Isogonalkurven, Äquitangentialkurven und komplexe Zahlen.

Von

G. SCHEFFERS in Darmstadt.

In zwei früheren Arbeiten*) habe ich mich mit den *isogonalen Trajektorien* einer einfach unendlichen Kurvenschar in der Ebene beschäftigt, also mit Kurven, die schon häufig der Gegenstand von Untersuchungen verschiedener Autoren gewesen sind. Dabei stieß ich auf einen merkwürdigen Satz, der zeigte, daß jeder Schar von ∞^2 isogonalen Trajektorien in ganz bestimmter Weise eine zweite solche Schar zugeordnet ist, woraus viele bemerkenswerte Konstruktionen für die Krümmungskreise besonderer Kurven folgten. Kürzlich nun bemerkte ich, daß sich eine ganze Reihe von anderen Betrachtungen anstellen lassen, die in gewisser Weise den früheren dualistisch gegenüberstehen. Sie führten mich zu analogen Sätzen über Kurven, die ich *Äquitangentialkurven* nenne, obwohl diese Bezeichnung sonst in der Literatur in anderer, einfacherer Bedeutung vorkommt. Unter einer Äquitangentialkurve einer gegebenen einfach unendlichen Kurvenschar in der Ebene soll eine Kurve verstanden werden, bei der die unendlich vielen Tangenten, die sie mit den gegebenen Kurven gemein hat, sämtlich dieselbe Länge — gemessen zwischen den beiden Berührungspunkten — haben. Meines Wissens hat man solche Kurven bisher nicht untersucht. In überraschender Weise ergaben sich mehrere schöne Sätze über solche Kurven. Die gemeinsame Quelle dieser Sätze und der analogen Sätze über isogonale Trajektorien ist die *Anwendung von gewissen geometrisch einfach definierbaren Berührungstransformationen in der Ebene.**)*

*) „Über gewisse zweifach unendliche Kurvenscharen in der Ebene“, Leipziger Berichte 1898, S. 261—294, „Ein Beitrag zur Geometrie der Berührungstransformationen in der Ebene“, ebenda 1904, S. 105—116. Über die Hauptergebnisse der gegenwärtigen Arbeit habe ich auf dem dritten Internationalen Mathematiker-Kongreß einen kurzen Bericht erstattet.

**) Dabei wird nur der Begriff einer Berührungstransformation in der Ebene benutzt, also nur das, was man in dem Werke von Lie, „Geometrie der Berührungstransformationen, 1. Band“, Leipzig 1896, Kap. 1 und 2, nachlesen mag.

Bei der weiteren Verfolgung der hervortretenden Analogien gelangte ich zu einer beachtenswerten unendlichen Gruppe von Berührungstransformationen, die *ein Seitenstück zur unendlichen Gruppe der konformen Transformationen in der Ebene* ist. Während man nämlich diese Gruppe als den Inbegriff aller derjenigen Berührungstransformationen definieren kann, die jeden Punkt in einen Punkt verwandeln und dabei die Winkel invariant lassen, ist die neue Gruppe, die ich die *äquilonge Gruppe* nenne, der Inbegriff aller derjenigen Berührungstransformationen, die jede Gerade in eine Gerade verwandeln und dabei die Strecken invariant lassen. Sie enthält — wie die konforme Gruppe — im besonderen alle Bewegungen der Ebene.

Die am meisten überraschende Analogie aber ergab sich aus der Überlegung, daß die konforme Gruppe in bekannter Weise aufs engste mit den *gewöhnlichen komplexen Zahlen* $x + iy$ zusammenhängt, wenn man die Punkte (x, y) der Ebene als Träger der komplexen Zahlen auffaßt. Es gibt ja bekanntlich außer dem System der gewöhnlichen komplexen Zahlen nur noch *einen* Typus von Zahlensystemen in zwei Einheiten, bei dem die gewöhnlichen Gesetze der Multiplikation erfüllt sind. Dies System ist aus den Einheiten 1 und j gebildet, wo $j^2 = 0$ ist. Nun ergab sich, daß die *äquilonge Gruppe* aufs engste mit diesem zweiten Zahlensystem zusammenhängt. Nur sind hier nicht die Punkte, sondern die Geraden der Ebene die Träger der komplexen Zahlen $u + jv$. Dabei sind u, v besondere Linienkoordinaten in der Ebene, nämlich diejenigen Bestimmungsstücke der Geraden, die in ihrer Hesseschen Normalform auftreten. Das Endergebnis der Untersuchungen war also eine Deutung des zweiten Zahlensystems in zwei Einheiten, die ungezwungen aus einer Analogie mit den gewöhnlich komplexen Zahlen folgte und die eine schöne *Darstellung der äquilongen Gruppe durch die analytischen Funktionen dieses zweiten Zahlensystems* lieferte.

Die ausführliche Ableitung dieser Ergebnisse ist der Zweck des folgenden Aufsatzes.

Während ich zu den Sätzen über isogonale Trajektorien zuerst auf rein analytischem Wege gelangt war, wobei der innere Grund für das Bestehen der Sätze verhüllt war, ging ich später von synthetischen Überlegungen aus, die volle Klarheit in den Zusammenhang brachten. Ich habe sie auch im folgenden synthetisch wiedergegeben; alsdann habe ich ihren analytischen Nachweis nachgeholt und in der Folge analytisch weiter operiert. Natürlich lassen sich auch die synthetischen Betrachtungen leicht analytisch wiedergeben; es schien mir jedoch angebracht, den Weg, auf dem ich zu jenen Analogien geführt wurde, durch keinerlei analytische Einkleidung undeutlich zu machen. Auch habe ich mich auf nur wenige

Beispiele beschränkt. Zahlreiche Beispiele zu den Sätzen über die isogonalen Trajektorien findet man in meiner ersten Arbeit hierüber. Weitere Beispiele zu den interessanten Äquitangentialkurven hoffe ich später geben zu können.

§ 1.

Isogonalkurven und Äquitangentialkurven.

Wird die Ebene Punkt für Punkt auf sich selbst abgebildet und sind die Funktionen, die diese Abbildung vermitteln, stetig und differenzierbar, so gilt bekanntlich der Satz, daß die Beziehung zwischen jedem unendlich kleinen Bereiche von allgemeiner Lage und dem Bildbereiche projektiv ist. Wir wollen dies so ausdrücken:

Jede Punkttransformation der Ebene kann als eine Berührungstransformation aufgefaßt werden, und als solche führt sie die Linienelemente eines Punktes von allgemeiner Lage in die Linienelemente des Bildpunktes derart über, daß das Strahlenbüschel der ersteren zu dem der letzteren projektiv ist.

Liegt nun eine *Berührungstransformation* vor, die jeden Punkt in eine Gerade überführt, wie es z. B. die Transformationen durch reziproke Polaren tun, so läßt sich leicht ein entsprechender Satz aufstellen. Denn wenn man nach einer derartigen Berührungstransformation insbesondere eine Transformation durch reziproke Polaren ausübt, so ist die Aufeinanderfolge beider augenscheinlich eine Punkttransformation. Da nun die Transformation durch reziproke Polaren zu sich selbst invers (involutorisch) ist, so ist mithin jede Berührungstransformation, die alle Punkte in Geraden verwandelt, ersetzbar durch die Aufeinanderfolge einer Punkttransformation und einer Transformation durch reziproke Polaren. Bei jener Punkttransformation gilt der oben erwähnte Satz. Die Transformation durch reziproke Polaren ferner verwandelt die Linienelemente eines Punktes derart in die einer Geraden, daß das Strahlenbüschel der ersteren Elemente zur Punktreihe der letzteren Elemente projektiv ist. Demnach folgt:

Satz 1. *Bei einer solchen Berührungstransformation der Ebene, die jeden Punkt in eine Gerade verwandelt, gehen die Linienelemente eines Punktes von allgemeiner Lage in die Elemente der diesem Punkte zugeordneten Geraden in der Weise über, daß das Strahlenbüschel der ersteren Elemente zur Punktreihe der letzteren Elemente projektiv ist.*

Stillschweigend ist hierbei wie in allem folgenden vorauszusetzen, daß die Berührungstransformation analytisch durch solche Funktionen darstellbar sei, die stetig und differenzierbar sind.

Insbesondere beschränken wir uns von jetzt an auf solche Berührungs-

transformationen der Ebene, bei denen jeder Punkt in eine Gerade übergeht, die den betreffenden Punkt enthält.

Eine solche Berührungstransformation wird dadurch definiert, daß man eine stetige Schar von ∞^2 Linienelementen auswählt, jedoch so, daß zu jedem Punkte der Ebene und ebenso zu jeder Geraden der Ebene eines dieser Elemente gehört. Alsdann nämlich ordnen wir jedem Punkte der Ebene die Gerade desjenigen jener ∞^2 Elemente zu, das diesem Punkte angehört. Jene Schar von ∞^2 Elementen besteht aus allen Linienelementen

Fig. 1.

einer stetigen Schar von ∞^1 Kurven Γ_0 . Wir wählen also irgendwie eine stetige Schar von solchen ∞^1 Kurven Γ_0 aus, die die ganze Ebene erfüllen (siehe Fig. 1), und betrachten alsdann diejenige Berührungstransformation, die jeden Punkt P_0 von allgemeiner Lage in diejenige Gerade p_0 verwandelt, die in P_0 Tangente der durch P_0 gehenden Kurve Γ_0 ist. Sind $P_0, Q_0, \dots$ eine Reihe von Punkten der Ebene, so sollen

die Geraden, in die sie bei der betrachteten Berührungstransformation übergehen, mit $p_0, q_0, \dots$ bezeichnet werden. Die Berührungstransformation führt alle Punkte einer Kurve Γ_0 in die Tangenten derselben Kurve über; jede der ∞^1 Kurven Γ_0 bleibt also für sich invariant, ja noch mehr: jedes Linienelement jeder dieser Kurven bleibt für sich in Ruhe.

