Die Brennpunktscurve des Kegelschnittsbüschels.

Von Karl Bobek in Prag.

Obschon die Brennpunktscurve der Kegelschnittsschar als allgemeine Curve 3^{ter} Ordnung erkannt ist, scheint von der Brennpunktscurve des Kegelschnittsbüschels wenig bekannt zu sein. Aus den Andeutungen in der analytischen Geometrie der Kegelschnitte von Salmon-Fiedler auf pag. 266 und 369 ist nur ersichtlich, dass die Ordnung der Curve bekannt war, ohne dass alle ihre Singularitäten erwähnt erscheinen. Der specielle Fall, dass der Büschel von Kegelschnitten einen Kreis enthält, wird daselbst erwähnt und das Zerfallen der Brennpunktscurven angegeben. Eine anderweitige Behandlung dieses Gegenstandes ist mir trotz eifrigen Suchens aufzufinden nicht gelungen, so dass ich wohl annehmen kann, dass die folgenden Sätze über diese Curve neu sind.

Was die Hinweise auf die „Einleitung die projectivische Geometrie der Ebene“ anbelangt, so sollen diese nicht die Bedeutung haben, dass die citierten Sätze daselbst zum erstenmale bewiesen wurden, sie sollen überhaupt nur zur Orientierung über den Gegenstand dienen.

1. Geht ein Kegelschnitt H^2 durch die Ecken a, b, c eines dem Kegelschnitte K^2 conjugierten Poldreieckes, so enthält H^2 unendlich viele Poldreiecke von K^2 , jedes, dessen zwei Ecken auf H^2 liegen; mit anderen Worten: wird durch a, b, c irgend ein Kugelschnitt gelegt, welcher durch zwei in Bezug auf K^2 conjugierte Punkte $x, \bar{x}$ geht, so enthält derselbe auch den Pol der Geraden $x\bar{x}$ für K^2 .

Hieraus folgt der bekannte Satz: Legt man durch die Ecken eines Poldreieckes a, b, c von K^2 eine gleichseitige Hyperbel H^2 , deren Asymptoten die Axenrichtungen enthalten, so geht dieselbe auch durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes K^2 .

Aus diesem Satze ergibt sich sofort ein schöner Satz betreffend den Kegelschnittsbüschel: Die Axen der Kegelschnitte eines Büschels (K^2) schneiden auf dem Mittelpunktskegelschnitte $\mathfrak{M}^2$ des Büschels eine Involution aus, die projectivisch zum Büschel ist.

Ist nämlich a, b, c das allen Kegelschnitten des Büschels conjugierte Poldreieck, so bilden die gleichseitigen Hyperbeln H^2 ,

welche die Schnittpunkte der Axen der Kegelschnitte K^2 auf der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{M}$ enthalten, einen Büschel, dessen vierter Basispunkt d der Höhenschnittpunkt des Dreieckes abc ist. In der Steiner'schen Verwandtschaft $\mathfrak{St}(K^2)$, welche durch den Büschel (K^2) festgelegt ist, und deren Hauptpunkte a, b, c sind, entspricht der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{M}$ der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^2$ des Büschels.¹⁾ Es sei m der Mittelpunkt von K^2 , also Pol von $\mathfrak{M}$ für K^2 , $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die Axen von K^2 , welche $\mathfrak{M}^2$ noch in y und x schneiden, dann ist der unendlich ferne Punkt $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{A}$ der x entsprechende Punkt in $\mathfrak{St}(K^2)$ und ebenso ist der unendlich ferne Punkt $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{B}$ der y in $\mathfrak{St}(K^2)$ zugeordnete. Mithin wird der gleichseitigen Hyperbel H^2 durch $a, b, c, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ in $\mathfrak{St}(K^2)$ die Gerade $\overline{xy} = \mathfrak{H}$ entsprechen. Ist also $\mathfrak{d}$ der d in $\mathfrak{St}(H^2)$ zugeordnete Punkt, so beschreiben die Geraden $\overline{xy} = \mathfrak{H}$ den Büschel $(\mathfrak{b})$ und mithin bilden die Punktpaare xy , in welchen die Axen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ den Mittelpunktskegelschnitt treffen, eine Involution $\{C\}$, deren Pol $\mathfrak{d}$ ist. Da H^2 den $\mathfrak{M}^2$ noch in dem Mittelpunkte m von K^2 schneidet, so entspricht m in $\mathfrak{St}(K^2)$ der unendlich ferne Punkt m von $\overline{xy} = \mathfrak{H}$, und weil das Entsprechen zwischen den Punkten von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^2$, wie es die $\mathfrak{St}(K^2)$ fordert, ein projectivisches ist, so ist die Involution $\{C\}$ zur Punktreihe m von $\mathfrak{M}^2$, also zum Büschel projectivisch. Hieraus folgt auch, dass $\{C\}$ stets elliptisch sein muss, da den Punktpaaren xy von $\{C\}$ die Punktpaare $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{M}$ entsprechen, welche die circulare Involution $\{C\}$ bilden. $\mathfrak{d}$ liegt also stets innerhalb $\mathfrak{M}^2$.

