - x_r \\ x_r^{(2)} &= \frac{n_1 - i n_2}{m H} \left(\lambda \xi_r + \mu \eta_r + \sum_{s=1}^n n_s x_{sr} \right) - x'_r \end{aligned}$$

donde

$$(n_1 - i n_2) x_r^{(1)} - (n_1 + i n_2) x_r^{(2)} = - (n_1 - i n_2) x_r + (n_1 + i n_2) x'_r.$$

Consideriamo il piano $PP_1P'_1$, che indichiamo con π ; le coordinate cartesiane di un suo punto hanno le espressioni

$$\begin{aligned} & - \frac{x_r}{x_{n+1} + i x_{n+2}} + h \left(\frac{x_r^{(1)}}{x_{n+1}^{(1)} + i x_{n+2}^{(1)}} - \frac{x_r}{x_{n+1} + i x_{n+2}} \right) - \\ & - l \left(\frac{x_r^{(2)}}{x_{n+1}^{(2)} + i x_{n+2}^{(2)}} - \frac{x_r}{x_{n+1} + i x_{n+2}} \right); \end{aligned} \quad (43)$$

se prendiamo

$$h = \rho (n_1 - i n_2) (x_{n+1}^{(1)} + i x_{n+2}^{(1)})$$

$$l = \rho (n_1 + i n_2) (x_{n+1}^{(2)} + i x_{n+2}^{(2)})$$

si avrà

$$\begin{aligned} h \frac{x_r^{(1)}}{x_{n+1}^{(1)} + i x_{n+2}^{(1)}} - l \frac{x_r^{(2)}}{x_{n+1}^{(2)} + i x_{n+2}^{(2)}} &= - \rho \left[(n_1 - i n_2) x_r - (n_1 + i n_2) x'_r \right], \\ -h + l &= \rho \left[(n_1 - i n_2) (x_{n+1} + i x_{n+2}) - (n_1 + i n_2) (x'_{n+1} + i x'_{n+2}) \right] \end{aligned}$$

e quindi l'espressione (43) diventa

$$- \frac{x_r}{x_{n+1} + i x_{n+2}} \left[1 + \rho (n_1 + i n_2) (x'_{n+1} + i x'_{n+2}) \right] + \rho (n_1 + i n_2) x'_r.$$

Per

$$\rho (n_1 + i n_2) = - \frac{1}{x'_{n+1} + i x'_{n+2}},$$

si cade nel punto P' .

20. Nel piano π prendiamo la retta $\overline{PP'}$; essa congiunge i punti corrispondenti di due reti armoniche alla congruenza $(\overline{RS})$ e quindi descrive una congruenza riferita alle sviluppabili; similmente la retta $\overline{PP_1}$ congiunge i punti corrispondenti di due reti armoniche ad una medesima congruenza [analoga ad $(\overline{RS})$] e quindi descrive pure una congruenza riferita alle sviluppabili. Dunque il piano π contiene due rette, ciascuna delle quali descrive una congruenza (riferita alle sviluppabili) coniugata alla rete (P) ; il piano π involuppa perciò una rete (π) armonica ad entrambe le congruenze.

21. Veniamo ora alla classificazione delle congruenze k .

A tale scopo cerchiamo se due congruenze k , generate dalla stessa quaterna $(P), (P'), (P_1), (P'_1)$, possono essere parallele.

Se poniamo

$$\begin{aligned} t &= w_k (\eta_{n+1} + i \eta_{n+2}) - (x_{kn+1} + i x_{kn+2}) \\ t' &= w_k (\tilde{\eta}_{n+1} + i \tilde{\eta}_{n+2}) - \lambda (x_{kn+1} + i x_{kn+2}) \end{aligned}$$

i parametri direttori della congruenza k hanno le espressioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_k \eta_r - \mu x_{kr}}{t} - \frac{w_k \tilde{\eta}_r - \lambda x_{kr}}{t'} \\ (r = 1, 2, \dots, n; \quad k = 3, 4, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Introduciamo le quantità

$$\begin{aligned} \xi_r^{(1)} &= \frac{\tilde{\eta}_{n+1} + i \tilde{\eta}_{n+2}}{\eta_{n+1} + i \eta_{n+2}} x_r - \tilde{\eta}_r \\ \eta_r^{(1)} &= \frac{\eta_{n+1} + i \eta_{n+2}}{x_{n+1} + i x_{n+2}} x_r - \eta_r \\ x_{kr}^{(1)} &= \frac{x_{kn+1} + i x_{kn+2}}{x_{n+1} + i x_{n+2}} x_r - x_{kr} \end{aligned}$$

