Über die Krümmung der cyklischen Curven nebst einem Beitrage zur neueren Dreiecksgeometrie.

Nachtrag.

Von A. Schwarz in Beneschau.

Die vorliegende Abhandlung ist eine Ergänzung meines im X. Jahrgange der Monatshefte erschienenen Aufsatzes: „Über die Krümmung der cyklischen Curven etc.“ Sie ist in zwei Abschnitte getheilt, von denen der erste sich mit der Krümmungsinvolution einer Ellipse beschäftigt. Hierin wird, um nur die hauptsächlichsten Resultate hervorzuheben, von der Gruppe associierter Dreiecke nachgewiesen, dass für alle Tripeldreiecke die Summe der Quadrate ihrer Seiten den gleichen Wert besitzt. Ferner wird gezeigt, dass zu jedem Dreiecke zwei andere associierte gehören, deren Schwerlinien den Seiten des ersteren proportional sind, und umgekehrt; ein Satz, mit Hilfe dessen es in einfacher Weise gelingt, die Dreiecksfläche als Function der Schwerlinien darzustellen. Den Kegelschnitten K und K' , welche mit der Gruppe associierter Dreiecke in innigem Zusammenhange stehen, werden drei weitere zugesellt, nämlich der imaginäre Kegelschnitt $s_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, in Bezug auf welchen die sämtlichen Tripeldreiecke sich selbst conjugiert sind, und zwei homothetische, mit K und K' concentrische Ellipsen, welche von den Höhenschnittpunkten, beziehungsweise den Mittelpunkten der Umkreise sämtlicher Tripeldreiecke erfüllt werden. Endlich wird auf Grund einer Eigenschaft der Krümmungsinvolution eine eigenthümliche Gleichung für die Kiepert'sche Hyperbel eines Dreieckes abgeleitet.

Der zweite Abschnitt ist der desmischen Configuration (27₉, 81₃) gewidmet, zu welcher eine Curve dritter Ordnung vom Geschlechte 1 Anlass gibt.

I. Die Krümmungsinvolution auf einer Ellipse und die Kiepert'sche Hyperbel eines Dreieckes.

1. Als Krümmungsinvolution wurde jene cubische Involution auf einem centralen Kegelschnitte K bezeichnet, deren Tripel r_1, r_2, r_3 die Eigenschaft besitzen, dass die Krümmungskreise von

K in diesen Punkten den Träger der Involution an einer und derselben Stelle r schneiden. Von dem Dreiecke $r_1 r_2 r_3$ gilt der Satz, dass die Höhen desselben zugleich Normalen von K sind, und umgekehrt ist, wie mittelst einer gewissen ein-zweideutigen Verwandtschaft nachgewiesen wurde, jedes mit dieser Eigenschaft behaftete Dreieck ein Tripeldreieck. Indessen ist es möglich, die Giltigkeit dieser Umkehrung in einfacher Weise mittelst des Restsatzes zu begründen, da die dem Dreiecke $r_1 r_2 r_3$ auferlegte Bedingung sich dahin fassen lässt, dass die drei Punktpaare $r_1 r_1$, $r_2 r_2$, $r_3 r_3$ beziehungsweise mit $r_2 r_3$, $r_3 r_1$, $r_1 r_2$ corresidual sind. Bezeichnet man die Stelle, an welcher der Krümmungskreis in r_1 dem Kegelschnitte K zum viertenmale begegnet, mit r , so ist $r r_1$ als Residuum von $r_1 r_1$ vermöge des Restsatzes zugleich auch Residuum von $r_2 r_3$, d. h. r wird erhalten, indem man den durch $r_1 r_2 r_3$ gehenden Kreis mit K zum viertenmale zum Durchschnitte bringt, woraus sich ergibt, dass auch die Krümmungskreise in r_2 und r_3 durch r gehen.

2. Eine weitere Eigenschaft der Krümmungsinvolution besteht darin, dass alle Tripeldreiecke $r_1 r_2 r_3$ einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt besitzen, der mit dem Mittelpunkte c von K zusammenfällt. Daraus folgt, dass in der Involution conjugierter Durchmesser von K den Schwerlinien $r_1 c$, $r_2 c$, $r_3 c$ beziehungsweise die Durchmesser $D_1 \parallel r_2 r_3$, $D_2 \parallel r_3 r_1$, $D_3 \parallel r_1 r_2$ conjugiert sind. Nun bestehen aber unter der Voraussetzung, dass K mit der Ellipse

$$K \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

identifiziert wird, zwischen zwei conjugierten Halbmessern h, h' , die einen Winkel ω einschließen, die folgenden Relationen:

$$(\alpha) \quad h^2 + h'^2 = a^2 + b^2$$

$$(\beta) \quad h h' \sin \omega = a b,$$

welche im vorliegenden Falle die Form annehmen:

$$(z') \quad \overline{r_i c}^2 + \left(\frac{D_i}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$(\beta') \quad \overline{r_i c} \cdot \frac{D_i}{2} \sin \omega_i = a b;$$

hierin bezeichnet ω_i den Winkel, welchen die durch r_i gehende Schwerlinie t_i mit der r_i gegenüberliegenden Seite l_i des Dreieckes $r_1 r_2 r_3$ bildet.

Zwischen D_i und l_i besteht ein einfacher Zusammenhang; es ist nämlich bei der Benützung der Parameterdarstellung

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi$$

der Parameter eines Endpunktes von D_i gleich $\frac{\pi}{2} + \varphi_i$, wenn derjenige von r_i mit φ_i bezeichnet wird; daher:

$$\left(\frac{D_i}{2}\right)^2 = a^2 \sin^2 \varphi_i + b^2 \cos^2 \varphi_i.$$

Andererseits ist, unter i, j, k den Complex der Indices 1, 2, 3 verstanden, wegen

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \varphi_i + \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_k = \varphi_i + \frac{4\pi}{3} \\ l_i^2 &= a^2 (\cos \varphi_j - \cos \varphi_k)^2 + b^2 (\sin^2 \varphi_j - \sin^2 \varphi_k)^2 = \\ &= 4 \sin^2 \frac{\varphi_j - \varphi_k}{2} \left(a^2 \sin^2 \frac{\varphi_j + \varphi_k}{2} + b^2 \cos^2 \frac{\varphi_j + \varphi_k}{2} \right) = \\ &= 3 (a^2 \sin^2 \varphi_i + b^2 \cos^2 \varphi_i) = 3 \left(\frac{D_i}{2} \right)^2 \\ (\gamma) \quad l_i &= \sqrt{3} \frac{D_i}{2}, \quad \frac{D_i}{2} = \frac{l_i}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Es gehen somit (α') und (β') in die Gleichungen über

$$(\alpha'') \quad 4 t_i^2 + 3 l_i^2 = 9 (a^2 + b^2)$$

$$(\beta'') \quad \frac{1}{2} t_i l_i \sin \omega_i = \frac{3 \sqrt{3}}{4} a b,$$

von denen die zweite einen neuen Beweis dafür erbringt, dass die Tripeldreiecke eine constante Fläche haben, während (α'') die beiden folgenden Sätze liefert:

Für alle Tripeldreiecke ist die Summe der Quadrate ihrer Seiten constant, nämlich $= \frac{9}{2} (a^2 + b^2)$.

Die Summe der Quadrate der durch die Ecken eines Tripeldreieckes gehenden Halbmesser $\overline{r_1 c}$, $\overline{r_2 c}$, $\overline{r_3 c}$ von K besitzt zugleich mit der Summe der Quadrate der diesen Halbmessern conjugierten Halbmesser den constanten Wert $\frac{3}{2} (a^2 + b^2)$.

In der That folgt durch Addition der beiden Gleichungen

$$l_1^2 = t_3^2 + \frac{1}{4} l_3^2 - t_3 l_3 \cos \omega_3$$

$$l_2^2 = t_3^2 + \frac{1}{4} l_3^2 - t_3 l_3 \cos \omega_3$$

die Relation

$$l_1^2 + l_2^2 = 2l_3^2 + \frac{1}{2}l_3^2,$$

oder

$$l_1 + l_2 + l_3 = \frac{1}{2}(4l_3^2 + 3l_3^2).$$

welche in Verbindung mit (α'')

$$(\delta) \quad l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = \frac{9}{2}(a^2 + b^2)$$

ergibt. Aus (γ) folgt alsdann:

$$(\epsilon) \quad \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{D_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{D_3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}(a^2 + b^2),$$

und vermöge (α')

$$(\eta) \quad \overline{r_1 c^2} + \overline{r_2 c^2} + \overline{r_3 c^2} = \frac{3}{2}(a^2 + b^2).$$

Die Gleichungen (β'') und (δ) ermöglichen es, die Achsen der Ellipse K zu berechnen, für welche ein vorgelegtes Dreieck $r_1 r_2 r_3$ ein Tripeldreieck der zugehörigen Krümmungsinvolution darstellt.