Ist $\mathfrak{M}^2$ eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{M}_0^2$, dann fällt d bekanntlich auch auf $\mathfrak{M}_0^2$ und $\mathfrak{d}$ liegt daher im Unendlichen auf $\mathfrak{M}$, aber innerhalb $\mathfrak{M}_0^2$. Die Axen der Kegelschnitte des Büschels haben, die einen, $\mathfrak{A}$, die Richtung $\mathfrak{s}$ der Asymptote von $\mathfrak{M}_0^2$, die anderen, $\mathfrak{B}$, die Richtung $\mathfrak{s}'$ der zweiten Asymptote von $\mathfrak{M}_0^2$. d ist der Mittelpunkt des im Büschel enthaltenen Kreises K_0^2 ; da für K_0^2 die Richtungen von $\overline{da}$ und $\overline{bc}$ ebenso von $\overline{db}$ und $\overline{ac}$ sowie $\overline{dc}$ und $\overline{ab}$ conjugiert sind.

2. Die Axen der Kegelschnitte K^2 des Büschels (K^2) umhüllen eine Curve dritter Classe $\mathfrak{A}^3$, die $\mathfrak{M}$ zur Doppeltangente hat. Denn die Punktreihe $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{M}$ ist projectivisch zu der von x auf $\mathfrak{M}^2$ beschriebenen, also auch projectivisch zur Punktreihe $\mathfrak{y}$, und $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ ist die Axe von K^2 , dessen Mittelpunkt m dem unendlich fernen Punkte m von $\overline{xy}$ in $\mathfrak{St}(K^2)$ entspricht.

¹⁾ Vgl. Einleitung in die projectivische Geometrie der Ebene. Nach den Vorlesungen des Herrn C. Küpper bearbeitet von Dr. K. Bobek, Leipzig 1889, S. 114, §. 3.

Die Berührungspunkte von $\mathfrak{U}^3$ auf $\mathfrak{M}$ sind die Punkte t, t' , welche den Asymptotenrichtungen $\bar{s}, \bar{s}'$ von $\mathfrak{M}^2$ in $\{\mathfrak{C}\}$ entsprechen. Denn $\bar{s}, \bar{s}'$ sind einander conjugiert für alle Kegelschnitte des Büschels, entsprechen einander also in $\mathfrak{St}(K^2)$. Dem Paare $t\bar{s}$ von $\{\mathfrak{C}\}$ muss mithin in $\mathfrak{St}(K^2)$ das Paar $t\bar{s}'$ auf $\mathfrak{M}^2$ entsprechen, so dass $t\bar{s}'$ durch b geht. Die durch t gehende Axe ist also nach obigem $t\bar{s}'$ oder fällt mit $\mathfrak{M}$ zusammen: t ist mithin Berührungspunkt von $\mathfrak{U}^3$ auf $\mathfrak{M}$. Dasselbe gilt von t' . Man bemerkt sofort, dass $t\bar{s}, t'\bar{s}'$ die Axen der im Büschel (K^2) enthaltenen Parabeln sind.