Satz 2. *Führt eine Berührungstransformation der Ebene jeden Punkt in eine durch ihn gehende Gerade über, so läßt sie jedes derjenigen ∞^2 Linienelemente, die durch diese ∞^2 Paare von Punkten und Geraden bestimmt werden, in Ruhe.*

Mit Rücksicht auf Satz 1 folgt weiter:

Satz 3. *Bei einer solchen Berührungstransformation der Ebene, die jeden Punkt P_0 in eine durch ihn gehende Gerade p_0 verwandelt, werden die Linienelemente eines jeden Punktes P_0 derart in die Linienelemente der durch ihn gehenden Geraden p_0 übergeführt, daß das Strahlenbüschel der ersteren Elemente zur Punktreihe der letzteren projektiv ist, wobei insbesondere die Gerade p_0 — als Strahl des Büschels — dem betrachteten Punkte P_0 — als Punkt der Punktreihe — entspricht.*

Unsere Berührungstransformation ist, wie wir sahen, durch Angabe einer Schar von ∞^1 Kurven Γ_0 völlig definiert. Geben wir einer dieser Kurven Γ_0 einen bestimmten Fortschreitungsinn, so haben alle Kurven Γ_0 einen bestimmten Fortschreitungsinn, wenn sie eine stetige Schar bilden. Damit ist alsdann auch auf jeder Tangente p_0 ein positiver Sinn festgelegt. Außerdem setzen wir für alle Punkte P_0 einen bestimmten posi-

tiven Sinn der Drehung um diese Punkte fest. Alsdann ist jedes der ∞^2 Linienelemente, die den ∞^1 Kurven Γ_0 angehören, sowohl mit einem positiven Sinne der Drehung um seinen Punkt als auch mit einem positiven Sinn des Fortschreitens längs seiner Geraden behaftet.

Die Berührungstransformation, die jeden Punkt P_0 in die durch ihn gehende zugeordnete Gerade p_0 überführt, wollen wir mit $\mathfrak{A}_0$ bezeichnen. Die zu ihr inverse Berührungstransformation, bei der also jede Gerade p_0 in den auf ihr liegenden zugeordneten Punkt P_0 übergeht, wollen wir statt mit $\mathfrak{A}_0^{-1}$ mit $\mathfrak{B}_0$ bezeichnen, weil wir an $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ zwei getrennte, aber parallel laufende Reihen von Betrachtungen anknüpfen.

Jede Gerade p_0 der Ebene drehen wir in dem festgesetzten Sinne um ihren Punkt P_0 um ein und denselben Winkel α , so daß sie in eine

Fig. 2 a.

neue Gerade p_α durch P_0 übergeht. (Siehe Fig. 2 a.)

Alsdann betrachten wir diejenige Berührungstransformation, die jeden Punkt P_0 in die zugeordnete Gerade p_α verwandelt. Sie sei mit $\mathfrak{A}_\alpha$ bezeichnet. Wie früher $\mathfrak{A}_0$ durch die ∞^2 Linienelemente (P_0, p_0) definiert war, so ist jetzt $\mathfrak{A}_\alpha$ durch diejenigen ∞^2 Linienelemente (P_0, p_α) definiert, die durch Drehung jener Elemente um ihre Punkte hervorgegangen sind. Die neuen ∞^2 Elemente (P_0, p_α) sind die einer neuen Schar von ∞^1 Kurven A_α . Jede Kurve A_α schneidet jede Kurve Γ_0

Jeden Punkt P_0 der Ebene verschieben wir in dem festgesetzten Sinne auf seiner Geraden p_0 um ein und dieselbe Strecke a , so daß er in

Fig. 2 b.

einen neuen Punkt P_α auf p_0 übergeht. (Siehe Fig. 2 b.)

jede Gerade p_0 in den zugeordneten Punkt P_α verwandelt. Sie sei mit $\mathfrak{B}_\alpha$ bezeichnet. Wie früher $\mathfrak{B}_0$ durch die ∞^2 Linienelemente (p_0, P_0) definiert war, so ist jetzt $\mathfrak{B}_\alpha$ durch diejenigen ∞^2 Linienelemente (p_0, P_α) definiert, die durch Verschieben jener Elemente auf ihren Geraden hervorgegangen sind. Die neuen ∞^2 Elemente (p_0, P_α) sind die einer neuen Schar von ∞^1 Kurven B_α . Jede Kurve B_α hat mit jeder Kurve Γ_0

unter demselben Winkel α . (Siehe Fig. 3a.)

eine Tangente von derselben Länge a gemein. (Siehe Fig. 3b.)

Fig. 3a.

Fig. 3b

Unter A_0 und B_0 werden wir hiernach die Kurven mit den Elementen (p_0, P_0) , d. h. die ursprünglichen ∞^1 Kurven Γ_0 , zu verstehen haben. Man nennt bekanntlich solche Kurven, die eine Schar von ∞^1 Kurven unter konstantem Winkel durchsetzen, *isogonale Trajektorien* oder kurz *Isogonalkurven*. Die Kurven A_α sind also solche Kurven hinsichtlich der gegebenen Schar Γ_0 . Weniger hat man sich aber mit solchen Kurven beschäftigt, die mit einer Schar von ∞^1 Kurven Γ_0 Tangenten von konstanter Länge a gemein haben. Wir wollen solche Kurven *Äquitangentialkurven**) der Kurven Γ_0 nennen. Also:

Die ∞^1 Kurven A_α sind Isogonalkurven der ∞^1 Kurven Γ_0 (oder A_0) mit dem Winkel α .

Die Berührungstransformation $\mathcal{A}_\alpha$ ist genau so wie $\mathcal{A}_0$ charakterisiert, indem sie wieder jeden Punkt in eine Gerade verwandelt, die durch

Die ∞^1 Kurven B_α sind Äquitangentialkurven der ∞^1 Kurven Γ_0 (oder B_0) mit derselben Strecke a .

Die Berührungstransformation $\mathcal{B}_\alpha$ ist genau so wie $\mathcal{B}_0$ charakterisiert, indem sie wieder jede Gerade in einen Punkt verwandelt, der auf

*) Der Name „Äquitangentialkurve“ kommt allerdings schon in anderer Bedeutung vor. Wie dem Werke von Loria: „Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven“, Leipzig 1902, S. 567, zu entnehmen ist, nennt Brocard so in seinen „Notes de bibliographie des courbes géométriques, partie complémentaire“, Bar-le-Duc 1899, S. 58, diejenigen Kurven, die man erhält, wenn man auf allen Tangenten einer Kurve eine Strecke von konstanter Länge abträgt und den Ort der Endpunkte dieser Strecken ins Auge faßt. Es war mir jedoch nicht möglich, einen geeigneteren Namen für die oben betrachteten Kurven zu finden. Aber um so nachdrücklicher muß darauf hingewiesen werden, daß die Brocardschen Äquitangentialkurven ganz andere Kurven sind. Auf diese Brocardschen Kurven komme ich in § 3 zurück, wo ich vorschlage, sie „Tangentialen“ zu nennen.

ihn geht. Hiervon werden wir nachher Gebrauch machen.

Üben wir jetzt $\mathfrak{A}_\alpha$ auf ein Linienelement (P_0, p_0) aus. Um zu erkennen, wie das transformierte Element liegt, bezeichnen wir mit Q_0 einen zu P_0 unendlich benachbarten Punkt auf p_0 , so daß q_0 die zu Q_0 zugeordnete und durch Q_0 gehende Gerade ist. (Siehe Fig. 4a.)

Fig. 4a.

q_0 ist zu p_0 unendlich benachbart. Indem wir p_0 und q_0 um ihre Punkte P_0 und Q_0 um den Winkel α drehen, bringen wir sie in die Lagen p_α und q_α . Vermöge $\mathfrak{A}_\alpha$ gehen P_0 und Q_0 in p_α und q_α über. Das Linienelement (P_0, p_0) geht daher bei $\mathfrak{A}_\alpha$ in dasjenige Element über, das den Schnittpunkt von p_α und q_α zum Punkt und p_α zur Geraden hat. Aber der Schnittpunkt von p_α und q_α liegt auf dem Kreise, der p_0 in P_0 berührt und bei dem der Gegenpunkt von P_0 der Schnittpunkt der Lote ist, die man in P_0 und Q_0 auf p_0 und q_0 errichten kann.

Durch P_0 geht eine Kurve A_0

ihr liegt. Hiervon werden wir nachher Gebrauch machen.

Üben wir jetzt $\mathfrak{B}_a$ auf ein Linienelement (p_0, P_0) aus. Um zu erkennen, wie das transformierte Element liegt, bezeichnen wir mit q_0 eine zu p_0 unendlich benachbarte Gerade durch P_0 , so daß Q_0 der zu q_0 zugeordnete und auf q_0 gelegene Punkt ist. (Siehe Fig. 4b.)

Fig. 4b.

Q_0 ist zu P_0 unendlich benachbart. Indem wir P_0 und Q_0 längs ihrer Geraden p_0 und q_0 um die Strecke a verschieben, bringen wir sie in die Lage P_a und Q_a . Vermöge $\mathfrak{B}_a$ gehen p_0 und q_0 in P_a und Q_a über. Das Linienelement (p_0, P_0) geht daher bei $\mathfrak{B}_a$ in dasjenige Element über, das die Gerade von P_a nach Q_a zur Geraden und P_a zum Punkt hat. Aber die Gerade von P_a nach Q_a berührt die Parabel, die P_0 zum Scheitel, p_0 zur Scheiteltangente und den Schnittpunkt der Lote, die man in P_0 und Q_0 auf p_0 und q_0 errichten kann, zum Brennpunkt hat.