Die in diesem § erhaltenen Resultate können im folgenden Satze zusammengefasst werden: Projiciert man die Krümmungsinvolution auf K aus dem Mittelpunkte c des letzteren, so ergibt sich eine cubische Involution der Halbmesser, welche ähnliche Eigenschaften aufweist, wie die Involution conjugierter Halbmesser, indem jedes Tripel h_1, h_2, h_3 derselben den Gleichungen genügt:

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = \frac{3}{2}(a^2 + b^2)$$

$$h_1 h_2 \sin(h_1 h_2) \sin + h_2 h_3 \sin(h_2 h_3) \sin + h_3 h_1 \sin(h_3 h_1) \sin = \frac{3\sqrt{3}}{2}ab,$$

wenn unter $(h_1 h_2)$ der Winkel verstanden wird, den die Halbmesser h_1, h_2 mit einander einschließen.

Da die Krümmungsinvolution $\lambda^3 = \text{const}$ mit jedem Tripel r_1, r_2, r_3 zugleich auch das Tripel der diametral gegenüberliegenden Punkte r'_1, r'_2, r'_3 enthält, deren Parameter sich von denen der entsprechenden nicht accentuierten nur durch das Vorzeichen unterscheiden, so wird die cubische Involution der Halbmesser von selbst zu einer solchen der Durchmesser.

Überdies hat sie die Eigenschaft, sich selbst conjugiert zu sein, denn die zu $r_1 c, r_2 c, r_3 c$ conjugierten Durchmesser enthalten

jene drei Punkte, deren Parameter λ aus denen von r_1, r_2, r_3 durch Multiplication mit i gewonnen werden.

3. Die Formel (7) des §. 2 gestattet auch die folgende Schreibweise:

$$\begin{aligned} l_i^2 &= 3 \left(\frac{D_i}{2} \right)^2 = 3 (a^2 \sin^2 \varphi_i + b^2 \cos^2 \varphi_i) = \\ &= 3 [a^2 \cos^2 (\pm \frac{\pi}{2} - \varphi_i) + b^2 \sin^2 (\pm \frac{\pi}{2} - \varphi_i)], \end{aligned}$$

durch welche das Dreieck $r_1 r_2 r_3$ zu zwei anderen Tripeldreiecken in Beziehung gesetzt wird, deren Ecken, den beiden Vorzeichen entsprechend, die Parameter

$$\psi_i = \pm \frac{\pi}{2} - \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

besitzen. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, möge zunächst nur das obere Vorzeichen berücksichtigt werden. Bezeichnet man alsdann die Seiten und Schwerlinien des Tripeldreieckes $(+\frac{\pi}{2} - \varphi_i)$ ($i = 1, 2, 3$) mit l'_1, l'_2, l'_3 , bezw. t'_1, t'_2, t'_3 , so ist klar, dass der Ausdruck in der eckigen Klammer den Wert $\left(\frac{2}{3} t'_i\right)^2$ besitzt. Es ist daher

$$l_i = \frac{2}{\sqrt{3}} t'_i.$$

Andererseits lehrt die Gleichung

$$\varphi_i + \psi_i = +\frac{\pi}{2},$$

wegen ihres symmetrischen Baues in den Parametern φ_i und ψ_i , dass die Beziehung zwischen den beiden in Betracht kommenden Tripeldreiecken eine wechselseitige ist, weshalb auch die Gleichung

$$l'_i = \frac{2}{\sqrt{3}} t_i$$

Geltung hat. Mit anderen Worten: Die beiden Tripeldreiecke sind von der Beschaffenheit, dass die Seiten des einen den Schwerlinien des anderen proportional sind, und umgekehrt. Dabei versteht es sich von selbst, dass dieser Satz auch dann aufrecht bleibt, wenn an Stelle des Dreieckes $(+\frac{\pi}{2} - \varphi_i)$ das durch $(-\frac{\pi}{2} - \varphi_i)$ charakterisierte gesetzt wird.

Was die Lage der beiden letztgenannten Dreiecke anlangt, so ergibt sie sich am einfachsten durch Rückkehr zu dem Parameter λ , da für $\lambda_i = e^{i\varphi_i}$, $\mu_i = e^{i\psi_i}$ aus $\varphi_i + \psi_i = \pm \frac{\pi}{2}$

$$\lambda_i \mu_i = \pm i$$

hervorgeht; d. h. die drei Strahlen $\overline{\lambda_i \mu_i}$ ($i = 1, 2, 3$) sind, den beiden Vorzeichen entsprechend, bezw. den Strahlen $1(+i) \equiv (a, o)(o, b)$ und $1(-i) \equiv (a, o)(o, -b)$ parallel.

Mit Hilfe der Gleichung $l'_i = \frac{2}{\sqrt{3}} t_i$ kann man die Fläche f des Dreieckes $r_1 r_2 r_3$, welches ein ganz beliebiges Dreieck ist, durch seine Schwerlinien ausdrücken. Aus der Constanz des Flächeninhaltes der Tripeldreiecke folgt nämlich, dass die Fläche des Dreieckes mit den Seiten l'_1, l'_2, l'_3 ebenfalls den Wert f besitzt, so dass die Gleichung besteht:

$$f = \sqrt{L'(L' - l'_1)(L' - l'_2)(L' - l'_3)}$$

$$l'_1 + l'_2 + l'_3 = 2L'.$$

Setzt man

$$t_1 + t_2 + t_3 = 2T,$$

so ist

$$L' = \frac{2}{\sqrt{3}} T, \quad L' - l'_i = \frac{2}{\sqrt{3}} (T - t_i),$$

daher

$$f = \frac{4}{3} \sqrt{T(T - t_1)(T - t_2)(T - t_3)}.$$

4. Von den Affinitäten, welche den Kegelschnitt K in sich überführen, wurde nachgewiesen, dass sie zugleich auch Transformationen der Krümmungsinvolution, und infolgedessen der Gruppe associierter Dreiecke, in sich sind. Unter denselben nehmen die durch

$$\lambda' = c\lambda \text{ oder } \varphi' = \varphi + k$$

charakterisierten eine ausgezeichnete Stellung ein, indem sie die unendlich fernen Punkte von K einzeln invariant lassen. Die Gesamtheit dieser letzteren Affinitäten bildet eine continuierliche eingliedrige Gruppe G , welche zufolge der für die Multiplication, beziehungsweise Addition geltigen Operationsgesetze — des associativen und commutativen — mit ihrer Parametergruppe identisch und als Abel'sche Gruppe zu bezeichnen ist, da irgend zwei Transformationen derselben vertauschbar sind.

Was die Darstellung der Gruppe G in trimetrischen Coordinaten anlangt, so wird dieselbe durch das Formelsystem

$$(9) \quad \begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= A(x_1 + x_2 + x_3) \\ y_1 + \rho y_2 + \rho^2 y_3 &= B(x_1 + \rho x_2 + \rho^2 x_3) \\ y_1 + \rho^2 y_2 + \rho y_3 &= C(x_1 + \rho^2 x_2 + \rho x_3) \end{aligned}$$

geleistet, wofern nur die Constanten A, B, C derart bestimmt werden, dass durch die angeführte Collineation $K \equiv x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0$ in sich übergeführt wird; eine Forderung, welcher die Bedingungs-
gleichung

$$A^2 = BC$$

genügt. Durch Auflösung des Systems (9) nach y_1, y_2, y_3 ergibt sich

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha(x_1 + x_2 + x_3) + \beta(x_1 + \rho x_2 + \rho^2 x_3) + \gamma(x_1 + \rho^2 x_2 + \rho x_3) \\ y_2 &= \alpha(x_1 + x_2 + x_3) + \beta \rho^2(x_1 + \rho x_2 + \rho^2 x_3) + \gamma \rho(x_1 + \rho^2 x_2 + \rho x_3) \\ y_3 &= \alpha(x_1 + x_2 + x_3) + \beta \rho(x_1 + \rho x_2 + \rho^2 x_3) + \gamma \rho^2(x_1 + \rho^2 x_2 + \rho x_3), \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} y_1 &= (\alpha + \beta + \gamma)x_1 + (\alpha + \beta \rho + \gamma \rho^2)x_2 + (\alpha + \beta \rho^2 + \gamma \rho)x_3 \\ y_2 &= (\alpha + \beta \rho^2 + \gamma \rho)x_1 + (\alpha + \beta + \gamma)x_2 + (\alpha + \beta \rho + \gamma \rho^2)x_3 \\ y_3 &= (\alpha + \beta \rho + \gamma \rho^2)x_1 + (\alpha + \beta \rho^2 + \gamma \rho)x_2 + (\alpha + \beta + \gamma)x_3, \end{aligned}$$

so dass die in Frage stehenden Affinitäten durch das Schema

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{pmatrix}$$

im Vereine mit der $A^2 - BC = 0$ äquivalenten Bedingungs-
gleichung:

$$a_{11} a_{12} + a_{13} a_{12} + a_{11} a_{13} = 0$$

charakterisiert sind. Es sind demnach die in S auftretenden Coef-
ficienten a_{11}, a_{12}, a_{13} mit den Coordinaten eines Punktes von K
zu identificieren, was durch die Annahme

$$\sigma a_{11} = -x, \sigma a_{12} = 1 + x, \sigma a_{13} = x(1 + x)$$

erzielt wird.