Durch jeden Punkt m von $\mathfrak{M}^2$ gehen 3 Axen: die beiden Axen $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$, des Kegelschnittes K^2 , dessen Mittelpunkt m ist und eine dritte Axe $\mathfrak{U}'$, welche auf der Richtung m , die m in $\mathfrak{St}(K^2)$ entspricht, senkrecht steht, und dem Kegelschnitte K'^2 zugehört, dessen Mittelpunkt m' der zweite Schnittpunkt von $\mathfrak{U}'$ mit $\mathfrak{M}^2$ ist. Denn für K'^2 sind, wie für alle Kegelschnitte des Büschels, m und m conjugierte Punkte, und da für K'^2 überdies m' Pol von $\mathfrak{M}$ ist, so ist $\overline{m'm} = \mathfrak{U}'$ Polare von m für K'^2 , also eine Axe.

Sind m_1, m_2, m_3 die Deckpunkte der Punktreihe m und der ihr projectivischen Involution $\{C\}$, so sind $\overline{bm_1}, \overline{bm_2}, \overline{bm_3}$ Normalen von $\mathfrak{M}^2$. Denn ist K_1^2 der Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt m_1 ist, so muss der ihm zugehörige Strahl von (b) durch m_1 gehen und schneidet $\mathfrak{M}^2$ noch in m'_1 . Diesen Punkten m_1, m'_1 entspricht das Paar m_1, m'_1 von $\{\mathfrak{C}\}$, so zwar, dass m_1 die Richtung von $\overline{bm_1}$ ist. Aus m_1 wird nun das Paar m_1, m'_1 durch die Axen des Kegelschnittes K_1^2 projiciert, daher ist $\overline{m_1 m'_1} = \mathfrak{U}_1$ die eine Axe und die Tangente $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{M}^2$ in m_1 ist die andere Axe, diese enthält die Richtung m'_1 .

Die dritte durch m_1 gehende Axe $\mathfrak{U}'$ fällt offenbar mit $\mathfrak{B}_1$ zusammen, da sie auf $\overline{bm_1}$ senkrecht stehen muss. Daher sind m_1, m_2, m_3 Punkte von $\mathfrak{U}^3$ und $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ gemeinschaftliche Tangenten von $\mathfrak{M}^2$ und $\mathfrak{U}^3$.

Auch die drei in d sich schneidenden Höhen des Dreieckes a, b, c sind Axen dreier Kegelschnitte, deren Mittelpunkte in den zweiten Schnittpunkten dieser Höhen mit $\mathfrak{M}^2$ gelegen sind. Denn in a schneiden sich die Axen des Geradenpaares im Büschel, und als dritte Axe tritt diejenige auf, welche senkrecht auf der a entsprechenden Richtung a steht, welche letztere auf $\overline{bc}$ liegt.

Ist $\mathfrak{M}^2$ eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{M}_0^2$, so besteht $\mathfrak{U}^3$ aus den drei Punkten $d, \bar{s}, \bar{s}'$: dem Kreismittelpunkte und den beiden Asymptotenrichtungen.

3. Ist $\mathfrak{U}$ die Axe eines Kegelschnittes K^2 und abc ein Pol-dreieck desselben, so mögen die Seiten $\overline{bc}, \overline{ca}, \overline{ab}$ auf $\mathfrak{U}$ die Punkte a, b, c ausschneiden und die Höhen des Dreieckes die Punkte a', b', c' .

Dann sind aa' , bb' , cc' drei Paare einer Involution $\{\mathfrak{A}\}$, deren Deckpunkte f, f_1 die auf $\mathfrak{A}$ gelegenen Brennpunkte von K^2 sind.¹⁾ Ist d der Höhenschnittpunkt des Dreieckes, so wird dieselbe Involution $\{\mathfrak{A}\}$ ausgeschnitten von dem Büschel gleichseitiger Hyperbeln (H^2) durch a, b, c, d .²⁾ In f und f_1 berührt je eine dieser Hyperbeln die $\mathfrak{A}$. Der Büschel H^2 möge die Steinersche Verwandtschaft $\mathfrak{St}(H^2)$ bestimmen, dann geht der $\mathfrak{A}$ entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{A}^2$ durch f, f_1 und die drei Hauptpunkte der Verwandtschaft a', b', c' , welche die Höhenfußpunkte des Dreieckes a, b, c sind.