Die Gerade p_0 berührt eine

(oder Γ_0). Auf ihr liegt Q_0 unendlich nahe bei P_0 . Dabei sind p_0 und q_0 die Tangenten von P_0 und Q_0 . Demnach ist jener Gegenpunkt auf dem Kreise der zu dem Elemente (P_0, p_0) der Kurve A_0 gehörige Krümmungsmittelpunkt A_0 .

Da die Kurven A_0 und B_0 miteinander identisch sind, so fällt auch A_0 mit B_0 zusammen. Des Späteren wegen benutzen wir trotzdem verschiedene Bezeichnungen. Wir haben gefunden:

Satz 4a. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_\alpha$ führt das Element (P_0, p_0) über in dasjenige Element, dessen Gerade p_0 ist und dessen Punkt auf dem Kreise liegt, der zum Durchmesser die Strecke $P_0 A_0$ hat. A_0 bedeutet dabei den zum Element (P_0, p_0) gehörigen Krümmungsmittelpunkt derjenigen Kurve A_0 , die dies Element enthält.*

Da die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_\alpha$ aus der Berührungstransformation $\mathfrak{A}_0$ durch dasselbe Verfahren hervorgeht, wie die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_{\alpha+\beta}$ aus der Berührungstransformation $\mathfrak{A}_\beta$, so können wir den Satz 4a sofort so verallgemeinern:

Satz 5a. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_{\alpha+\beta}$ führt das Element (P_0, p_β) über in dasjenige Element, dessen Gerade $p_{\alpha+\beta}$ ist und dessen Punkt auf dem Kreise liegt, der $P_0 A_\beta$ zum Durchmesser hat. A_β bedeutet dabei den zum Element (P_0, p_β) gehörigen Krümmungsmittelpunkt derjenigen Kurve A_β , die dies Element enthält. (Siehe Fig. 5a.)*

Wählen wir insbesondere $\alpha = -\beta$ und geben wir β alle Werte, so sehen wir, daß die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_0$ alle Elemente (P_0, p_β)

Kurve B_0 (oder Γ_0). Die Gerade q_0 ist eine zu p_0 unendlich benachbarte Tangente. P_0 und Q_0 sind die Berührungspunkte. Demnach ist der Brennpunkt der Parabel der zu dem Elemente (p_0, P_0) der Kurve B_0 gehörige Krümmungsmittelpunkt B_0 .

Satz 4b. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_\alpha$ führt das Element (p_0, P_0) über in dasjenige Element, dessen Punkt P_0 ist und dessen Gerade die Parabel berührt, die p_0 zur Scheiteltangente und B_0 zum Brennpunkt hat. B_0 bedeutet dabei den zum Element (p_0, P_0) gehörigen Krümmungsmittelpunkt derjenigen Kurve B_0 , die dies Element enthält.*

Da die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_\alpha$ aus der Berührungstransformation $\mathfrak{B}_0$ durch dasselbe Verfahren hervorgeht, wie die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_{\alpha+b}$ aus der Berührungstransformation $\mathfrak{B}_b$, so können wir den Satz 4b sofort so verallgemeinern:

Satz 5b. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_{\alpha+b}$ führt das Element (p_0, P_b) über in dasjenige Element, dessen Punkt $P_{\alpha+b}$ ist und dessen Gerade die Parabel berührt, die p_0 zur Scheiteltangente und B_b zum Brennpunkt hat. B_b bedeutet dabei den zum Element (p_0, P_b) gehörigen Krümmungsmittelpunkt derjenigen Kurve B_b , die dies Element enthält. (S. Fig. 5b.)*

Wählen wir insbesondere $a = -b$ und geben wir b alle Werte, so sehen wir, daß die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_0$ alle Elemente (p_0, P_b)

des Punktes P_0 in solche Elemente der Geraden p_0 verwandelt, deren Punkte von den Kreisen mit dem

Fig. 5 a.

variierenden Durchmesser $P_0 A_\beta$ geschnitten werden. (Siehe ebenfalls Fig. 5 a.)

Dabei ist zu beachten, daß A_β als Krümmungsmittelpunkt des Punktes P_0 der Kurve A_β auf dem Lote zu p_β durch P_0 liegt. Lassen wir β variieren, so beschreibt p_β ein Strahlenbüschel um P_0 , also $P_0 A_\beta$ ein dazu projektives Büschel um P_0 . Nach Satz 3 ist die Punktreihe der transformierten Elemente, die auf p_0 liegen, projektiv zu jenem ersten Büschel. Da jeder Punkt A_β von p_0 aus senkrecht über dem betreffenden Punkte der Punktreihe liegt, als Gegenpunkt von P_0 auf dem Kreise, so folgt, daß die Lote von den Punkten A_β auf p_0 ebenfalls ein projektives Büschel von Parallelstrahlen bilden. Alle ∞^1 Punkte A_β also, die zu P_0 gehören, liegen im Durchschnitt zweier pro-

der Geraden p_0 in solche Elemente des Punktes P_0 verwandelt, deren Geraden die Parabeln berühren, die p_0

Fig. 5 b.

zur Scheiteltangente haben und deren variierende Brennpunkte die Punkte B_b sind. (Siehe ebenfalls Fig. 5 b.)

Dabei ist zu beachten, daß B_b als Krümmungsmittelpunkt der Tangente p_0 der Kurve B_b auf dem Lote zu p_0 durch P_0 liegt. Lassen wir b variieren, so beschreibt P_b eine Punktreihe auf p_0 , also $P_0 B_b$ ein dazu projektives Parallelenbüschel. Nach Satz 3 ist jene Punktreihe projektiv zu dem Büschel der Geraden der transformierten Elemente, d. h. zu dem Büschel der Tangenten von P_0 an die Parabeln. Da jede Tangente senkrecht ist zum Strahl $P_0 B_b$ nach dem variierenden Brennpunkte B_b , so folgt, daß die Strahlen $P_0 B_b$ ebenfalls ein projektives Büschel mit dem Mittelpunkt P_0 bilden. Alle ∞^1 Punkte B_b also, die zu p_0 gehören, liegen im Durchschnitt zweier projektiver

jektiver Büschel. Nach Satz 3 entspricht dabei ferner das Lot zu p_0 durch P_0 sich selbst. Alle ∞^1 Punkte A_β liegen mithin auf einer Geraden.

Satz 6a. *Alle durch einen Punkt P_0 gehenden Isogonalkurven A_β einer Schar von ∞^1 Kurven A_0 haben in P_0 solche Krümmungskreise, deren Mittelpunkte A_β auf einer Geraden liegen.*)*

Die beiden in diesen Sätzen erwähnten Geraden haben den Punkt A_0 , der ja mit B_0 als Krümmungsmittelpunkt von Γ_0 (oder A_0 oder B_0) identisch ist, gemein. Aber noch mehr: Die Transformationen $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ sind ja zueinander invers. Die oben in den Sätzen 5a und 5b angegebenen Konstruktionen müssen demnach zu derselben Beziehung zwischen den Elementen von P_0 und denen von p_0 führen. Daraus folgt, daß jeder Punkt A_β mit einem Punkte B_β zusammenfällt, und umgekehrt.

Also:

Satz 7. *Ist eine Schar von ∞^1 Kurven Γ_0 in der Ebene gegeben und ist (P_0, p_0) irgend ein Linienelement einer dieser Kurven, so gibt es ∞^1 solche Isogonalkurven der Kurven Γ_0 , die durch P_0 gehen, und ∞^1 solche Äquitangentialkurven der Kurven Γ_0 , die p_0 berühren. Die Krümmungskreise*

der ersteren ∞^1 Kurven für P_0 haben ihre Mittelpunkte auf einer Geraden. Auf derselben Geraden liegen die Krümmungsmittelpunkte der letzteren ∞^1 Kurven für ihre Berührungspunkte mit p_0 .

Wir können also kurz von der Geraden der zu einem Punkte P_0 bez. einer Geraden p_0 gehörigen Krümmungsmittelpunkte sprechen. Diese Gerade sei mit p'_0 bezeichnet. Einem anderen Elemente (Q_0, q_0) ge-

hört natürlich im allgemeinen eine andere Gerade q'_0 zu. Zum Überfluß sei noch daran erinnert, daß die Elemente, von denen hier die Rede ist, nicht alle Linienelemente der Ebene sind, sondern nur die ursprünglich

Fig. 6.

*) Dieser erste Satz findet sich schon bei E. Cesàro, „Lezioni di geometria intrinseca“, Neapel 1896, siehe die deutsche Ausgabe: „Vorlesungen über natürliche Geometrie“, besorgt von G. Kowalewski, Leipzig 1901, S. 148.

ausgewählten ∞^2 Linienelemente, die durch die ∞^1 Kurven Γ_0 (oder A_0 oder B_0) gegeben waren.

Wenn wir schließlich in Satz 5a und 5b den Winkel $\alpha + \beta$ und die Strecke $a + b$ mit α bez. a bezeichnen, so können wir jene Sätze so formulieren (vgl. Fig. 6):

Satz 8a. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_\alpha$, die jeden Punkt P_0 in eine Gerade p_α durch ihn überführt, die aus p_0 durch Drehung um P_0 um den Winkel α hervorgegangen ist, führt das Element (P_0, p_β) über in dasjenige Element, dessen Gerade p_α ist und dessen Punkt sich ergibt, wenn man in P_0 das Lot auf p_β errichtet, es in A_β mit der (p_0, P_0) zugeordneten Geraden p_0' zum Schnitte bringt und schließlich von A_β das Lot auf p_α fällt. Der Fußpunkt dieses Lotes ist der Punkt des transformierten Elementes.*

Satz 8b. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_a$, die jede Gerade p_0 in einen Punkt P_a auf ihr überführt, der aus P_0 durch Verschiebung um die Strecke a längs p_0 hervorgegangen ist, führt das Element (p_0, P_b) über in dasjenige Element, dessen Punkt P_a ist und dessen Gerade sich ergibt, wenn man in P_b das Lot auf p_0 errichtet, es in B_b mit der (p_0, P_0) zugeordneten Geraden p_0' zum Schnitte bringt und B_b mit P_a verbindet. Das Lot zu $B_b P_a$ durch P_a ist die Gerade des transformierten Elementes.*

§ 2.