Hinsichtlich des Schemas S soll noch bemerkt werden, dass
dasselbe, abgesehen von der Hauptdiagonale von links oben nach
rechts unten, die Eigenschaft der magischen Quadrate aufweist,
indem die Summe der Elemente in jeder Horizontal- und jeder
Verticalreihe, ebenso wie in der Nebendiagonale von rechts oben
nach links unten die gleiche ist.

5. Für die Transformationen S der Gruppe G ist die Fläche
eine Invariante. Denn für eine affine Verwandtschaft ist das Ver-
hältnis zwischen den Flächen von Bild und Original einer Constanten

gleich, welche im vorliegenden Falle den Wert 1 besitzt, weil durch jede Transformation S das Innere der Ellipse K in sich überführt wird.

Übrigens ergibt sich dies auch aus der folgenden Darstellung von S :

$$\begin{aligned}\frac{2\xi}{a} &= \left(c + \frac{1}{c}\right) \frac{x}{a} + \left(c - \frac{1}{c}\right) \frac{iy}{b} \\ \frac{2i\eta}{b} &= \left(c - \frac{1}{c}\right) \frac{x}{a} + \left(c + \frac{1}{c}\right) \frac{iy}{b},\end{aligned}$$

welche der für eine flächentreue oder äquivalente Abbildung giltigen Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \pm 1$$

genügt.

Als unmittelbare Anwendung davon erscheint der Satz von der Constanz des Flächeninhaltes der Tripeldreiecke, da irgend zwei derselben durch eine Transformation der Gruppe G in einander verwandelbar sind.

Zu einer zweiten Anwendung wird man durch die Frage nach den Bahncurven dieser Gruppe geführt. Unter einer Bahncurve versteht man bekanntlich die Linie, welche ein Punkt x bei Variation des Parameters einer continuierlichen eingliedrigen Gruppe beschreibt. Lässt man x mit einem Punkte von K coincidieren, so ergibt sich als zugehörige Bahncurve der Kegelschnitt K selbst. Andererseits ist klar, dass das Büschel homothetischer Kegelschnitte

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k$$

sich bei Anwendung irgend einer Operation von G reproducirt, und zwar wegen des Invariantencharakters des Flächeninhaltes so, dass jede einzelne Linie desselben in sich übergeht. Damit ist in diesem Büschel das System der Bahncurven gefunden.

Zu ihrer Bestimmung kann als vermittelnder Gedanke auch eine Cayley'sche Maßbestimmung dienen, deren Fundamentalkegelschnitt mit K zusammenfällt, da unter dieser Voraussetzung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k$ ein Büschel concentrischer Kreise darstellt, von denen jeder eine Bahncurve von G repräsentiert, weil die Operationen dieser Gruppe in Drehungen um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt $(0, 0)$ bestehen. Bei diesem Nicht-Euklidischen Messungsverfahren sind sämtliche Bahncurven als confocal anzusehen.

Unter den invarianten Curven nehmen zwei ein besonderes Interesse in Anspruch, nämlich erstens der Involutionseigelschnitt K' der Krümmungsinvolution, und zweitens jener Kegelschnitt K'' ,

in Bezug auf welchen nach einem bekannten Satze, von dem Herr G. Kohn eine Verallgemeinerung angegeben hat¹⁾, alle Tripeldreiecke sich selbst conjugiert sind. Zur Feststellung ihrer Gleichungen reicht die Betrachtung eines Tripeldreieckes aus, dem ein Scheitel von K , etwa der Punkt (a, o) , als Ecke angehört. Seine Gegenseite $x = -\frac{a}{2}$ ist nämlich eine Tangente von K' , deren Berührungspunkt natürlich in die Stelle $(-\frac{a}{2}, o)$ fällt, weshalb

$$K' \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{4} = 0.$$

Ferner ist $x = -\frac{a}{2}$ die Polare von (a, o) in Bezug auf

$$K'' \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - k = 0,$$

woraus

$$k = -\frac{1}{2}$$

hervorgeht. Man kann sich auch a posteriori leicht überzeugen, dass der Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{1}{2} = 0$$

thatsächlich mit K'' identisch ist. Die Gleichung der einem Punkte $(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$ zugehörigen Polare von $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{1}{2} = 0$ lautet nämlich

$$\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} = -\frac{1}{2}$$

und wegen

$$\cos\left(\varphi + \frac{2k\pi}{3}\right) \cos \varphi + \sin\left(\varphi + \frac{2k\pi}{3}\right) \sin \varphi = \cos \frac{2k\pi}{3} = -\frac{1}{2} (k=1,2)$$

genügen ihr thatsächlich die Coordinaten der den Parameterwerten $\varphi + \frac{2\pi}{3}$ und $\varphi + \frac{4\pi}{3}$ entsprechenden Punkte von K .

Es erübrigt noch, die Gleichung von K'' in homogenen Coordinaten anzugeben. Als einer Bahncurve von G angehörig ist dieselbe nothwendig von der Form

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 - k(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) = 0,$$

¹⁾ Vgl. Wiener Sitzungsbericht C. 6-19. G. Kohn. Über einige projective Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone.

wobei k so zu bestimmen ist, dass der Punkt $(1, 0, 0)$ die Grade $x_1 = 0$ zur Polaren hat. Aus dieser Bedingung folgt

$$k = 2$$

so dass

$$K'' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

ist; ein Resultat, welches mit der Theorie der algebraischen Gleichung dritten Grades im Zusammenhange steht, indem es die geometrische Bedeutung der gleich Null gesetzten zweiten Potenzsumme der Wurzeln einer solchen Gleichung liefert.

6. Im vorhergehenden §. wurde nachgewiesen, dass die Substitutionen der Gruppe G Automorphismen der ambigen quadratischen Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ sind. Geometrisch findet diese Thatsache ihren Ausdruck in einem Satze, welcher aus der geometrischen Bedeutung von $K \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ hervorgeht.

Man findet nämlich für den Abstand p eines Punktes (ξ, η) von seiner Polaren P in Bezug auf den Kegelschnitt $K = 0$ den Wert

$$p = \frac{K(\xi, \eta)}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4}}} = \pm p' K(\xi, \eta),$$

wenn p' die Länge des vom Anfangspunkte o der Coordinaten auf P gefällten Perpendikels bezeichnet. Es ist demnach

$$(v) \quad K(\xi, \eta) = \varepsilon \frac{p}{p'},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist, je nachdem (ξ, η) außerhalb oder innerhalb der Ellipse K liegt.

Dies Resultat ist auch dann noch richtig, wenn unter $K(x, y)$ die um die Einheit verminderte binäre Form von der n^{ten} Dimension $K_n(x, y) \equiv f_n(x, y) - 1 \equiv a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \dots + a_{0,n}y^n - 1$ verstanden wird. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich die grade Polare P des Punktes (ξ, η) in Bezug auf $K_n(x, y) = 0$ gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{n} \left(\frac{\partial f_n}{\partial \xi} x + \frac{\partial f_n}{\partial \eta} y \right) = 1$$

aus welcher mit Benutzung von

$$\frac{1}{n} \left(\xi \frac{\partial f_n}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial f_n}{\partial \eta} \right) = f_n(\xi, \eta)$$

wiederum die Gleichung (v) gewonnen wird.

Für $n = 2$ und $K_2 \equiv \frac{x^2 + y^2}{r^2} - 1$, d. i. für den Kreis, fallen p und p' in den Strahl mo , wenn $m \equiv (\xi, \eta)$ ist. Ist alsdann n der Berührungspunkt einer der beiden von m an den Kreis $K_2 = 0$ gehenden Tangenten und q der Fußpunkt des von n auf om gefällten Perpendikels, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke mnq und onm wenn $\overline{mn} = t$, $\overline{nq} = l$ gesetzt wird:

$$\frac{l}{p'} = \frac{t}{r}, \quad l = \sqrt{pp'}, \quad \sqrt{\frac{p}{p'}} = \frac{t}{r}$$

$$K(\xi, \eta) = \varepsilon \frac{t^2}{r^2}$$

$$\xi^2 + \eta^2 - r^2 = \varepsilon t^2.$$

Für den Kreis ist demnach die Gleichung $K(\xi, \eta) = \varepsilon \frac{p}{p'}$, identisch mit dem bekannten Satze, dass $\xi^2 + \eta^2 - r^2$ die Potenz des Punktes (ξ, η) in Bezug auf den Kreis $K = 0$ darstellt. Ebenso ist die Eigenschaft des Kreises $x^2 + y^2 = R^2$, der geometrische Ort solcher Punkte zu sein, die in Bezug auf $x^2 + y^2 = r^2$ gleiche Potenzen von bestimmter Größe haben, als Specialfall in dem Theoreme enthalten, wonach für alle Punkte der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k$ der Quotient $\frac{p}{p'}$ eine Invariante ist.