Beschreibt $\mathfrak{A}$ die Enveloppe $\mathfrak{A}^3$ der Axen der Kegelschnitte des Büschels (K^2) und ist abc das allen Kegelschnitten conjugierte Poldreieck, so bilden die Kegelschnitte $\mathfrak{A}^2$ ein System dritter Ordnung.

Da die Tangenten $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}^3$ den Kegelschnitten $\mathfrak{A}^2$ des Systems 3^{ter} Ordnung projectivisch zugeordnet sind, so erzeugen sie zusammen ein Gebilde $3 \times 2 + 3 \times 1 = 9^{\text{ter}}$ Ordnung. Darunter befinden sich die drei Höhen $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$. Denn die Gerade $\overline{aa'}$ etwa ist, wie oben gezeigt eine Axe, der ihr entsprechende Kegelschnitt in $\mathfrak{St}(H^2)$ besteht aus $\overline{aa'}$ und $\overline{b'c'}$, also gehört $\overline{aa'}$ mit zum Erzeugnisse. Die übrig bleibende Curve 6^{ter} Ordnung C^6 ist der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte des Büschels (K^2).

Durch a, b, c gehen, außer der Höhe des Dreieckes, noch je die beiden Axen des in ein Geradenpaar zerfallenden Kegelschnittes des Büschels (K^2). Ist $\mathfrak{A}_a$ etwa die eine Axe, des in a sich schneidenden Geradenpaares, so wird dieselbe von dem ihr in $\mathfrak{St}(H^2)$ entsprechenden Kegelschnitt $\mathfrak{A}_a^2$ in a berührt, da a ein Basispunkt des Büschels (H^2) ist. Daher ist $\mathfrak{A}_a$ Tangente der C^6 in a . Dasselbe gilt von der zweiten Axe $\mathfrak{B}_a$. Auch durch die Punkte a', b', c' gehen noch je zwei Axen. Seien $\mathfrak{A}_a', \mathfrak{B}_a'$ die sich in a' schneidenden, dann entsprechen ihnen Kegelschnitte, die aus $\overline{b'c'}$ und je einer Geraden durch a' bestehen, der von $\mathfrak{A}_a'$ resp. $\mathfrak{B}_a'$ durch $\overline{a'a}$ und $\overline{a'b'c}$ harmonisch getrennten. Diese letzteren sind daher die Doppelpunktstangenten der C^6 in a' . Der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{M}$ entspricht in $\mathfrak{St}(H^2)$ der Kreis $\mathfrak{K}^2$ durch a', b', c' , welcher Mittelpunktskegelschnitt des Büschels (H^2) ist, und seine Schnittpunkte mit $\mathfrak{M}$ sind Doppelpunkte von C^6 , da $\mathfrak{M}$ Doppeltangente von $\mathfrak{A}^3$ ist. Fassen wir diese Resultate zusammen, so lauten sie:

Der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte eines Büschels ist eine Curve 6^{ter} Ordnung, welche die Ecken des allen Kegelschnitten conjugierten Poldreieckes, die Höhenfußpunkte dieses Dreieckes und die imaginären Kreispunkte der Ebene zu Doppel-

¹⁾ Vgl. Einleitung Seite 132, Lehrsatz 4.

²⁾ Vgl. Einleitung Seite 148, §. 4.

punkten hat. In den Ecken des Poldreieckes sind die Doppelpunktstangenten zu einander orthogonal.

4. In der Steinerschen Verwandtschaft $\mathfrak{St}(H^2)$ ist jedem Punkte z der Ebene eine Curve 3^{ter} Ordnung C_z^3 derart zugeordnet, dass auf derselben die sich entsprechenden Punktepaare der Strahlen des Büschels (z) liegen. Sie wird erzeugt durch den Strahlenbüschel (z) und den ihm in $\mathfrak{St}(H^2)$ entsprechenden Kegelschnittbüschel. C_z^3 geht daher durch die Punkte a, b, c, d, a', b', c' und $\mathfrak{z}$, wobei letzterer der z in $\mathfrak{St}(H^2)$ entsprechende ist. Da der Kegelschnitt, welcher dem Strahle za zugeordnet ist, diesen in a berührt, so bilden a, b, c, d auf C_z^3 ein Quadrupel, dessen Tangentialpunkt z ist. Auch die Punkte a', b', c', z bilden ein Quadrupel, dessen Tangentialpunkt $\mathfrak{z}$ ist.