Neue charakteristische Eigenschaften der Isogonalkurven und Äquitangentialkurven.

Um die Scharen von Isogonalkurven und von Äquitangentialkurven zu definieren, gingen wir von einer Schar von ∞^1 Kurven Γ_0 aus. Die Isogonalkurven A_α waren diejenigen ∞^1 Kurven, die alle Kurven Γ_0 unter dem Winkel α durchsetzen; die Äquitangentialkurven B_a waren diejenigen ∞^1 Kurven, die mit allen Kurven Γ_0 gemeinsame Tangenten von der Länge a , gerechnet von Berührungspunkt zu Berührungspunkt, haben. Es ergeben sich, wenn α variiert, insgesamt ∞^2 Isogonalkurven, und ebenso, wenn a variiert, insgesamt ∞^2 Äquitangentialkurven. Jene Schar von ∞^2 Isogonalkurven besteht also aus ∞^1 Scharen von je ∞^1 Kurven A_α , wobei jede Schar von ∞^1 Kurven durch einen bestimmten Wert des Winkels α charakterisiert ist. Nun leuchtet ein, daß wir zu genau derselben Schar von ∞^2 Isogonalkurven gelangt wären, wenn wir, statt von den ∞^1 Kurven Γ_0 , von ∞^1 Kurven A_α , die zu einem bestimmten Werte von α gehören, unseren Ausgang genommen hätten. Die Kurven Γ_0 sind ja auch nichts anderes als die Kurven A_0 . Die Definition der Isogonalkurven, bei der man von ∞^1 Kurven ausgeht, läßt also noch zu wünschen

übrig, weil bei ihr eine bestimmte in der Schar dieser Kurven enthaltene Schar von ∞^1 Kurven ausgezeichnet wird, die vor den anderen ∞^1 Scharen von je ∞^1 Kurven A_α im Grunde nichts voraus hat. Eine ganz analoge Überlegung zeigt, daß die Definition der Äquitangentialkurven an demselben Mangel leidet. Die folgenden Überlegungen führen nun zu einer neuen Charakterisierung beider Arten von Kurvenscharen, die diesen Mangel nicht hat.

Wir wissen, daß wir die Isogonalkurven auch dadurch erhalten können, daß wir statt von der Schar der ∞^1 Kurven Γ_0 von irgend einer Schar von ∞^1 Kurven A_α , die also die Γ_0 unter dem Winkel α durchsetzen, ausgehen können. Es seien also A_β und A_γ zwei Kurven, von denen jede die ∞^1 Kurven A_α unter einem bestimmten Winkel durchsetzt. (Siehe Fig. 7a.) Auch mögen A_β und A_γ

Fig. 7a.

von einem Punkte P_0 ausgehen. Alsdann bestimmen A_β und A_γ mit einer nicht durch P_0 gehenden Kurve A_α ein *Dreieck*, das drei *Punkte*, nämlich die Schnittpunkte von je zweien der drei Kurven, zu Ecken hat, während die Verbindungsstücke krummlinig sind. Da nun A_β und A_γ alle Kurven A_α unter je einem konstanten Winkel schneiden, so

Wir wissen, daß wir die Äquitangentialkurven auch dadurch erhalten können, daß wir statt von der Schar der ∞^1 Kurven Γ_0 von irgend einer Schar von ∞^1 Kurven B_α , die also mit den Γ_0 die konstante gemeinsame Tangentenlänge a haben, ausgehen können. Es seien also B_b und B_c zwei Kurven, von denen jede mit allen ∞^1 Kurven B_α eine konstante Tangentenlänge gemein hat. (Siehe Fig. 7b.) Auch

Fig. 7b.

mögen B_a und B_b die Gerade p_0 berühren. Alsdann bestimmen B_b und B_c mit einer p_0 nicht berührenden Kurve B_a ein *Dreieck*, das drei geradlinige Strecken zu *Seiten* hat, nämlich die gemeinsamen Tangenten von je zweien der drei Kurven, während die Verbindungsstücke krummlinig sind. Da nun B_b und B_c mit allen Kurven B_α Tangenten von je

treten die drei Winkel des Dreiecks sämtlich auch in P_0 auf, und man erkennt, daß *die Summe der Winkel des Dreiecks gleich π ist.*

Satz 9a. *Die Winkelsumme in einem von drei Isogonalkurven gebildeten Dreieck ist gleich π :*

Eine Schar von ∞^2 Isogonalkurven hat also nach Satz 9a eine Eigenschaft, die insbesondere der Schar aller ∞^2 Geraden der Ebene zukommt. In der Tat bilden aber auch alle Geraden der Ebene eine Schar von Isogonalkurven, wie man sofort sieht, wenn man von einer Schar von ∞^1 parallelen Geraden ausgeht und ihre Isogonalkurven sucht. Da eine Transformation durch reziproke Radien die Geraden in alle Kreise durch einen Punkt verwandelt und außerdem gleiche Winkel in gleiche Winkel überführt, so sieht man, daß *auch alle Kreise durch einen festen Punkt eine Schar von ∞^2 Isogonalkurven bilden.* Andererseits können wir ein Analogon hierzu für die Äquitangentialkurven konstruieren. Denn *alle ∞^2 Kreise, die eine feste Gerade berühren, bilden eine Schar von Äquitangentialkurven.* In der Tat, wenn man von diesen Kreisen zunächst diejenigen ∞^1 konstruiert, die sämtlich die feste Gerade an derselben Stelle berühren, so erkennt man sofort, daß ein anderer Kreis, der die feste Gerade berührt, mit allen diesen ∞^1 Kreisen gleichlange Tangenten gemein hat, da die Tangentenstücke gerade so lang sind, wie die auf der festen Geraden gemessenen Tangentenstücke. Man verifiziert nun für alle ∞^2 die Gerade berührenden Kreise sofort den Satz 9b, sobald man nur der Geraden einen bestimmten Fortschreitungsinn gibt und den Fortschreitungsinn auf den Kreisen, die die Gerade berühren, so wählt, daß er an den Berührungsstellen mit dem der Geraden übereinstimmt. Dabei ist es gleichgültig, auf welcher Seite der Geraden die Kreise liegen.

Es ist sehr bemerkenswert, daß man die in den Sätzen 9a und 9b ausgesprochenen Eigenschaften umgekehrt zur Definition der Scharen von Isogonalkurven bez. Äquitangentialkurven benutzen kann.

Liegt nämlich eine Schar von ∞^2 Kurven vor, die so beschaffen ist, daß jedes von drei Kurven der Schar gebildete Dreieck die Winkel-

weils konstanter Länge gemein haben, so treten die drei geradlinigen Seiten des Dreiecks sämtlich bei p_0 auf, und man erkennt, daß *die Summe der Seiten des Dreiecks gleich Null* ist, vorausgesetzt, daß man das Dreieck in einem Sinne umläuft und dabei Seiten in diesem Sinne addiert, in entgegengesetztem Sinne subtrahiert.

Satz 9b. *Die Seitensumme eines von drei Äquitangentialkurven gebildeten Dreiecks ist gleich Null.*

Liegt nämlich eine Schar von ∞^2 Kurven vor, die so beschaffen ist, daß jedes von drei Kurven der Schar gebildete Dreieck bei ge-

summe π hat, so wähle man irgend eine Kurve A_0 der Schar aus und greife alsdann diejenigen ∞^1 Kurven der Schar heraus, die A_0 unter einem und demselben irgendwie bestimmten Winkel α schneiden. Sie seien mit A_α bezeichnet. Ist ferner A_β irgend eine andere Kurve der Schar, die mit der Kurve A_0 den Winkel β bildet, so muß nach Voraussetzung in jedem der Dreiecke, die von A_0 , von einer Kurve A_α und von A_β gebildet werden, die Winkelsumme gleich π sein. Daraus folgt aber sofort, daß A_β alle Kurven A_α unter demselben Winkel durchsetzt, d. h. alle Kurven der Schar von ∞^2 Kurven schneiden die ∞^1 Kurven A_α unter konstanten Winkeln.

Satz 10a. Hat eine Schar von ∞^2 Kurven in der Ebene die Eigenschaft, daß in jedem von drei Kurven der Schar gebildeten Dreiecke die Winkelsumme gleich π ist, so ist die Schar eine Schar von ∞^2 Isogonalkurven.

Hiermit haben wir Eigenschaften von Isogonalkurvenscharen und von Äquitangentialkurvenscharen gefunden, die man zur Definition dieser Scharen benutzen kann. Geht man von diesen Definitionen aus, so ist keine in der Gesamtschar enthaltene Schar von ∞^1 Kurven ohne Grund ausgezeichnet, wie es bei den ursprünglichen Definitionen der Fall war.

höriger Beachtung des Fortschreitungs-sinnes der Kurven die Seiten-summe Null hat, so wähle man irgend eine Kurve B_0 der Schar aus und greife alsdann diejenigen ∞^1 Kurven der Schar heraus, die mit B_0 gemeinsame Tangenten von derselben bestimmten Länge a haben. Sie seien mit B_a bezeichnet. Ist ferner B_b irgend eine andere Kurve der Schar, die mit der Kurve B_0 eine Tangente von der Länge b gemein hat, so muß nach Voraussetzung in jedem der Dreiseite, die von B_0 , von einer Kurve B_a und von B_b gebildet werden, die Summe der geradlinigen Seiten gleich Null sein. Daraus folgt sofort, daß B_b mit allen Kurven B_a gemeinsame Tangenten von derselben Länge hat, d. h. alle Kurven der Schar von ∞^2 Kurven verlaufen so, daß jede von ihnen mit allen ∞^1 Kurven B_a Tangenten von gleicher Länge hat.