Der Bruch $\frac{p}{p'}$, auf der linken Seite der Gleichung (i) ist, vom Vorzeichen abgesehen, das in Bezug auf die Fundamentalpunkte o, m gebildete Theilverhältnis des Punktes s , in welchem der Strahl om der Polare P begegnet. Daher bestehen unter u_∞ den unendlich fernen Punkt von om verstanden, die Gleichungen

$$-\varepsilon \frac{p}{p'} = (om s u_\infty)$$

$$K(\xi, \eta) = -(om s u_\infty);$$

mit andern Worten: Das Resultat der Substitution der Coordinaten eines Punktes m in die linke Seite der Gleichung $K = 0$ ist gleich dem negativ genommenen Doppelverhältnisse $(om s u_\infty)$, wenn mit s, u_∞ die Punkte bezeichnet werden, in denen om die zu m und o gehörigen Polaren von $K = 0$ schneidet.

Und nun ist es, mit Rücksicht auf die letzte Gleichung, geometrisch evident, dass die binäre quadratische Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ bei Anwendung einer jeden Substitution der Gruppe G invariant bleibt.

7. Der Umstand, dass die Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ eine Invariante von G ist, legt die Vermuthung nahe, dass die Eigenschaften der Krüm-

mungsinvolution sich in besonders einfacher Weise werden beschreiben lassen, wenn an Stelle der gewöhnlichen Maßbestimmung eine pseudometrische zugrunde gelegt wird, bei welcher die absoluten Kreispunkte durch die auf der unendlich fernen Graden gelegenen Verschwindungspunkte der positiven Form

$$f(x, y) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

ersetzt werden.

Für die Distanz eines Punktes (x, y) vom Anfangspunkte der Coordinaten, und allgemeiner für die Entfernung zweier Punkte (x, y) , (x', y') gelten unter dieser Voraussetzung die folgenden Definitionen:

$$(x) \quad d = \sqrt{f(x, y)} \quad \text{bzw.} \quad = \sqrt{f(x - x', y - y')},$$

während zwei Strahlen, die den Anfangspunkt mit den Punkten (x, y) und (x', y') verbinden, einen Winkel

$$\begin{aligned} \Theta &= \arccos \frac{\frac{1}{2} \left(x' \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\sqrt{f(x, y)} \sqrt{f(x', y')}} = \arccos \frac{\frac{1}{2} \left(x \frac{\partial f}{\partial x'} + y \frac{\partial f}{\partial y'} \right)}{\sqrt{f(x, y)} \sqrt{f(x', y')}} = \\ (1) \quad &= \arccos \frac{\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \sqrt{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}}} \end{aligned}$$

einschließen. Durch Nullsetzen der Linienfactoren

$$\lambda \equiv \frac{x}{a} + \frac{i y}{b}, \quad \mu \equiv \frac{x}{a} - \frac{i y}{b},$$

in welche die Form f sich zerlegen lässt, erhält man die Minimallinien der Maßbestimmung, deren Minimalcoordinaten also mit λ, μ identisch sind.

Auf der Peripherie der Ellipse K , welche nun als Einheitskreis $f \equiv \lambda \mu = 1$ anzusehen ist, sind λ und μ reciprok, wie dies auch aus der Parameterdarstellung

$$\frac{2x}{a} = \lambda + \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{2iy}{b} = \lambda - \frac{1}{\lambda}$$

ersichtlich ist.

Um die Eigenschaften der Krümmungsinvolution in der neuen Maßbestimmung zu beschreiben, ist es angezeigt, die pseudometrische Entfernung d zweier Punkte m_1, m_2 von K , sowie den pseudometrischen Winkel, welchen die Radien $o m_1, o m_2$ einschließen, durch die zu m_1, m_2 gehörigen Minimalcoordinaten λ_1, λ_2 ,

beziehungsweise die Winkelcoordinaten φ_1, φ_2 auszudrücken. Mittelst der Definitionsgleichungen $(x), (\lambda)$ findet man:

$$d = i \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = i \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} - \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \right) = 2 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

$$\Theta = \arccos \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) = \varphi_1 - \varphi_2,$$

wozu noch die Formel für das Bogenelement hinzukommt:

$$ds = i \frac{d\lambda}{\lambda} = d\Theta.$$

Diese Gleichungen können ohne alle Rechnung erhalten werden, wenn man sich der Abbildung

$$\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}$$

bedient, durch welche die Grundpunkte der Cayley'schen Maßbestimmung in der xy Ebene in die absoluten Kreispunkte der $\xi\eta$ Ebene übergehen. Damit wird nämlich erreicht, dass die pseudometrische Entfernung zweier Punkte und der pseudometrische Winkel zweier Strahlen der Originalebene gleich werden der Entfernung der homologen Punkte, beziehungsweise dem Winkel der entsprechenden Strahlen in der Bildebene, wobei in der letzteren die gewöhnliche Maßbestimmung anzuwenden ist.

Da die Tripeldreiecke der Krümmungsinvolution sich in dem Systeme der dem Einheitskreise $\xi^2 + \eta^2 = 1$ eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecke abbilden, so sind dieselben in der vorliegenden Pseudometrik als gleichseitig anzusehen, und zwar ist die Seitenlänge $= 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Ferner erscheint eine jede Seite eines Tripeldreieckes, vom Anfangspunkte o aus gesehen, unter einem Winkel von 120° , wie dies auch die Formel für $\cos \Theta$ ergibt, wenn hierin für λ_2 der Wert $\rho \lambda_1$ eingeführt wird:

$$\cos \Theta = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{2} (\rho + \rho^3) = -\frac{1}{2}$$

$$\Theta = \frac{2\pi}{3}.$$

Dementsprechend gibt es in der Gruppe G eine Substitution von der dritten Ordnung, welche ein Tripeldreieck invariant lässt.

Auch die Involution conjugierter Durchmesser von K erfährt eine einfache Abbildung, indem sie in die rechtwinklige Strahleninvolution im Mittelpunkte von $\xi^2 + \eta^2 = 1$ verwandelt wird, was

geometrisch unmittelbar klar ist und analytisch durch die Substitution $\lambda_2 = i\lambda_1$ erkannt wird, welche

$$\cos \Theta = \frac{1}{2} \left(i + \frac{1}{i} \right) = 0$$

ergibt. Es besteht infolgedessen zwischen den Parametern φ_1, φ_2 geeignet gewählter Endpunkte zweier conjugierter Durchmesser von K die Relation

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2},$$

während die Richtungsconstanten derselben durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{b^2}{a^2}$$

verknüpft sind, welche, wie dieselbe Betrachtung lehrt, als Verallgemeinerung des Satzes anzusehen ist, wonach der Peripheriewinkel über dem Halbkreise ein Rechter ist.

8. Von dem Satze, nach welchem die Höhe eines Tripeldreieckes $r_1 r_2 r_3$ zugleich Normalen der Ellipse $K \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ sind, kann Gebrauch gemacht werden, um eine einfache Gleichung für die Kiepert'sche Hyperbel irgend eines Dreieckes, welches, wie nachgewiesen wurde, stets als Tripeldreieck einer gewissen Ellipse angesehen werden kann, abzuleiten. Sind nämlich α, β die Coordinaten des Höhenschnittpunktes h von $r_1 r_2 r_3$, so findet man jene vier Punkte von K , deren Normalen durch h gehen, indem man K mit dem Kegelschnitte

$$\beta - y = \frac{a^2 y}{b^2 x} (\alpha - x)$$

zum Durchschnitte bringt. Da drei dieser Schnittpunkte mit r_1, r_2, r_3 identisch sind und der Kegelschnitt

$$H \equiv b^2 x (\beta - y) - a^2 y (\alpha - x) = 0$$

überdies auch h und den Schwerpunkt $(0, 0)$ des Dreieckes $r_1 r_2 r_3$ enthält, so ist er mit der Kiepert'schen Hyperbel dieses Dreieckes identisch.