Je zwei Curven C_z^3 und $C_{\bar{z}}^3$ scheiden einander ausser in den 7 festen Punkten a, b, c, d, a', b', c' noch in dem Punktepaar $s, \bar{s}$ auf $z\bar{z}$, welches sich in $\mathfrak{St}(H^2)$ entspricht. In dem Curvenbüschel 3^{ter} Ordnung durch $a, b, c, d, a', b', c', s, \bar{s}$ entspricht jede Curve dem dritten Schnittpunkte mit $s\bar{s}$.

Jede durch a, b, c, d, a', b', c' gehende Curve 3^{ter} Ordnung C^3 entspricht dem Tangentialpunkt z des Quadrupels a, b, c, d ; denn ist z der Tangentialpunkt von a , so ist C_z^3 mit C^3 identisch.¹⁾

Mithin entspricht jede C^3 durch die erwähnten 7 Punkte sich selbst in $\mathfrak{St}(H^2)$ und je zwei solche Curven müssen sich daher in einem Paare entsprechender Punkte von $\mathfrak{St}(H^2)$ schneiden.

Da C_z^3 die drei durch z gehenden Axen der Kegelschnitte des Büschels (K^2) in den drei Brennpunktepaaren, also auf C^6 schneidet, so folgt:

Jede durch die 6 Doppelpunkte a, b, c, a', b', c' gehende Curve dritter Ordnung C^3 , welche noch den Höhenschnittpunkt d enthält, schneidet die Brennpunktcurve C^6 in drei Punktepaaren, welche Brennpunkte von drei Kegelschnitten des Büschels (K^2) sind. Die drei Axen dieser Kegelschnitte, welche die drei Paare von Brennpunkten tragen, schneiden einander in einem Punkte der C^3 , welcher Tangentialpunkt von a, b, c und d ist.

Den Punkten $\mathfrak{x}$ der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{M}$ sind die Curven dritter Ordnung $C_{\mathfrak{x}}^3$ zugeordnet, welche durch die imaginären Kreispunkte $j, \bar{j}$ der Ebene gehen. Jede solche $C_{\mathfrak{x}}^3$ schneidet C^6 nur in einem Punktepaar $\mathfrak{j}, \bar{\mathfrak{j}}$, welches auf der Axe $\mathfrak{N}$ gelegen ist,

¹⁾ Es ist bekanntlich a, b, c, d auf jeder durchgehenden C^3 ein Quadrupel, welche auch durch die Ecken des Diagonaldreieckes des Viereckes $abcd$ hindurchgeht.

die durch $\mathfrak{x}$ geht. Hieraus sieht man, dass die Brennpunktepaare der Kegelschnitte des Büschels auf C^6 die, auf dieser vorhandene lineare Schar von Gruppen zu zwei Punkten, $g_2^{(1)}$, bilden. Die Schar wird von dem Büschel adjungierter Curven ($C_{\mathfrak{x}}^3$) ausgeschnitten.

Die Axen $\mathfrak{A}_a, \mathfrak{B}_a$ des in a sich schneidenden Geradenpaares mögen $\mathfrak{M}$ in α und β treffen. Dann berührt C_a^3 offenbar $\mathfrak{A}_a$ in a , die beiden Brennpunkte von $\mathfrak{A}_a$ liegen in a , also liegen auf dem Zweige von C^6 , welcher $\mathfrak{A}_a$ berührt, in a zwei Punkte der $g_2^{(1)}$ vereinigt. Dasselbe gilt für den anderen Zweig, der $\mathfrak{B}_a$ berührt, ebenso wie für die beiden Doppelpunkte b und c .