Satz 10b. Hat eine Schar von ∞^2 Kurven in der Ebene die Eigenschaft, daß in jedem von drei Kurven der Schar gebildeten Dreiseit die Summe der drei geradlinigen Seiten gleich Null ist, vorausgesetzt, daß man die Kurven mit Fortschreitungs-sinnen belegt hat und diese für die gemeinsamen Tangenten berücksichtigt, so ist die Schar eine Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven.

§ 3.

Evolutoiden und Tangentialen, sowie Beispiele von Isogonal- und Äquitangentialkurven.

Man hat den Begriff der Evolute, als Eingehüllter der Normalen einer Kurve, dadurch verallgemeinert, daß man die Normalen durch diejenigen Geraden ersetzt hat, die die gegebene Kurve unter irgend einem konstanten Winkel schneiden. Diese Kurven, die man *Evolutoiden* genannt hat*), treten bei der Fortsetzung der Betrachtung unserer Berührungstransformationen auf, und wir werden einem allerdings schon bekannten Satze über solche Kurven begegnen. Diesen Kurven steht nun eine zweite Art von Kurven gegenüber: Tragen wir nämlich auf allen Tangenten einer gegebenen Kurve eine konstante Strecke vom jeweiligen Berührungspunkte auf, so ist der Ort der Endpunkte eine neue Kurve, die wir eine *Tangentiale**)* der gegebenen Kurve nennen wollen.

Jede Kurve Γ_0 hat ∞^1 Evolutoiden und ∞^1 Tangentialen. (Siehe Fig. 8.) Hat die Kurve Γ_0 einen bestimmten Fortschreitungsinn und haben wir in der Ebene einen bestimmten Drehsinn festgesetzt, so gehört zu jedem Winkel α eine bestimmte Evolutoide von Γ_0 und zu jeder Strecke a eine bestimmte Tangentiale von Γ_0 . Die Evolutoide nämlich, die wir die *Evolutoide* (α) von Γ_0 nennen, ist die Eingehüllte derjenigen Geraden, die aus den Tangenten von Γ_0 hervorgehen, wenn man sie um ihre Berührungspunkte um den Winkel α im festgesetzten Sinne

Fig. 8.

dreht. Insbesondere ist die Evolutoide $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ die Evolute von Γ_0 . Die Tangentiale ferner, die wir die *Tangentiale* (a) von Γ_0 nennen, ist der

*) Vgl. Loria a. a. O., S. 626 u. f., wonach Réaumur und Lancret für den Ursprung des Begriffs der Evolutoiden in Betracht kommen.

**) Dies sind die von Brocard als Äquitangentialkurven bezeichneten Kurven, vgl. die Anm. zu S. 496. Sie wurden u. a. von Aoust in seiner „Analyse infinitésimale des courbes planes“, Paris 1873, S. 107 u. f. genauer untersucht.

Ort derjenigen Punkte, die sich ergeben, wenn wir jeden Punkt von Γ_0 auf seiner Tangente in dem festgesetzten Sinne um die Strecke a verschieben.

Die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_a$ führt jeden Punkt P_0 in die zugeordnete gedrehte Gerade p_a über. Also:

Satz 11a. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_a$ führt die ∞^1 Kurven Γ_0 in ihre Evolutoiden (a) über.*

Nach Satz 8a, worin wir $\beta = 0$ setzen und worin A_β den zu P_0 gehörigen Krümmungsmittelpunkt von A_β bedeutete, geht das Element (P_0, p_0) vermöge $\mathfrak{A}_a$ in dasjenige Element über, dessen Gerade p_a ist und dessen Punkt der Fußpunkt des Lotes ist, das man von A_0 auf p_a fallen kann. A_0 ist dabei der zu dem Element (P_0, p_0) gehörige Krümmungsmittelpunkt von Γ_0 .

Satz 12a. *Der Punkt, in dem die unter dem Winkel α zur Tangente einer Kurve Γ_0 geneigte Gerade p_a die Evolutoide (a) von Γ_0 berührt, ist der Fußpunkt des Lotes vom Krümmungsmittelpunkt A_0 des Punktes P_0 von Γ_0 auf die Gerade p_a . (Siehe Fig. 8.)*

Wir können diese Sätze auch so aussprechen:

Satz 13a. *Die einem Punkte P_0 einer Kurve Γ_0 entsprechenden ∞^1 Punkte aller ∞^1 Evolutoiden von Γ_0 liegen auf demjenigen Kreis, der den Krümmungsradius des Punktes P_0 von Γ_0 zum Durchmesser hat.*

Diese Sätze sind längst bekannt.*)

Die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_a$ führt jede Gerade p_0 in den zugeordneten verschobenen Punkt P_a über. Also:

Satz 11b. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_a$ führt die ∞^1 Kurven Γ_0 in ihre Tangentialen (a) über.*

Nach Satz 8b, worin wir $b = 0$ setzen und worin B_b den zu p_0 gehörigen Krümmungsmittelpunkt von B_b bedeutete, geht das Element (p_0, P_0) vermöge $\mathfrak{B}_a$ in dasjenige Element über, dessen Punkt P_a ist und dessen Gerade in P_a auf der Verbindungsline von P_a mit B_0 senkrecht steht. B_0 ist dabei der zu dem Element (p_0, P_0) gehörige Krümmungsmittelpunkt von Γ_0 .

Satz 12b. *Die Tangente, die die Tangentiale (a) einer Kurve Γ_0 in demjenigen Punkte P_a hat, der aus einem Punkte P_0 von Γ_0 durch Verschieben um die Strecke a längs der Tangente von P_0 hervorgeht, ist senkrecht zur Verbindenden von P_a mit dem Krümmungsmittelpunkt B_0 von Γ_0 in P_0 . (Siehe Fig. 8.)*

Satz 13b. *Die einer Tangente p_0 einer Kurve Γ_0 entsprechenden ∞^1 Tangenten aller ∞^1 Tangentialen von Γ_0 berühren diejenige Parabel, die p_0 zur Scheiteltangente und den zu p_0 gehörigen Krümmungsmittelpunkt von Γ_0 zum Brennpunkt hat.*

*) Der erste Satz rührt von Réaumur her, vgl. Loria a. a. O., S. 628. Der zweite Satz findet sich bei Loria S. 567.

Wir fügen zwei Sätze an, deren Richtigkeit sofort einleuchtet:

Satz 14a. *Jede Kurve kann aufgefaßt werden als Isogonalkurve der Tangenten einer ihrer Evolutoiden.*

Satz 14b. *Jede Kurve kann aufgefaßt werden als Äquitangentialkurve der Punkte einer ihrer Tangentialen.*

Hier ist höchstens beim zweiten Satze daran zu erinnern, daß Punkte als Elementvereine Spezialfälle von Kurven sind. Liegen ∞^1 Punkte, also die einer Kurve, vor, so sind ihre Äquitangentialkurven diejenigen Kurven, deren Tangenten, gemessen von den Berührungspunkten bis zum *Schnitt* mit jener Kurve, konstante Längen haben.

Diese Sätze führen uns dazu, uns überhaupt etwas eingehender mit den Isogonalkurven von ∞^1 Geraden und mit den Äquitangentialkurven von ∞^1 Punkten zu beschäftigen. Wir wollen also die Fälle betrachten, wo die ∞^1 gegebenen Kurven Γ_0 lauter Geraden*) oder lauter Punkte sind. Hier liegt insofern eine Ausnahme vor, als wir früher (S. 494) vorausgesetzt haben, daß jeder Punkt der Ebene einer Kurve Γ_0 angehöre und jede Gerade der Ebene eine Kurve Γ_0 berühre. Wenn die Kurven Γ_0 ∞^1 Gerade sind, so haben sie aber doch augenscheinlich Isogonalkurven, während der Begriff der Äquitangentialkurven hier versagt, und wenn die Kurven Γ_0 ∞^1 Punkte sind, so haben sie, wie wir vorhin bemerkten, Äquitangentialkurven, während hier der Begriff der Isogonalkurven versagt.

In der Tat läßt sich in jedem dieser beiden Ausnahmefälle doch eine unserer beiden Betrachtungsreihen, im ersten Falle die an die $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_a, \dots$ anknüpfende, im zweiten Falle die an die $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_a, \dots$ anknüpfende aufrecht erhalten.

Denn wenn alle Kurven Γ_0 ∞^1 Geraden, also die Tangenten einer Kurve Δ sind, wo sich Δ auch auf einen Punkt reduzieren kann, so ist jedem Punkte P_0 die von ihm ausgehende Tangente p_0 an Δ zugeordnet. Den ∞^2 Punkten P_0 entsprechen also nur ∞^1 Geraden p_0 , d. h. die Berührungstransformation $\mathcal{A}_0$ ist ausgeartet. Aber nicht so die übrigen Berührungstransformationen $\mathcal{A}_a$. Denn wenn wir jede von einem beliebigen

Denn wenn alle Kurven Γ_0 ∞^1 Punkte, also die Punkte einer Kurve Δ sind, wo sich Δ auch auf eine Gerade reduzieren kann, so ist jeder Geraden p_0 ihr Schnittpunkt P_0 mit Δ zugeordnet. Den ∞^2 Geraden p_0 entsprechen also nur ∞^1 Punkte P_0 , d. h. die Berührungstransformation $\mathcal{B}_0$ ist ausgeartet. Aber nicht so die übrigen Berührungstransformationen $\mathcal{B}_a$. Denn wenn wir jeden Schnittpunkt einer beliebigen Geraden p_0

*) Die Isogonalkurven von ∞^1 Geraden hat u. a. O. Böklen („Über die Linien, welche die Tangenten einer Kurve unter konstantem Winkel schneiden“) in Grunerts Archiv (1), 43. Teil, 1865, S. 14—16, untersucht.