Um den vierten Schnittpunkt von K und H zu bestimmen, empfiehlt es sich, ein Tripeldreieck, dem ein Scheitel von K , etwa $(a, 0)$ angehört, ins Auge zu fassen. Da der Höhenschnittpunkt desselben auf der Abscissenachse liegt, so ist der gesuchte vierte Schnittpunkt in diesem speciellen Falle identisch mit dem Scheitel $(-a, 0)$, welcher jener Stelle diametral gegenüberliegt, in der die

zu $(a, 0), \left(-\frac{a}{2}, +\frac{b\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ gehörigen Krümmungskreise von K den letzteren Kegelschnitt schneiden. Es ist nun zu untersuchen, ob das analoge Verhalten allgemein gilt. Die Entscheidung darüber hängt von der biquadratischen Gleichung

$$\Phi(\lambda) \equiv (a^2 - b^2)(\lambda^4 - 1) + 2\{(b\beta i - a\alpha)\lambda^2 + (b\beta i + a\alpha)\lambda\} = 0$$

ab, welche die Parameter der vier Schnittpunkte von K und H liefert und erhalten wird, indem man in der Gleichung von H

$$x = \frac{a}{2} \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}, y = \frac{b}{2i} \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}$$

setzt. Ist μ der Parameter jener Stelle, in welcher die zu r_1, r_2, r_3 gehörigen Krümmungskreise K schneiden, so bestimmt die Gleichung

$$\lambda^3 \mu = 1$$

die Parameter des Tripels r_1, r_2, r_3 und es ist infolgedessen $\Phi(\lambda)$ durch $(\lambda^3 \mu - 1)$ theilbar

$$\Phi(\lambda) \equiv 0 \pmod{(\lambda^3 \mu - 1)}.$$

Es bestehen also unter der Voraussetzung

$$\Phi(\lambda) \equiv (a^2 - b^2) \prod_{i=1}^4 (\lambda - \lambda_i)$$

die beiden Gleichungen

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = -1$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{1}{\mu},$$

aus denen

$$\lambda_4 = -\mu$$

hervorgeht, ein Parameterwert, welcher dem μ diametral gegenüberliegenden Punkte von K zukommt.

9. Um den geometrischen Ort zu finden, welchen die Höhenschnittpunkte h der Tripeldreiecke erzeugen, sollen die Gleichungen der Höhen eines solchen Dreieckes aufgestellt werden. Sie lauten:

$$(ax - biy)\lambda_i^3 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) = \lambda_i \left\{ \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\lambda_i^3 + (ax + biy) \right\} \\ (i = 1, 2, 3).$$

Da wegen

$$\lambda_2 = \rho \lambda_1, \quad \lambda_3 = \rho^2 \lambda_1$$

$$\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = \lambda_3^3$$

ist, so müssen für den Höhenschnittpunkt h die linke Seite, sowie der Klammerausdruck auf der rechten Seite verschwinden

$$(ax - b i y) \lambda_i^3 + \frac{1}{2} (a^2 - b^2) = 0$$

$$\frac{1}{2} (a^2 - b^2) \lambda_i^3 + (ax + b i y) = 0.$$

Eliminiert man hieraus λ_i^3 , so ergibt sich für den gesuchten geometrischen Ort die mit K concentrische Ellipse

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = \frac{1}{4} (a^2 - b^2)^2,$$

zwischen deren Halbachsen

$$A = \frac{a^2 - b^2}{2a} \quad B = \frac{a^2 - b^2}{2b}$$

die Relation

$$A a = B b$$

besteht.

Auch die Mittelpunkte der den Tripeldreiecken umschriebenen Kreise erfüllen einen Kegelschnitt, welcher mit dem Orte der Höhenschnittpunkte homothetisch ist und die halben Achsenlängen desselben besitzt. Man findet nämlich für die Mittellothe eines Tripeldreieckes:

$$4 (ax - b i y) \lambda_i^3 - (a^2 - b^2) = \lambda_i \{4 (ax + b i y) - \lambda_i^3 (a^2 - b^2)\},$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

so dass der Mittelpunkt des Umkreises den Gleichungen genügt

$$4 (ax - b i y) \lambda_i^3 - (a^2 - b^2) = 0$$

$$- (a^2 - b^2) \lambda_i^3 + 4 (ax + b i y) = 0.$$

Der fragliche geometrische Ort lautet daher

$$16 (a^2 x^2 + b^2 y^2) = (a^2 - b^2)^2,$$

und seine Halbachsen besitzen die Werte

$$A' = \frac{a^2 - b^2}{4a} = \frac{A}{2} \quad B' = \frac{a^2 - b^2}{4b} = \frac{B}{2}.$$

Für $a = b$, d. h. für den Kreis, enthalten die beiden in diesem § behandelten Orte nur einen reellen Punkt, nämlich den Mittelpunkt $(0, 0)$, wie dies sein muss, da für alle einem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecke die Höhenschnittpunkte mit dieser Stelle coincidieren.

II. Die desmische Configuration (27₉, 81₉).

1. Auf einem cubischen Kreise vom Geschlechte 1 existiert eine Mannigfaltigkeit von neunelementigen Punktgruppen $(r_1, \dots, r_9)$, welche dadurch charakterisiert ist, dass die zu $r_1, \dots, r_9$ gehörigen Krümmungskreise den cubischen Kreis in einem und demselben Punkte r schneiden. Eine Verallgemeinerung M dieser Mannigfaltigkeit wird erhalten, indem man auf irgend einer Curve C_3 vom Geschlechte 1 zwei Punkte k, k' beliebig wählt und denselben die Rolle der absoluten Kreispunkte zuweist, insoferne, als an Stelle der Kreise in der Ebene der circularen C_3 das lineare System von ∞^3 Kegelschnitten tritt, welche das Punktepaar k, k' enthalten.

Ist C_3 durch ihre Parameterdarstellung

$$x : y : z = 1 : p u : p' u$$

gegeben, — unter $p u$ ist die von Weierstraß eingeführte doppel-periodische Function verstanden — es ergibt sich für M die Congruenz

$$(\alpha) \quad 3 u \equiv \lambda \pmod{2 \omega, 2 \omega'}$$

in welcher λ einen Parameter bedeutet, bei dessen Variation sämtliche Gruppen dieser Mannigfaltigkeit gewonnen werden. Die Lösung von (α) lehrt, dass man die Parameter der Elemente einer Gruppe erhält, indem in dem Ausdrucke $(u + w_{ab})$ für w_{ab} die sämtlichen $\pmod{2 \omega, 2 \omega'}$ incongruenten Periodentripel, also die Parameter der neun Wendepunkte

$$w_{ab} \equiv \frac{a \cdot 2 \omega + b \cdot 2 \omega'}{3} \quad \begin{pmatrix} a = 0, 1, 2 \\ b = 0, 1, 2 \end{pmatrix}$$

substituiert werden.

Aus zwei Gruppen $(u + w_{ab}), (v + w_{ab})$ von M entsteht eine dritte $[-(u + v) + w_{ab}]$ dadurch, dass man die 81 Graden, von denen jede einen Punkt der ersten Gruppe mit einem solchen der zweiten verbindet, mit der C_3 zum drittenmale zum Durchschnitte bringt. Von den 81 Schnittpunkten fallen nämlich je 9 zusammen, indem z. B. durch den Punkt $-(u + v) + w_{ab}$, wo w_{ab} den Parameter eines bestimmten Wendepunktes bezeichnet, sämtliche Strahlen $u + w_{AB}, v + w_{A'B'}$ gehen, welche der Bedingung

$$(\beta) \quad w_{AB} + w_{A'B'} + w_{ab} \equiv 0$$

genügen, für welche also die drei Wendepunkte $w_{AB}, w_{A'B'}, w_{ab}$ auf einer Graden liegen. Durch w_{ab} gehen aber fünf Grade, von

denen jede drei Wendepunkte enthält, nämlich außer der Wendetangente in w_{ab} , welche für (β) die Lösung

$$A \equiv A' \equiv a, B \equiv A' \equiv b \pmod{3}$$

liefert, vier Grade der Wendepunktsconfiguration $(9_4, 12_3)$, deren jeder zwei Lösungen von (β) correspondieren.

Damit ist nachgewiesen, dass die drei Gruppen $(u + w_{ab})$, $(v + w_{ab})$, $[-(u + v) + w_{ab}]$ eine desmische Configuration $(27_9, 81_3)$ erzeugen.

Lässt man v unendlich nahe an u heranrücken, so convergiert das abgeleitete System $[-(u + v) + w_{ab}]$ gegen die Gruppe der Tangentialpunkte $(-2u + w_{ab})$ von $(u + w_{ab})$; zugleich reducirt sich die Anzahl der Graden in der desmischen Configuration auf 45, nämlich auf die neun Tangenten der Punkte $(u + w_{ab})$ und die 36 Grade, von denen jede zwei verschiedene Punkte der letzten Gruppe verbindet.