Die C_t^3 , welche dem in 2 betrachteten Berührungspunkte von $\mathfrak{M}^3$ auf $\mathfrak{M}$ entspricht, enthält das Paar Brennpunkte, welches auf $\mathfrak{M}$ liegt, denn nur diese Axe geht durch t , und da dasselbe Paar gleichzeitig von dem $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{St}(H^2)$ entsprechenden Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ ausgeschnitten wird, so ist es das Paar imaginärer Kreispunkte j, j_1 ; daher berührt C_t^3 die C^6 in j und j_1 . Dasselbe thut $C_{j_1}^3$. Den beiden Punkten auf den Zweigen von C^6 in j sind also in $g_2^{(1)}$ zugeordnet die beiden Punkte auf den Zweigen in j_1 , und zwar so, dass entsprechende Zweige von derselben Curve des Büschels ($C_{\mathfrak{x}}^3$) berührt werden.

Die Curve C^6 ist, wie alle Curven vom Geschlechte 2, hyperelliptisch¹⁾, sie hat aber das besondere, dass die $2p+2=6$ Coincidenzpunkte der hyperelliptischen Beziehung in drei Doppelpunkte a, b, c fallen, auf jeden Zweig einer; ferner dass die beiden Zweige zweier Doppelpunkte j, j_1 zugeordnete Punkte der hyperelliptischen Beziehung tragen. Die C^6 entspricht sich selbst in $\mathfrak{St}(H^2)$ und zwar entspricht jedem Punkte f der Punkt f_1 , welcher mit ihm eine Gruppe der $g_2^{(1)}$ bildet.

4. Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die Axen eines Kegelschnittes, K^2 , des Büschels, $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ deren unendlich ferne Punkte, dann schneiden $C_{\mathfrak{x}}^3$ und $C_{\mathfrak{y}}^3$ auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Brennpunkte von K^2 aus, und wenn daher $C_{\mathfrak{y}}^3$ die $\mathfrak{A}$ in zwei reellen Punkten trifft, so schneidet $C_{\mathfrak{y}}^3$ die $\mathfrak{B}$ in zwei imaginären Punkten.

Nun bilden a, b, c, d auf $C_{\mathfrak{y}}^3$ ein Quadrupel mit dem Tangentialpunkte $\mathfrak{x}$ auf $C_{\mathfrak{y}}^3$ mit dem Tangentialpunkte $\mathfrak{y}$. Also durchschneiden sich $C_{\mathfrak{x}}^3$ und $C_{\mathfrak{y}}^3$ in a, b, c, d orthogonal. Dasselbe thun sie in a', b', c' . Denn die Tangente von $C_{\mathfrak{x}}^3$ in a' ist der Strahl $\overline{a'x}$, welcher mit

¹⁾ Vgl.: Brill & Nöther: „Über algebraische Functionen.“ Math. Annalen. Bd. VII.

$\overline{b'c'}$ zusammen den $\overline{a'x}$ in $\mathfrak{St}(H^2)$ entsprechenden Kegelschnitt bildet. Daher wird $\overline{a'x}$ von $\overline{a'x}$ durch $\overline{a'a}$ und $\overline{a'bc}$ harmonisch getrennt, oder es wird, da $\overline{a'a}$ auf $\overline{a'bc}$ senkrecht steht, der Winkel $x a' x$ von $\overline{a'a}$ und $\overline{a'bc}$ halbiert. Analog wird wenn $\overline{a'y}$ die Tangente von C_v^3 in a' ist, der Winkel $y a' y$ durch $\overline{a'a}$ und $\overline{a'bc}$ halbiert. Da nun $\overline{a'x}$ auf $\overline{a'y}$ senkrecht steht, so ist auch die Tangente $\overline{a'x}$ von C_x^3 orthogonal zur Tangente $\overline{a'y}$ von C_v^3 im Punkte a' . Wie schon früher erwähnt ist, der x in $\mathfrak{St}(H^2)$ zugeordnete Punkt x Tangentialpunkt von a', b', c', x auf C_x^3 und y ist analog Tangentialpunkt von a', b', c', y auf C_v^3 . Man hat somit:

Der zu C^6 adjungierte Büschel von Curven 3^{ter} Ordnung schneidet auf C^6 die Brennpunktpaare der Kegelschnitte aus. Je zwei solche Curven, die sich einem der 6 im endlichen liegenden Doppelpunkte von C^6 , also auch in allen übrigen, orthogonal schneiden, treffen die C^6 in zwei Punktpaaren, die Brennpunkte eines Kegelschnittes sind. Die C^3 enthalten natürlich alle den Höhenschnittpunkt d als 9^{ten} Punkt. Sind s, s' die $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$ in $\mathfrak{St}(H^2)$ entsprechenden Punkte, so sind dieselben Brennpunkte der beiden im Büschel (K^2) enthaltenen Parabeln, man hat somit den Satz: Die Brennpunkte der im Büschel enthaltenen Parabeln liegen auf dem Kreise $\mathfrak{R}_1^2$ welcher durch die Höhenfußpunkte des allen Kegelschnitten des Büschels conjugierten Poldreieckes hindurch geht.

5. Ist der Mittelpunktskegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{M}_0^2$, dann haben die Axen $\mathfrak{A}$ der Kegelschnitte des Büschels die Richtung $\mathfrak{s}$, die Axen $\mathfrak{B}$ die Richtung $\mathfrak{s}'$, der Asymptoten von $\mathfrak{M}_0^2$. In $\mathfrak{St}(H^2)$ entspricht dem Parallelstrahlenbüschel ($\mathfrak{s}$) ein Kegelschnittsbüschel durch $(a' b' c' s)$ und dieser erzeugt mit ($\mathfrak{s}$) eine Curve 3^{ter} Ordnung C^3 , welche der Ort der Brennpunkte der Axen $\mathfrak{A}$ ist. Man ersieht leicht, dass C^3 durch $a, b, c, d, a', b', c', \mathfrak{s}, s$ und die imaginären Kreispunkte geht, und dass s auf der Asymptote von $\mathfrak{M}_0^2$ liegt, welche durch $\mathfrak{s}$ geht, denn $s, \mathfrak{s}$ entsprechen einander in $\mathfrak{St}(H^2)$, also muss s auf der Tangente des Kegelschnittes von (H^2) liegen, der durch $\mathfrak{s}$ geht, dies ist $\mathfrak{M}_0^2$. $\mathfrak{s}$ ist Tangentialpunkt von a, b, c, d und s von $a' b' c', \mathfrak{s}$. Man hat daher:

Ist der Mittelpunktskegelschnitt des Büschels eine gleichseitige Hyperbel mit den Asymptotenrichtungen $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$ so besteht der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte des Büschels aus zwei Curven dritter Ordnung C^3, C'^3 , welche durch $\mathfrak{s}$, resp. $\mathfrak{s}'$ gehen und die Asymptoten von $\mathfrak{M}_0^2$ daselbst berühren. Beide Curven gehen durch die Ecken a, b, c des Poldreieckes des

Büschels, durch den Höhenschnittpunkt d des Dreiecks und die Höhenfußpunkte a', b', c' , sowie durch die imaginären Kreispunkte der Ebene. Die Punkte a, b, c, d bilden auf jeder von ihnen ein Quadrupel, dessen Tangentialpunkt $\bar{s}$, resp. $\bar{s}'$ ist. Ebenso bilden $a' b' c' \bar{s}$, resp. $a' b' c' \bar{s}'$ je ein Quadrupel mit dem Tangentialpunkt s resp. s' . Diese letzteren Punkte sind die Brennpunkte der beiden im Büschel enthaltenen Parabeln und liegen auf den Asymptoten von $\mathfrak{M}_0^2$ sowie auf dem Kreise $\mathfrak{K}^2$ durch $a' b' c'$. Die beiden Curven durchschneiden einander in allen Punkten orthogonal. (Vgl. 4.)

Es ist klar, dass wenn die durch $\bar{s}$ gehende Axe $\mathfrak{A}$ die C^3 in zwei reellen Punkten schneidet, die demselben Kegelschnitte zugehörige Axe $\mathfrak{B}$, die C'^3 in zwei conjugiert imaginären Punkten schneidet und umgekehrt. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ schneiden einander auf $\mathfrak{M}_0^2$. Übergänge vom reellen zum imaginären Schneiden bilden die Axen, welche $\mathfrak{M}_0^2$ in den Punkten a, b, c, d treffen.