Punkte P_0 nach Δ gehende Tangente um denselben Winkel α drehen, so gehen doch wieder ∞^2 Geraden p_α hervor, es sei denn, daß alle jene ∞^1 Geraden p_0 einander parallel sind, in welchem Falle nur die *triviale Schar von Isogonalkurven*, die aus allen Geraden der Ebene besteht, hervorgeht. Wenn wir — abgesehen von dieser letzten Ausnahme — statt von $\mathcal{U}_0$ von $\mathcal{U}_\alpha$ ausgehen, so können wir unsere früheren Betrachtungen, die zu Satz 7 führten, aufrecht erhalten, soweit sie sich auf Isogonalkurven beziehen.

Es folgt also (siehe Fig. 9a): Legt man durch einen Punkt P_0 alle

Fig. 9a.

Kurven, die die Tangenten einer gegebenen Kurve Δ unter konstanten Winkeln schneiden, so haben diese Kurven in P_0 solche Krümmungskreise, deren Mitten auf einer Geraden liegen. Diese Gerade ist, wie man leicht sieht, diejenige Normale von Δ , die zu dem Berührungspunkt der von P_0 an Δ gehenden Tangente gehört*).

mit Δ auf der Geraden um dieselbe Strecke a verschieben, so gehen doch wieder ∞^2 Punkte P_α hervor, es sei denn, daß alle Punkte der Kurve Δ unendlich fern liegen, in welchem Falle nur die *triviale Schar von Äquitangentialkurven*, die aus allen Punkten der Ebene besteht, hervorgeht. Wenn wir — abgesehen von dieser letzten Ausnahme — statt von $\mathcal{B}_0$ von $\mathcal{B}_\alpha$ ausgehen, so können wir unsere früheren Betrachtungen, die zu Satz 7 führten, aufrecht erhalten, soweit sie sich auf Äquitangentialkurven beziehen.

Es folgt also (siehe Fig. 9b): Zieht man alle diejenigen Kurven, die eine Gerade p_0 berühren und deren

Fig. 9b.

Tangenten, gemessen bis zu ihren Schnittpunkten mit einer gegebenen Kurve Δ , konstante Längen haben, so haben diese Kurven in ihren Berührungspunkten mit p_0 solche Krümmungskreise, deren Mitten auf einer Geraden liegen. Diese Gerade ist, wie man leicht erkennt, diejenige Normale von Δ , die zu dem Schnittpunkt von Δ mit p_0 gehört.

*) Dieser Satz findet sich bei Böklen a. a. O. 1865.

Die in dem rechts stehenden Satze erwähnten Kurven, nämlich die Äquitangentialkurven, die sich ergeben, wenn sich die ∞^1 Kurven Γ_0 auf die Punkte einer Kurve Δ reduzieren, kann man die *Traktrizen der Basis Δ* nennen*). Beschreibt nämlich ein Punkt die Kurve Δ und schleppt er einen beliebig angenommenen Punkt mittels eines Fadens von konstanter Länge, so beschreibt der geschleppte Punkt eine dieser ∞^2 Äquitangentialkurven. Man kann diese ∞^2 Kurven auch als die *Gesamtheit derjenigen Kurven, die die gegebene Kurve Δ als Tangentiale haben*, bezeichnen. Ebenso kann die Schar aller ∞^2 Isogonalkurven der Tangenten von Δ aufgefaßt werden als die *Gesamtheit derjenigen Kurven, die die gegebene Kurve Δ als Evolutoide haben*. Es ist von Interesse zu bemerken, daß die rechts untersuchten Äquitangentialkurven zwar nicht in ihrer Gesamtheit, aber in Scharen von je ∞^1 Individuen auch als Isogonalkurven aufgefaßt werden können. Schlägt man nämlich um alle Punkte von Δ Kreise von gleichen Radien, so gehören zu diesen ∞^1 Kreisen ∞^2 Isogonalkurven. Darunter sind ∞^1 Orthogonalkurven enthalten. Die Tangenten dieser ∞^1 *orthogonalen Trajektorien der Kreise* sind, gemessen bis zu ihren Schnittpunkten mit Δ , gleich dem Kreisradius, also gehören sie in der Tat zu jenen Äquitangentialkurven. So ist z. B. jede *gewöhnliche Traktrix* einerseits Äquitangentialkurve aller Punkte ihrer geradlinigen Basis und andererseits Isogonalkurve, insbesondere Orthogonalkurve, von ∞^1 kongruenten Kreisen, deren Mitten die Punkte der Geraden sind.

Dies führt uns dazu, die Kurven zu betrachten, die sich ergeben, wenn wir als Kurven Γ_0 ∞^1 kongruente Kreise annehmen. Die Mitten dieser Kreise mögen eine Kurve Δ bilden. Der Kreisradius sei gleich r .

Es sei P_0 ein beliebiger Punkt (siehe Fig. 10a). Alsdann ist die zugehörige Gerade p_0 die Tangente des durch P_0 gehenden Kreises Γ_0 . Die Isogonalkurve A_α , die durch P_0 geht, hat dort die aus p_0 durch Drehung um α hervorgehende Gerade p_α zur Tangente. Das Lot von der Kreismitte M auf p_α hat die Länge $r \cos \alpha$. Schlagen wir mit

Es sei p_0 eine beliebige Gerade (siehe Fig. 10b). Alsdann ist der zugehörige Punkt P_0 der Punkt, in dem p_0 von einem der ∞^1 Kreise Γ_0 berührt wird. Die Äquitangentialkurve B_α , die p_0 berührt, hat ihren Berührungspunkt an der Stelle P_α , die durch Verschiebung von P_0 längs p_0 um die Strecke a hervorgeht. P_α hat von der Kreismitte M

*) Nach Loria, a. a. O., S. 366 u. f., haben sich A. Poulain („Les aires des tractrices et le stang-planimètre“, Journal de Math. spéc. (4) 4, 1895), Brocard („Notes de bibliographie des courbes géométriques, partie complémentaire“, Bar-le-Duc 1899, S. 58) und Bourlet („Nouveau traité des bicycles et des bicyclettes“, 2. Aufl., Paris 1898) mit diesen Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Traktrix beschäftigt.

Natürlich gelten für die betrachteten Kurven die Sätze 6a und 6b, die zur Konstruktion ihrer Krümmungskreise dienen. Um nicht zu weit zu gehen, verzichten wir auf die Darstellung der Anwendung dieser Sätze auf die jetzt vorliegenden Kurven.

Gehen wir jetzt zu dem Fall über, daß die gegebene Schar von ∞^1 Kurven Γ_0 aus allen Kreisen mit dem Mittelpunkt O besteht.

In diesem Fall sind die Isogonalkurven solche Kurven, die auch alle Radien, d. h. alle von O ausgehenden Geraden unter konstanten Winkeln schneiden. Wir kommen also zu einem Spezialfall einer früheren Betrachtung. Die Isogonalkurven sind hier alle ∞^2 logarithmischen Spiralen mit demselben asymptotischen Punkte O .

Die Äquitangentialkurven B_α haben augenscheinlich Normalen, die den Kreis um O mit dem Radius a berühren. Also kommen wir hier zu allen ∞^2 Kreisevolventen, die zu allen konzentrischen Kreisen um O gehören.

Die Sätze 6a und 6b sind in diesen Fällen leicht zu verifizieren.

Nehmen wir schließlich an, daß die ∞^1 gegebenen Kurven Γ_0 einander sämtlich kongruent seien und durch Drehung um einen festen Punkt O in einander übergehen.

Zu den Isogonalkurven gehören hier alle Kreise mit der Mitte O . Da die Kurven Γ_0 selbst zu den Isogonalkurven gehören, so folgt aus Satz 6a: Um den Krümmungskreis eines Punktes P_0 einer Isogonalkurve zu finden, verbinden wir O mit dem Krümmungsmittelpunkt A_0 der durch P_0 gehenden Kurve Γ_0 . Auf dieser Verbindenden liegt der gesuchte Punkt, natürlich auf der Normalen der Isogonalkurve.

Zu den Äquitangentialkurven gehören hier alle Kreise mit der Mitte O . Da die Kurven Γ_0 selbst zu den Äquitangentialkurven gehören, so folgt aus Satz 6b: Um den Krümmungskreis eines Punktes einer Äquitangentialkurve zu finden, verbinden wir O mit dem Krümmungsmittelpunkte B_0 derjenigen Kurve Γ_0 , die dieselbe Tangente p_0 wie die Äquitangentialkurve berührt. Auf dieser Verbindenden liegt der gesuchte Punkt, natürlich auf der Normalen der Äquitangentialkurve.

Die Betrachtung rechts wollen wir noch ein wenig weiter führen in dem speziellen Fall, daß eine der Kurven Γ_0 die Eigenschaft hat, daß ihre Tangente p_0 mit dem Strahl von O nach dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkt einen konstanten Winkel bildet. Dann hat nämlich jede der ∞^1 Kurven Γ_0 dieselbe Eigenschaft, da sie durch Rotation um O aus der einen hervorgehen, und unsere Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes zeigt, daß dasselbe auch für alle Äquitangentialkurven gilt. Also: alle

diejenigen ∞^2 Kurven, deren Tangenten mit den Strahlen von einem festen Punkte O nach den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten einen und denselben Winkel bilden, machen eine Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven aus. Die Evolventen solcher Kurven aber bilden mit ihren Radienvektoren konstante Winkel, sind also logarithmische Spiralen um O von derselben Steigung. Daher folgt: *Alle ∞^2 Evolventen aller ∞^1 logarithmischen Spiralen mit demselben asymptotischen Punkt und derselben Steigung bilden eine Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven.* Übrigens gehören zu diesen Kurven die konzentrischen Kreise um O , wie wir vorhin sahen. Man hat also die Kreise um O auch als Evolventen der logarithmischen Spiralen aufzufassen. Diese Auffassung läßt sich auch analytisch rechtfertigen, worauf wir hier nicht eingehen.