In dem speciellen Falle, wo $u = 0$, also $(u + w_{ab})$ mit dem Wendepunktssysteme identisch ist, tritt eine weitere Reduction der Graden der Configuration auf 21 ein.

2. Aus der Congruenz (α) ist zu ersehen, dass irgend zwei Punkte m, m' der Gruppe $(u + w_{ab})$ ein Steiner'sches Punktepaa dritter Ordnung der Curve C_3 bilden, d. h. es lassen sich derselben unendlich viele Sechsecke einschreiben, von denen drei nicht auf einander folgende Seiten durch m und die drei anderen durch m' gehen. Unter der gemachten Voraussetzung ist nämlich

$$m' \equiv m + w,$$

wo w den Parameter eines bestimmten Wendepunktes bezeichnet, was zur Folge hat, dass zwei Grade $m r, m' r$ die Curve C_3 , mit der sie den Punkte r gemein haben, noch in zwei weiteren Punkten n, n' schneiden, welche wiederum einer Gruppe von M angehören; denn aus

$$m + n + r \equiv 0$$

$$m' + n' + r \equiv 0$$

ergibt sich

$$n' \equiv n + 2w \equiv n - w.$$

Es gilt daher das folgende System von Congruenzen:

$$\gamma) \quad \left\{ \begin{array}{l} m + n + r \equiv 0 \\ (m + w) + r + (n + 2w) \equiv 0 \\ m + (n + 2w) + (r + w) \equiv 0 \\ (m + w) + (r + w) + (n + w) \equiv 0 \\ m + (n + w) + (r + 2w) \equiv 0 \\ (m + w) + (r + 2w) + n \equiv 0, \end{array} \right.$$

dessen geometrischer Inhalt dahin zu deuten ist, dass thatsächlich ein der C_3 eingeschriebenes Sechseck S mit den aufeinanderfolgenden Ecken

$$n, r, (n + 2w), (r + w), (n + w), (r + 2w)$$

vorliegt, von dem drei nicht an einander stoßende Seiten durch m , und die anderen drei durch $(m + w)$ gehen. Von seinen Ecken gehören je drei nicht aufeinanderfolgende einer und derselben Gruppe der Mannigfaltigkeit M an.

Da eine Ecke beliebig gewählt werden konnte, so gibt es unendlich viele Sechsecke von der angegebenen Beschaffenheit.

Von einem Steiner'schen $2n$ Ecke der Curve C_3 gilt bekanntlich der Satz, dass die Verbindungslinie zweier Ecken, zwischen denen sich eine grade Anzahl anderer befindet, sich ebenfalls um einen festen Punkt der Curve dreht. Wendet man diesen Satz auf das Sechseck S an, indem man je zwei Ecken desselben verbindet, die durch zwei andere getrennt sind, so erhält man

$$(\delta) \quad \begin{cases} (m + 2w) + n + (r + w) \equiv 0 \\ (m + 2w) + (n + w) + r \equiv 0 \\ (m + 2w) + (n + 2w) + (r + 2w) \equiv 0, \end{cases}$$

woraus in Verbindung mit (γ) die beiden folgenden Sextupel von Congruenzen fließen:

$$(\varepsilon) \quad \begin{cases} m + n + r \equiv 0 \\ (m + 2w) + r + (n + w) \equiv 0 \\ m + (n + w) + (r + 2w) \equiv 0 \\ (m + 2w) + (r + 2w) + (n + 2w) \equiv 0 \\ m + (n + 2w) + (r + w) \equiv 0 \\ (m + 2w) + (r + w) + n \equiv 0. \end{cases}$$

$$(\eta) \quad \begin{cases} (m + w) + n + (r + 2w) \equiv 0 \\ (m + 2w) + (r + 2w) + (n + 2w) \equiv 0 \\ (m + w) + (n + 2w) + r \equiv 0 \\ (m + 2w) + r + (n + w) \equiv 0 \\ (m + w) + (n + w) + (r + w) \equiv 0 \\ (m + 2w) + (r + w) + n \equiv 0, \end{cases}$$

welche übrigens auch unmittelbar hätten aufgestellt werden können.

(ε) und (η) lehren, dass, wenn die Ecken von S in den beiden Reihenfolgen

$$(I) \quad n, r, n + w, r + 2w, n + 2w, r + w$$

$$(II) \quad n, r + 2w, n + 2w, r, n + w, r + w$$

verbunden werden, zwei weitere Steiner'sche Sechsecke S' und S'' entstehen, für welche die zugehörigen Steiner'schen Punktepaare

dritter Ordnung mit m und $(m + 2w)$, beziehungsweise $(m + w)$ und $(m + 2w)$ identisch sind. Ihre Lagenbeziehung zu S erhellt aus der folgenden schematischen Darstellung, in welcher je drei Seiten, welche mit demselben Punkte des bezüglichen Steiner'schen Punktepaars dritter Ordnung perspectiv liegen, gleich stark dargestellt sind.

Ein weiteres Resultat ergibt sich aus der Zusammenstellung von (δ) mit dem in zwei bestimmte Tripel zerfallenen Systeme (γ).

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \left\{ \begin{array}{l} m + n + r \equiv 0 \\ m + (n + w) + (r + 2w) \equiv 0 \\ m + (n + 2w) + (r + w) \equiv 0 \end{array} \right. \\
 (1) \quad & \left\{ \begin{array}{l} (m + w) + n + (r + 2w) \equiv 0 \\ (m + w) + (n + w) + (r + w) \equiv 0 \\ (m + w) + (n + 2w) + r \equiv 0 \end{array} \right. \\
 (\delta) \quad & \left\{ \begin{array}{l} (m + 2w) + n + (r + w) \equiv 0 \\ (m + 2w) + (n + w) + r \equiv 0 \\ (m + 2w) + (n + 2w) + (r + 2w) \equiv 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Man erkennt nämlich aus den vorstehenden drei Systemen von Congruenzen, dass von den Dreiecken

$$(m, m + w, m + 2w), (n, n + w, n + 2w), (r, r + w, r + 2w)$$

irgend zwei dreifach perspectiv sind, und zwar so, dass die zugehörigen Perspectivitätscentra mit den Ecken des dritten Dreieckes coincidieren, d. h. die angegebenen Dreiecke, deren Ecken je einer Gruppe der Mannigfaltigkeit M angehören, erzeugen eine in der Configuration $(27_9, 81_3)$ enthaltene desmische Configuration $(9_3, 9_3)$.

3. Um die Gesamtheit der desmischen Configurationen $(9_3, 9_3)$ zu überblicken, welche in der Configuration $(27_9, 81_3)$ sich vorfinden, ist es nützlich, für die Elemente der Gruppen

$$\begin{aligned} G &\equiv (m + w_{ab}), \quad G' \equiv (n + w_{ab}), \quad G'' \equiv (r + w_{ab}) \\ r &\equiv -(m + n) \\ (a, b) &\equiv (00), (01), (02), (10), (11), (12), (20), (21), (22) \end{aligned}$$

eine neue Bezeichnung einzuführen. Man setze nämlich

$$m + w_{ab} \equiv m_{ab}, \quad n + w_{ab} \equiv n_{ab}, \quad r + w_{ab} \equiv r_{ab},$$

so dass

$$\begin{aligned} m &\equiv m_{00}, \quad n \equiv n_{00}, \quad r \equiv r_{00} \\ G &\equiv (m_{ab}), \quad G' \equiv (n_{ab}), \quad G'' \equiv (r_{ab}) \end{aligned}$$

wird. Alsdann liegen wegen

$$m_{00} + n_{00} + r_{00} \equiv 0$$

die drei Punkte $m_{ab}, n_{a'b'}, r_{a''b''}$ dann und nur dann auf einer Geraden, d. h. es ist

$$m_{ab} + n_{a'b'} + r_{a''b''} \equiv 0,$$

wenn die beiden Congruenzen

$$\begin{aligned} (x) \quad a + a' + a'' &\equiv 0 \\ b + b' + b'' &\equiv 0 \end{aligned} \quad \text{mod } 3$$

erfüllt sind. Dieselben können auch durch das äquivalente System

$$\begin{aligned} (\lambda) \quad a - a'' &\equiv a'' - a' \equiv a' - a \\ b - b'' &\equiv b'' - b' \equiv b' - b \end{aligned} \quad \text{mod } 3$$

ersetzt werden, woraus hervorgeht, dass in (x) entweder alle drei Indicespaare $(a, b), (a', b'), (a'', b'')$ verschieden, oder alle drei gleich sind, da aus

$$a' \equiv a, \quad b' \equiv b$$

die Congruenzen

$$a'' \equiv a, \quad b'' \equiv b$$

folgen.