6. Berühren die Kegelschnitte des Büschels in einem Punkte b eine feste Gerade B und gehen dieselben durch zwei Punkte der Geraden C , welche B in a schneiden möge, und ist A die Polare von a für die Kegelschnitte des Büschels, so besteht das allen Kegelschnitten conjugierte Poldreieck aus dem doppeltgezählten Punkte b und dem Punkte a . Der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^2$ berührt A in b und geht durch a . Die Brennpunktscurve bleibt von der 6^{ten} Ordnung, hat aber in b einen 4-fachen Punkt. Die imaginären Kreispunkte der Ebene, der Punkt a und der Fußpunkt a' des Perpendikels von a auf A sind Doppelpunkte derselben. Sie ist also rational.

Bilden die Kegelschnitte einen Büschel oder eine Schar von doppeltberührenden Kegelschnitten, welche also a zum Pol und A zur Polare haben und auf dieser dieselbe Involution $\{A\}$ conjugirter Pole besitzen, so hüllen die Axen der Kegelschnitte eine Parabel $\mathfrak{P}^2$ ein, welche A berührt in dem Punkte a , der dem Fußpunkte a' des von a auf A gefällten Perpendikels in $\{A\}$ entspricht. Ist m der Mittelpunkt der Involution $\{A\}$, so ist $am = M$ die Leitlinie der Parabel $\mathfrak{P}^2$ und der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels. Der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^2$ für den allgemeinen Büschel besteht hier aus M und A , indem auf ersterer die Pole der unendlich fernen Geraden für die Kegelschnitte des Büschels liegen, die letztere A , die zu den Punkten von $\mathfrak{M}$ (eigentlich zu allen Punkten der Ebene) conjugierten Punkte für alle Kegelschnitte des Büschels enthält. Man sieht sofort, dass wenn $p q$ ein Paar von $\{A\}$ ist und $\overline{pp'}$ senkrecht auf $\overline{aq}$ steht, $\overline{pp'}$ Axe eines Kegelschnittes ist, dessen Mittelpunkt im Schnittpunkte von $\overline{pp'}$ mit M liegt.

Sind p', q' und a' die Höhenfußpunkte des Dreieckes apq , so zeigt man, wie in 3., dass der Ort der Brennpunkte für diesen Büschel doppeltberührender Kegelschnitte eine Curve 3^{ter} Ordnung ist, die in a einen Doppelpunkt hat, mit zu einander normalen Tangenten, dass sie durch die imaginären Kreispunkte, sowie durch a', p', q' geht, und die Deckpunkte der Involution $\{A\}$ enthält.

Unabhängig hievon sieht man aber auch sofort, dass p' ein Brennpunkt eines Kegelschnittes eines Büschels sein muss. Es geht nämlich durch p' außer $\overline{pp'}$ noch eine Axe: die zweite durch p' gehende Tangente der Parabel $\mathfrak{P}^2$. Diese gehört dem Kegelschnitte K^2 an. Für diesen, sowie für alle Kegelschnitte dieses Büschels, ist p Pol von $\overline{aq}$, also sind $\overline{p'p}$ und $\overline{p'a}$ zu einander senkrechte conjugierte Strahlen für K^2 , d. h. p' ist Brennpunkt von K^2 . Der Ort der Brennpunkte ist mithin die Fußpunktcurve der Parabel $\mathfrak{P}^2$ für den Punkt a der Leitlinie der Parabel.

Im 19. Bande der Fortschritte für Mathematik, Seite 729 findet sich ein kurzes Referat über eine einschlägige Arbeit von Berghof: „Die Brennpunkte einer Schar doppelt berührender Kegelschnitte“ (Programm der Gewerbeschule in Dortmund), welche Arbeit mir nicht zugänglich ist, so dass möglicher Weise das letzte Resultat bereits in demselben enthalten sein kann. Aus dem Referate selbst ist dies nicht ersichtlich.