Wir erwähnen noch, daß sich die Zahl der Beispiele leicht vermehren ließe, und daß wir es zuweilen unterlassen haben, *alle* Folgerungen aus den allgemeinen Sätzen der vorhergehenden Paragraphen für die behandelten Beispiele zu ziehen, um nicht zu ausführlich zu werden. Unsere allgemeinen Sätze sind eine Fundgrube für einzelne Sätze über spezielle Kurven, so auch die im nächsten Paragraphen zu gebenden Sätze.

§ 4.

Eine Zuordnung zwischen zwei Scharen von Isogonal- bez. Äquitangentialkurven.

In § 1 gingen wir von der Annahme aus, es sei uns eine stetige Schar von ∞^2 Linienelementen (P_0, p_0) in der Ebene gegeben. Diese Schar gehörte ∞^1 Kurven Γ_0 an, und wir betrachteten die ∞^2 Isogonalkurven dieser Schar und zugleich ihre ∞^2 Äquitangentialkurven. Es ergab sich dabei, daß diejenigen ∞^1 Isogonalkurven, die einen Punkt P_0 gemein haben, für diesen Punkt solche Krümmungsmittelpunkte haben, die auf einer Geraden liegen (Cesàroscher Satz), und daß diejenigen ∞^1 Äquitangentialkurven, die eine Gerade p_0 berühren, für ihre Berührungspunkte solche Krümmungsmittelpunkte haben, die ebenfalls auf einer Geraden liegen. Dabei sind beide Orte von Mittelpunkten miteinander identisch, wenn P_0 und p_0 zusammen eines der Linienelemente der vorgelegten Schar bilden.

Wir können also sagen, daß jedem der vorgelegten ∞^2 Linienelemente (P_0, p_0) eine gewisse Gerade — die wir p_0' nannten — zugeordnet ist. Wie diese Gerade zu konstruieren ist, ist zwar aus den Betrachtungen des § 1 zu entnehmen, möge aber zur besseren Verdeutlichung des folgenden nochmals etwa aus dem Satze 8a des § 1 abgeleitet werden:

Um die dem Elemente (P_0, p_0) zugeordnete Gerade p_0' punktweise

zu konstruieren, wählen wir irgend ein diesem Elemente unendlich benachbartes Element (Q_0, q_0) der gegebenen Schar aus (siehe Fig. 11). Die von P_0 ausgehende Gerade $P_0 Q_0$ ist eine der mit p_β bezeichneten Geraden des Punktes P_0 . Bei der Berührungstransformation $\mathfrak{H}_0$ geht P_0 in p_0 und Q_0 in q_0 über, d. h. das durch P_0 und Q_0 bestimmte Element (P_0, p_β) in das Element, dessen Punkt der Schnittpunkt von p_0 und q_0 und dessen Gerade p_0 ist. Nach Satz 8a liegt daher der damals mit A_β bezeichnete Punkt einerseits auf dem Lote, das in P_0 auf $P_0 Q_0$ senkrecht steht, andererseits auf dem Lote, das im Schnittpunkt von p_0 und q_0 auf p_0 senkrecht steht. A_β aber ist ein Punkt der fraglichen Geraden p'_0 . Wir formulieren daher der bequemerer Verweisung halber noch den

Fig. 11.

Satz 15. *Ist eine Schar von ∞^2 Linienelementen (P_0, p_0) in der Ebene gegeben, so erhält man Punkte derjenigen Geraden p'_0 , die nach § 1 einem Elemente (P_0, p_0) der Schar zugeordnet ist, auf folgende Weise: Man wählt ein dem Elemente (P_0, p_0) unendlich benachbartes Element (Q_0, q_0) der Schar und konstruiert einerseits das Lot zu $P_0 Q_0$ durch P_0 und andererseits das Lot zu p_0 im Schnittpunkt von p_0 und q_0 . Beide Lote treffen sich in einem Punkte A von p'_0 .*

Hieraus folgt übrigens, daß $\angle P_0 A Q_0$ gleich dem unendlich kleinen Winkel ist, den p_0 und q_0 miteinander bilden.

Diese im Grunde genommen schon in § 1 enthaltenen Ergebnisse werden wir bald weiter verwenden. —

Aus der gegebenen Schar von ∞^2 Linienelementen (P_0, p_0) leiten wir jetzt durch eine einfache Konstruktion eine neue Schar von ∞^2 Linienelementen ab. Wir spiegeln nämlich jedes Element (P_0, p_0) an der zugeordneten Geraden p'_0 . Dadurch geht jedes Element (P_0, p_0) in ein neues über, das zum Unterschied mit $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ bezeichnet sei (siehe Fig. 12).

Dies Verfahren ist wohlbemerkt keine Spiegelung der ganzen Ebene an ein und derselben Geraden, vielmehr ist die Spiegelgerade p'_0 von Element zu Element eine andere.

Wir gelangen auf diesem Wege zu einer neuen Schar von ∞^2 Linienelementen $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ der Ebene und wollen die innigen Beziehungen, die zwischen dieser und der ursprünglichen Schar bestehen, genauer untersuchen.

Zunächst können wir für die neue Schar von ∞^2 Elementen $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ genau dieselben Betrachtungen anstellen wie für die alte Schar, d. h. wir

in $\bar{P}_0$ und ein zweiter Punkt Q_0 an q_0' in $\bar{Q}_0$ gespiegelt, so werde ein Kreis durch $\bar{P}_0$ und $\bar{Q}_0$ betrachtet. Zu jedem Punkte X des Kreises gehört ein Winkel $P_0 X Q_0$, der als Peripheriewinkel eine konstante Größe ε hat. Bei der Spiegelung der Sehne XP_0 an p_0' und der Sehne XQ_0 an q_0' gehen zwei Geraden durch $\bar{P}_0$ und $\bar{Q}_0$ hervor. Wir behaupten, daß der Ort ihrer Schnittpunkte Y wieder ein Kreis ist. In der Tat, ist δ der Winkel der Spiegelgeraden, so bilden die aus XP_0 durch Spiegelung an p_0' und die aus XQ_0 durch Spiegelung an q_0' hervorgehenden Geraden in ihrem Schnittpunkt den ebenfalls konstanten Winkel $\varepsilon + 2\delta$. Also ist der Ort von Y ein Kreis durch $\bar{P}_0$ und $\bar{Q}_0$. Wenn der erste Kreis insbesondere durch den Fußpunkt F des Lotes von P_0 auf p_0' geht (siehe Fig. 14), so geht der neue Kreis durch den Schnittpunkt von $P_0 \bar{P}_0$ mit derjenigen Geraden, die $\bar{Q}_0$ mit dem Spiegelpunkt G von F hinsichtlich q_0' verbindet. Ist der Winkel von p_0' und q_0' unendlich klein, so weicht G um unendlich wenig von höherer Ordnung von der Geraden $P_0 \bar{P}_0$ ab, d. h. dann geht der neue Kreis auch durch F selbst.

Fig. 14.

Dies werden wir sogleich anwenden. Um die oben aufgestellte Behauptung zu beweisen, betrachten wir (siehe Fig. 15) außer dem Elemente (P_0, p_0) der ursprünglichen Schar ein dazu unendlich benachbartes Element (Q_0, q_0) derselben Schar. Es seien p_0' und q_0' die zugeordneten Geraden (Spiegelachsen). Nach Satz 15 trifft das Lot zu $P_0 Q_0$

Fig. 15.

Es seien p_0' und q_0' die zugeordneten Geraden (Spiegelachsen). Nach Satz 15 trifft das Lot zu $P_0 Q_0$

durch P_0 die Gerade p_0' in demselben Punkte A wie das Lot zu p_0 durch den Schnittpunkt von p_0 und q_0 . Außerdem ist der Winkel $P_0 A Q_0$ nach der zu Satz 15 hinzugefügten Bemerkung gleich dem unendlich kleinen Winkel ε von p_0 und q_0 . Daher liegen P_0 , Q_0 , A und der Schnittpunkt von p_0 und q_0 auf einem Kreise durch den Fußpunkt F des Lotes von P_0 auf p_0' . Wir spiegeln nun das Element (P_0, p_0) an p_0' in ein Element $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ der neuen Schar und ebenso das Element (Q_0, q_0) an q_0' in ein Element $(\bar{Q}_0, \bar{q}_0)$ der neuen Schar. Aus dem soeben entwickelten Satze folgt nun unmittelbar, daß $\bar{P}_0$, $\bar{Q}_0$ und der Schnittpunkt von $\bar{p}_0$ und $\bar{q}_0$ auf einem Kreise durch F liegen. Da $\bar{P}_0 \bar{Q}_0$ Tangente des Kreises ist, so ist das Lot zu $\bar{P}_0 \bar{Q}_0$ durch $\bar{P}_0$ Kreisdurchmesser. Insbesondere ist, da p_0' auf $\bar{P}_0 F$ senkrecht ist, der zweite Endpunkt dieses Durchmessers der Schnittpunkt B mit p_0' . Also ist auch die Gerade, die B mit dem Schnittpunkt von $\bar{p}_0$ und $\bar{q}_0$ verbindet, senkrecht zu $\bar{p}_0$.