In dem Falle, wo die drei Indicespaare verschieden sind, bleibt, wie aus (x) ersichtlich ist, die Congruenz

$$m_{ab} + n_{a'b'} + r_{a''b''} \equiv 0$$

aufrecht, wenn in ihr die Indicessysteme auf alle möglichen Arten vertauscht werden; es enthält demnach jeder Term in der Entwicklung der Determinante

$$\begin{vmatrix} m_{ab} & n_{ab} & r_{ab} \\ m_{a'b'} & n_{a'b'} & r_{a'b'} \\ m_{a''b''} & n_{a''b''} & r_{a''b''} \end{vmatrix}$$

drei Punkte auf einer Graden; eine Eigenthümlichkeit, welche auch den Elementen einer jeden Horizontalreihe zukommt. Es ergeben sich auf diese Weise neun Grade, die auf eine und nur eine Art in drei Tripel zerlegt werden können, von denen jedes neun verschiedene Punkte der Configuration (27₉, 81₃) enthält:

$$\begin{aligned} (\mu) \quad & \begin{cases} m_{ab} + n_{ab} + r_{ab} \equiv 0 \\ m_{a'b'} + n_{a'b'} + r_{a'b'} \equiv 0 \\ m_{a''b''} + n_{a''b''} + r_{a''b''} \equiv 0 \end{cases} \\ (\mu') \quad & \begin{cases} m_{ab} + n_{a'b'} + r_{a''b''} \equiv 0 \\ m_{a'b'} + n_{a''b''} + r_{ab} \equiv 0 \\ m_{a''b''} + n_{ab} + r_{a'b'} \equiv 0 \end{cases} \\ (\mu'') \quad & \begin{cases} m_{ab} + n_{a''b''} + r_{a'b'} \equiv 0 \\ m_{a'b'} + n_{ab} + r_{a''b''} \equiv 0 \\ m_{a''b''} + n_{a'b'} + r_{ab} \equiv 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Aus (μ) , (μ') , (μ'') geht hervor, dass die Dreiecke

$$(m_{ab}, m_{a'b'}, m_{a''b''}), (n_{ab}, n_{a'b'}, n_{a''b''}), (r_{ab}, r_{a'b'}, r_{a''b''})$$

eine desmische Configuration (9₃, 9₃) erzeugen. Indessen ist dieselbe von der im vorigen § nachgewiesenen nicht verschieden. Es gelten nämlich die Congruenzen

$$\begin{aligned} m_{a'b'} &\equiv m_{ab} + w_{a'-a, b'-b} & m_{a''b''} &\equiv m_{ab} + w_{a''-a, b''-b} \\ n_{a'b'} &\equiv n_{ab} + w_{a'-a, b'-b} & n_{a''b''} &\equiv n_{ab} + w_{a''-a, b''-b} \\ r_{a'b'} &\equiv r_{ab} + w_{a'-a, b'-b} & r_{a''b''} &\equiv r_{ab} + w_{a''-a, b''-b} \end{aligned}$$

worin wegen (λ)

$$w_{a''-a, b''-b} \equiv w_{-(a'-a), -(b'-b)} \equiv -w_{a'-a, b'-b} = 2w_{a'-a, b'-b}.$$

Es sind daher in der That die angegebenen Triangel in der Form darstellbar:

$$\begin{aligned} (m_{ab}, m_{ab} + w_{a'-a, b'-b}, m_{ab} + 2w_{a'-a, b'-b}) \\ (n_{ab}, n_{ab} + w_{a'-a, b'-b}, n_{ab} + 2w_{a'-a, b'-b}) \\ (r_{ab}, r_{ab} + w_{a'-a, b'-b}, r_{ab} + 2w_{a'-a, b'-b}). \end{aligned}$$

4. Das Tripel (μ) ist ein Bestandtheil der neunelementigen Strahlengruppe

$$(\nu) \quad \left[\begin{array}{l} m_{a\beta} + n_{a\beta} + r_{a\beta} \equiv 0 \\ (\alpha \beta) \equiv (00), (01), (02), (10), (11), (12), (20), (21), (22) \end{array} \right],$$

welche durch die Eigenschaft ausgezeichnet ist, alle 27 Punkte der Configuration $(27_9, 81_3)$ zu enthalten. Jedes derartige System von neun Strahlen dieser Configuration, von denen also keine zwei sich auf der Curve C_3 schneiden, soll als ein vollständiges System bezeichnet werden.

Wie eine einfache Betrachtung lehrt, stellt

$$\begin{aligned}
 N_{ab} &\equiv \left[(m_{a\beta} + 2w_{ab}) + (n_{a\beta} + w_{ab}) + r_{a\beta} \equiv 0 \right] \\
 (\rho) \quad & \\
 &\equiv \left[(m_{a+2a, \beta+2b} + n_{a+a, \beta+b} + r_{a\beta} \equiv 0), \right. \\
 &\quad \left. (\alpha\beta) \equiv (00), (01), \dots (22) \right],
 \end{aligned}$$

wenn unter w_{ab} irgend ein bestimmter Wendepunkt verstanden wird, ein vollständiges System dar. Den neun verschiedenen Wendepunkten entsprechend existieren demnach neun vollständige Systeme von der Form (ρ) , unter denen, dem Wendepunkte $w_{ab} \equiv 0$ correspondierend, die Gruppe (ν) vorkommt.

Da ein jeder Strahl der Configuration $(27_9, 81_3)$ in der Form

$$(m_{a\beta} + 2w_{ab}) + (n_{a\beta} + w_{ab}) + r_{a\beta} \equiv 0$$

darstellbar ist, so erschöpfen die neun vollständigen Systeme $N_{00}, N_{01} \dots N_{22}$ sämtliche 81 Grade dieser Configuration, woraus zugleich hervorgeht, dass keine zwei derselben einen gemeinschaftlichen Strahl enthalten.

Durch jedes der Systeme N_{ab} wird eine Correspondenz zwischen den Elementen von G, G', G'' erzeugt, in welcher drei solche Punkte dieser Gruppen einander homolog sind, die einem und demselben Strahle von N_{ab} angehören. In der zwischen G und G' bestehenden Verwandtschaft entsprechen sich also $(m_{a\beta} + 2w_{ab})$ und $(n_{a\beta} + w_{ab})$ für $(\alpha\beta) \equiv (00), (01), \dots (22)$. Nun ist es von Wichtigkeit, dass diese Verwandtschaft auch rein geometrisch definiert werden kann. Verschiebt man nämlich den Punkt $(m_{00} + 2w_{ab})$ stetig längs der Curve C_3 , bis er nach $(n_{00} + w_{ab})$ gelangt und lässt gleichzeitig auch die übrigen Elemente von G auf der Curve sich fortbewegen, und zwar so, dass die bewegten Punkte in jedem Augenblicke eine Gruppe der Mannigfaltigkeit M repräsentieren, so wird am Schlusse der Bewegung wegen

$$\begin{aligned}
 m_{a\beta} + 2w_{ab} &\equiv (m_{00} + 2w_{ab}) + w_{a\beta} \\
 n_{a\beta} + w_{ab} &\equiv (n_{00} + w_{ab}) + w_{a\beta}
 \end{aligned}$$

$(m_{a\beta} + 2w_{ab})$ für jedes der neun Indexsysteme $(\alpha\beta)$ in $(n_{a\beta} + w_{ab})$ übergeführt. Damit ist die geometrische Bedeutung der neun vollständigen Systeme N_{ab} , von denen jedes durch Angabe eines seiner Strahlen unzweideutig bestimmt ist, erkannt. Wegen der ausgezeichneten Stellung, welche sie innerhalb der Gesamtheit der vollständigen Systeme einnehmen, sollen dieselben als „normale“ vollständige Systeme oder kurz als „Normalsysteme“ bezeichnet werden.

Ihre Gleichberechtigung unter einander ergibt sich auch auf analytischem Wege mittelst der Substitution

$$m_{00} + 2w_{ab} \equiv m'_{00}, \quad n_{00} + w_{ab} \equiv n'_{00}, \quad r_{00} \equiv r'_{00},$$

durch welche für N_{ab} die mit (ν) übereinstimmende Darstellung

$$N_{ab} \equiv \left[\begin{array}{l} m'_{\alpha\beta} + n'_{\alpha\beta} + r'_{\alpha\beta} \equiv 0 \\ (\alpha\beta) \equiv (00) \dots (22) \end{array} \right]$$

erhalten wird. Dieselbe besagt, dass es möglich ist, einem jeden Normalsysteme ein beliebiges der neun Indexpaare zuzuordnen, also z. B. $N_{ab} \equiv N'_{00}$ zu setzen.