avremo

$$\begin{aligned} \frac{w_k \eta_r^{(1)} - \mu x_{kr}^{(1)}}{t} &= \frac{x_r}{x_{n+1} + i x_{n+2}} - \frac{w_k \eta_r - \mu x_{kr}}{t} \\ \frac{w_k \xi_r^{(1)} - \lambda x_{kr}^{(1)}}{t'} &= \frac{x_r}{x_{n+1} + i x_{n+2}} - \frac{w_k \tilde{\eta}_r - \lambda x_{kr}}{t'} \end{aligned}$$

e quindi come parametri direttori di k possiamo prendere

$$\frac{w_k \eta_r^{(1)} - \mu x_{kr}^{(1)}}{t} - \frac{w_k \xi_r^{(1)} - \lambda x_{kr}^{(1)}}{t'}.$$

Ciò premesso esprimiamo che due congruenze k sono parallele; si dovrà avere

$$\frac{w_k \eta_r^{(1)} - \mu x_{kr}^{(1)}}{t} - \frac{w_k \xi_r^{(1)} - \lambda x_{kr}^{(1)}}{t'} = H \left[\frac{w_k \eta_r^{(1)} - \mu x_{kr}^{(1)}}{\tau} - \frac{w_k \xi_r^{(1)} - \lambda x_{kr}^{(1)}}{\tau'} \right]$$

$$(h = k)$$

in cui H è un fattore di proporzionalità e τ, τ' sono le quantità analoghe a t e t' .

La precedente si può anche scrivere

$$\left(\frac{w_k}{t} - H \frac{w_h}{\tau} \right) \eta_r^{(1)} - \left(\frac{w_k}{t'} - H \frac{w_h}{\tau'} \right) \xi_r^{(1)} - \left(\frac{\mu}{t} - \frac{\lambda}{t'} \right) x_{kr}^{(1)} + H \left(\frac{\mu}{\tau} - \frac{\lambda}{\tau'} \right) x_{hr}^{(1)} = 0;$$

da cui se moltiplichiamo per $x_{kr}^{(1)}$, avendo riguardo alle relazioni

$$\sum_{r=1}^n x_{kr}^{(1)} \eta_r^{(1)} = 0, \quad \sum_{r=1}^n x_{kr}^{(1)} \xi_r^{(1)} = 0$$

$$\sum_{r=1}^n (x_{kr}^{(1)})^2 = 1, \quad \sum_{r=1}^n x_{kr}^{(1)} x_{hr}^{(1)} = 0$$

(che è facile verificare), otteniamo

$$\frac{\mu}{t} - \frac{\lambda}{t'} = 0$$

cioè

$$\frac{\lambda}{\xi_{n+1} + i \xi_{n+2}} = \frac{\mu}{\eta_{n+1} + i \eta_{n+2}}. \quad (45)$$

Inversamente se questa condizione è soddisfatta, le espressioni (44) a meno di un fattore prendono la forma

$$\frac{\eta_r}{\eta_{n+1} + i \eta_{n+2}} - \frac{\xi_r}{\xi_{n+1} + i \xi_{n+2}}$$

e le congruenze k considerate sono tutte parallele alla congruenza $(\overline{RS})$.

In questo caso il sistema delle quattro reti $(P), (P'), (P_1), (P'_1)$ sarà detto un *sistema k di prima specie*; in caso diverso sarà detto *di seconda specie*.

Il risultato precedente dà subito: *una congruenza k relativa ad un sistema k di prima specie è ciclica.*

22. Un'altra importante proprietà dei sistemi k di prima specie otteniamo dalle seguenti considerazioni.

Un facile calcolo, che per brevità non riportiamo, mostra che in tale ipotesi il piano π contiene una *normale* alla rete (P) ; abbiamo dunque in π una *congruenza normale* coniugata a (P) e perciò la rete inviluppata dal piano π è armonica ad una congruenza normale e quindi è ciclica. Dunque *in un sistema k di prima specie il piano π inviluppa una rete ciclica.*

23. In generale è da osservare che la congruenza $(\overline{PP'})$, od anche $(\overline{PP_1})$, essendo coniugata ad una rete O è $2O$ (*), e la rete inviluppata da π essendo armonica ad una congruenza $2O$ è $2C$ (**).

Si verifica col calcolo che l'ipotesi del n.º 22 è *il solo caso* in cui si ha una riduzione di grado per la rete (π) , dunque:

In un sistema k di seconda specie il piano π inviluppa una rete $2C$.

(*) Cioè è la proiezione di una congruenza O dello spazio ad $n+1$ dimensioni.

(**) Cioè è la proiezione di una rete ciclica dello spazio ad $n+1$ dimensioni.