Dieselbe Betrachtung liefert auch die Bedingung dafür, dass die zwei Graden

$$m_{ab} + n_{a'b'} + r_{a''b''} \equiv 0$$

$$m_{\alpha\beta} + n_{\alpha'\beta'} + r_{\alpha''\beta''} \equiv 0$$

einem und demselben Normalsysteme angehören. Aus dem Congruenzsysteme

$$m_{ab} - m_{\alpha\beta} \equiv n_{a'b'} - n_{\alpha'\beta'} \equiv r_{a''b''} - r_{\alpha''\beta''},$$

welches mit

$$w_{a-a, b-\beta} \equiv w_{a'-a', b'-\beta'} \equiv w_{a''-a'', b''-\beta''}$$

identisch ist, folgt nämlich für das gesuchte Criterium:

$$(\sigma) \quad \begin{array}{l} a - \alpha \equiv a' - \alpha' \equiv a'' - \alpha'' \\ b - \beta \equiv b' - \beta' \equiv b'' - \beta'' \end{array} \pmod{3}$$

Als eine Anwendung von (σ) findet man auf Grund von (λ), dass die beiden Strahlentripel (μ') und (μ'') des §. 3 die Eigenschaft von (μ) theilen, einem Normalsysteme anzugehören. Man überzeugt sich leicht, dass dieselben in $N_{a''-a, b''-b}$, beziehungsweise $N_{a-a'', b-b''}$ enthalten sind.

5. Das dem Normalsysteme N_{00} angehörige Trippel (μ) des §. 3 hatte den Bedingungen zu genügen, dass die Indexsysteme (ab), ($a'b'$), ($a''b''$) von einander verschieden sind, und überdies die Congruenzen (χ) erfüllt werden. Da bei einer willkürlichen Wahl von (a, b) für (a', b') acht Wertsysteme zulässig sind, so erkennt man mit Rücksicht auf den symmetrischen Bau von (χ), dass es in $N_{00} \frac{9 \cdot 8}{6} = 12$ Tripel von der Form (μ) gibt, deren zugehörige

Indexsysteme durch die Horizontalreihen, die Verticalreihen und die Glieder der Entwicklung der Determinante

$$\bullet \quad \left| \begin{array}{ccc} (00) & (01) & (02) \\ (10) & (11) & (12) \\ (20) & (21) & (22) \end{array} \right|$$

geliefert werden. Nun ist jedem dieser Tripel eine desmische Configuration $(9_3, 9_3)$ zugeordnet, weshalb sich bei Benutzung sämtlicher neun Normalsysteme 12.9 derartige Configurationen ergeben, von denen jedoch jede dreimal gezählt ist, da je drei der in Betracht kommenden Tripel, wie (μ) , (μ') , (μ'') eine und dieselbe Configuration erzeugen. Im ganzen erhält man daher auf dem angegebenen Wege 36 in $(27_9, 81_3)$ enthaltene desmische Configurationen $(9_3, 9_3)$, und es ist nicht schwer nachzuweisen, dass es außer denselben keine weiteren gibt. Wenn nämlich die Dreiecke

$$(m_{ab}, m_{a'b'}, m_{a''b''}) (n_{cd}, n_{c'd'}, n_{c''d''}) (r_{ef}, r_{e'f'}, r_{e''f''})$$

zu einer desmischen Configuration Anlass geben, so besteht, wenn die Bezeichnung passend gewählt wird, das folgende System von Congruenzen:

$$\begin{aligned} (\tau) \quad & \begin{cases} m_{ab} + n_{cd} + r_{ef} \equiv 0 \\ m_{a'b'} + n_{c'd'} + r_{e'f'} \equiv 0 \\ m_{a''b''} + n_{c''d''} + r_{e''f''} \equiv 0 \end{cases} \\ (\tau') \quad & \begin{cases} m_{ab} + n_{c'd'} + r_{e''f''} \equiv 0 \\ m_{a'b'} + n_{c''d''} + r_{ef} \equiv 0 \\ m_{a''b''} + n_{cd} + r_{e'f'} \equiv 0 \end{cases} \\ (\tau'') \quad & \begin{cases} m_{ab} + n_{c''d''} + r_{e'f'} \equiv 0 \\ m_{a'b'} + n_{cd} + r_{e''f''} \equiv 0 \\ m_{a''b''} + n_{c'd'} + r_{ef} \equiv 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Aus den beiden Congruenzen in (τ') und (τ'') , welche als gemeinsamen dritten Posten $r_{e''f''}$ aufweisen, folgt:

$$\begin{aligned} a + c' + e'' &\equiv 0 & b + d' + f'' &\equiv 0 \\ a' + c + e'' &\equiv 0 & b' + d + f'' &\equiv 0 \end{aligned} \quad \text{mod } 3,$$

also

$$a - a' \equiv c - c' \quad b - b' \equiv d - d'$$

Mittelt analoger Betrachtungen findet man zwischen den neun Indexpaaren $(ab), \dots (e''f'')$ weitere ähnliche Beziehungen, welche zufolge (σ) aussagen, dass (τ) , (τ') , (τ'') je in einem Normalsysteme enthalten sind, und in der gleichen Beziehung zu einander stehen, wie (μ) , (μ') , (μ'') ; q. e. d.

6. Die Normalsysteme ermöglichen es, die Gesamtheit der vollständigen Systeme in einer gewissen Hinsicht zu classificieren.

Irgend ein vollständiges System S hat nämlich mit jedem der Normalsysteme N_{ab} eine gewisse Anzahl α_{ab} von Strahlen gemeinsam, deren Complex

$$(\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{20}, \alpha_{21}, \alpha_{22})$$

als eine Charakteristik von S angesehen werden kann. Zufolge

der Definition ist

$$\sum \alpha_{ab} = 9.$$

Wenn von den Normalsystemen abgesehen wird, für welche je eines der α den Wert 9 besitzt, während die übrigen verschwinden, so erreichen die Zahlen α höchstens den Wert 6, da zwei vollständige Systeme offenbar identisch sind, wenn sie 7 gemeinschaftliche Strahlen enthalten:

$$\alpha_{ab} \neq 7, 8.$$

Was nun die vollständigen Systeme Σ anlangt, welche mit einem Normalsysteme ein Sextupel s gemein haben, so ist aus dem Vorhergehenden klar, dass dieselben den gleichen Bau aufweisen wie die beiden vollständigen Systeme $[(N_{00} - \mu) + \mu']$ und $[(N_{00} - \mu) + \mu'']$, welche das Sextupel $(N_{00} - \mu)$ von N_{00} enthalten; d. h. das Tripel $(\Sigma - s)$ ist ebenfalls in einem Normalsysteme enthalten, und gibt Anlass zur Erzeugung einer gewissen desmischen Configuration $(9_3, 9_3)$. In der Charakteristik eines vollständigen Systems Σ verschwinden daher 7 der Zahlen α , während die beiden übrigen die Werte 6 und 3 besitzen.

Ferner ist klar, dass die Anzahl der Systeme Σ , welche mit einem bestimmten Normalsysteme, z. B. N_{00} , ein Sextupel gemein haben, doppelt so groß ist als die Anzahl der in diesem Normalsysteme vorkommenden Tripel von der Form (μ) . Dieselbe besitzt demnach den Wert 24, aus welchem durch Multiplication mit 9 hervorgeht, dass die Systeme Σ in der Anzahl 216 vertreten sind.

Von den 24 Systemen Σ , welche je ein Sextupel eines und desselben Normalsystems N_{ab} enthalten, sind je drei, $\Sigma_1 \equiv s_1 + t_1$, $\Sigma_2 \equiv s_2 + t_2$, $\Sigma_3 \equiv s_3 + t_3$, von der Beschaffenheit, dass sie mit einem und demselben zweiten Normalsysteme $N_{a'b'}$ je ein Tripel t_1, t_2, t_3 gemein haben. Alsdann sind die Sextupel s_1, s_2, s_3 paarweise verschieden, da zwei vollständige Systeme mit gemeinschaftlichem Sextupel, wie $[(N_{00} - \mu) + \mu']$ und $[(N_{00} - \mu) + \mu'']$ außerdem noch Tripel enthalten, welche nach dem früher Bewiesenen verschiedenen Normalsystemen angehören. Daraus folgt, dass t_1, t_2, t_3 lauter verschiedene Strahlen enthalten. Denn fände sich z. B. der Strahl

$$m_{\alpha\beta} + n_{\alpha'\beta'} + r_{\alpha''\beta''} \equiv 0$$

sowohl in t_1 , als auch in t_2 vor, so könnte keine von den drei Graden in N_{ab} , welche beziehungsweise durch $m_{\alpha\beta}$, $n_{\alpha'\beta'}$, $r_{\alpha''\beta''}$ hindurchgehen, in s_1 oder s_3 vorkommen; dann wäre aber nothwendig $s_1 \equiv s_2$, was unmöglich ist. Es erschöpfen daher die Tripel t_1, t_2, t_3 hauptsächlich das Normalsystem $N_{a'b'}$:

$$N_{a'b'} \equiv t_1 + t_2 + t_3.$$