Mithin folgt: Errichten wir auf $\bar{P}_0 \bar{Q}_0$ in $\bar{P}_0$ und auf $\bar{p}_0$ im Schnittpunkt mit $\bar{q}_0$ das Lot, so treffen sich beide Lote in einem Punkte B von p_0' . Nach Satz 15 aber — angewandt auf die neue Schar von Elementen — müssen sich beide Lote in einem Punkte der zu $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ zugeordneten Geraden $\bar{p}_0'$ treffen.

Dieselbe Betrachtung können wir nun anstellen, wenn wir statt (Q_0, q_0) irgend ein anderes, zum Elemente (P_0, p_0) unendlich benachbartes Element der alten Schar auswählen. Daraus folgt: Die Gerade $\bar{p}_0'$ hat mit der Geraden p_0' alle Punkte B gemein, und daher sind beide Geraden dieselben.

Satz 16. *Liegt eine Schar von ∞^2 Linienelementen (P_0, p_0) in der Ebene vor, so ist jedem Elemente (P_0, p_0) der Schar nach § 1 eine Gerade p_0' zugeordnet. Spiegelt man jedes Element an der zugehörigen Geraden p_0' , so geht eine neue Schar von ∞^2 Elementen $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ hervor. Auch hier ist jedem Elemente $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ eine Gerade zugeordnet. Sie ist identisch mit der Geraden p_0' , die demjenigen Elemente (P_0, p_0) zugeordnet ist, aus dem das Element $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ durch Spiegelung hervorgegangen ist.*

Die Beziehung zwischen den beiden Scharen (P_0, p_0) und $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ von Linienelementen ist also durchaus wechselseitig: Wären wir von der zweiten Schar statt von der ersten ausgegangen, so hätte uns dasselbe Verfahren der Spiegelung zur ersten Schar geführt.

Indem wir nun den Satz 7 des § 1 bei der neuen Schar von ∞^2 Elementen anwenden, die ja eine neue Schar von ∞^1 Kurven $\bar{\Gamma}_0$ definieren, gelangen wir zu den merkwürdigen Sätzen:

Satz 17a. *Zu jeder Schar von ∞^2 Isogonalkurven in der Ebene* | **Satz 17b.** *Zu jeder Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven in der Ebene*

gibt es eine ganz bestimmte zweite Schar von ∞^2 Isogonalkurven, derart daß zwischen beiden Scharen folgende Beziehung besteht:

Alle diejenigen ∞^1 Kurven der ersten Schar, die einen Punkt P_0 gemein haben, haben in P_0 solche Krümmungskreise, die noch einen zweiten Punkt $\bar{P}_0$ gemein haben. Diese Kreise sind zugleich die Krümmungskreise aller durch $\bar{P}_0$ gehenden ∞^1 Kurven der zweiten Schar hinsichtlich dieses Punktes $\bar{P}_0$.

gibt es eine ganz bestimmte zweite Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven, derart daß zwischen beiden Scharen folgende Beziehung besteht:

Alle diejenigen ∞^1 Kurven der ersten Schar, die eine Tangente p_0 gemein haben, haben in den Berührungspunkten von p_0 solche Krümmungskreise, die noch eine zweite Gerade $\bar{p}_0$ berühren. Diese Kreise sind zugleich die Krümmungskreise aller $\bar{p}_0$ berührenden ∞^1 Kurven der zweiten Schar hinsichtlich ihrer Berührungspunkte mit $\bar{p}_0$.

Zur Veranschaulichung nennen wir ein Beispiel*) zum Satze 17a: Alle ∞^2 Parabeln mit demselben Brennpunkt O bilden eine Schar von Isogonalkurven. Hier besteht die zugeordnete Schar aus allen ∞^2 Kardioiden mit der Spitze O . Ist P_0 irgend ein Punkt der Ebene, so ist der zugehörige Punkt $\bar{P}_0$ zu erhalten, indem man P_0O über O hinaus verlängert und von O aus auf der Verlängerung dreimal die Strecke P_0O abträgt. Die Spiegelachse p_0' nämlich liegt hier senkrecht zu P_0O auf der andern Seite von O in gleichem Abstände wie P_0 . Also folgt hier: Legt man durch einen Punkt P_0 alle Parabeln mit dem Brennpunkt O , so haben sie in P_0 solche Krümmungskreise, die noch durch $\bar{P}_0$ gehen und dort zugleich Krümmungskreise aller derjenigen Kardioiden mit der Spitze O sind, die durch $\bar{P}_0$ gehen.

Als Beispiel zu Satz 17b benutzen wir die in § 3, S. 511, gefundenen ∞^2 Kreisevolventen, die zu allen Kreisen um einen Punkt O als Mitte gehören. Wenn wir alle ∞^1 Kreisevolventen betrachten, die dieselbe Gerade p_0 berühren, so erkennen wir, daß die Krümmungskreise für ihre Berührungspunkte mit p_0 auf der Parallelen p_0' zu p_0 durch O liegen. Hier also geht $\bar{p}_0$ aus p_0 durch Spiegelung an dieser Geraden p_0' hervor, woraus folgt, daß in diesem besonderen Falle die zweite Schar von Äquitangentialkurven mit der ersten identisch ist.

Es kann, wie hier, so auch bei Isogonalkurven vorkommen, daß die zugeordnete zweite Schar mit der ersten identisch ist.

Zur richtigen Auffassung der Sätze 17a und 17b wird es nützlich

*) Bezüglich der Herleitung dieses Beispiels vgl. die früher genannte Arbeit des Verf. von 1898, S. 294. Dort findet man noch viele andere Beispiele zu Satz 17a. Dagegen ist Satz 17b erst jetzt neu hinzugekommen.

sein, hervorzuheben, daß die zugeordnete zweite Schar von Kurven im allgemeinen durchaus nicht etwa durch eine Punkttransformation aus der alten Schar hervorgeht.

§ 5.

Analytische Ableitung der Sätze über Isogonalkurven und Äquitangentialkurven.

Weiterer Folgerungen halber, die wir zu ziehen gedenken, erweist es sich als erwünscht, die bisherigen Ergebnisse, soweit nötig, auch analytisch abzuleiten. Das dabei zu benutzende Koordinatensystem ist mit Sorgfalt auszuwählen. Haben wir es doch mit zwei Reihen von Betrachtungen zu tun: bei denen der ersten Reihe drehen wir Geraden (p_0) um Punkte (P_0) um konstante Winkel, bei denen der zweiten Reihe verschoben wir Punkte (P_0) auf Geraden (p_0) um konstante Strecken. Im ersten Fall verwenden wir daher Punktkoordinaten, im zweiten Linienkoordinaten.

In gewöhnlichen rechtwinkligen Punktkoordinaten x, y pflegt man ein Linienelement durch die Koordinaten x, y seines Punktes und durch die Angabe der Richtung seiner Geraden festzulegen. Drückt man diese Richtung durch $y' = \frac{dy}{dx}$, das Verhältnis der Zunahmen der Punktkoordinaten längs der Geraden, aus, so bleibt noch der Fortschreitungsinn der Geraden des Elementes in Zweifel.*) Wir benutzen daher als dritte Koordinate des Linienelementes besser den Winkel w selbst, den die mit Fortschreitungsinn belegte Gerade des Elementes mit der positiven x -Achse bildet, so daß $y' = \operatorname{tg} w$ ist.

Was nun die Linienkoordinaten anlangt, von denen wir bei der zweiten Betrachtungsreihe ausgehen, so erkennt man leicht, daß es sich empfiehlt, als *Linienkoordinaten diejenigen Bestimmungsstücke anzuwenden, die in der Hesseschen Normalform der Gleichung einer Geraden auftreten*. Jedoch haben wir, weil wir den Geraden Fortschreitungsinn beilegen, über die Vorzeichen folgendes festzusetzen: Wir fällen vom Anfangspunkt O das Lot auf die Gerade und legen dem Lote den positiven Sinn bei in der Richtung von O nach dem Fußpunkte, wenn O linker Hand von der Geraden liegt, vorausgesetzt daß man längs der Geraden im Sinne ihrer Fortschreitung hinblickt (siehe Fig. 16). Liegt O rechter Hand von der Geraden, so betrachten wir das Lot als negativ. Den Winkel, den das Lot mit der x -Achse bildet, messen wir nun, indem wir

*) Auf die Notwendigkeit, die Linienelemente unzweideutig in bezug auf den Fortschreitungsinn ihrer Geraden zu orientieren, hat Study in den Göttingischen gelehrten Anzeigen 1897, S. 441, mit besonderem Nachdruck hingewiesen.

die positive x -Achse sich nach der positiven y -Achse hin so weit drehen lassen, bis sie auch dem Sinne nach mit jenem Lote zusammenfällt. Den so gemessenen Winkel nennen wir u , das in obiger Weise mit Vorzeichen versehene Lot v . Der Winkel u kommt natürlich nur in den Funktionen $\sin u$ und $\cos u$ vor, wir können ihn also ohne wesentliche Änderung der Formeln auch negativ annehmen, indem wir in entgegengesetztem Sinne drehen, da

$$\sin u = \sin(u - 2\pi) \text{ und } \cos u = \cos(u - 2\pi)$$

ist.

Diese Bestimmungsstücke u, v der Geraden können wir vielleicht zweckmäßig ihre *Normalkoordinaten* nennen. Ein Punkt (x, y) liegt auf der Geraden (u, v) , wenn

$$x \cos u + y \sin u - v = 0$$

ist. Dies ist also die Bedingung der vereinigten Lage. Sind (u, v) und $(u + du, v + dv)$ unendlich benachbarte Geraden, so erfüllt ihr Schnittpunkt (x, y) außer dieser Gleichung noch die Gleichung:

$$-x \sin u + y \cos u - \frac{dv}{du} = 0,$$

so daß

$$x = v \cos u - \frac{dv}{du} \sin u,$$

$$y = v \sin u + \frac{dv}{du} \cos u$$

ist. Man erkennt sofort, daß

$$v' = \frac{dv}{du} = -x \sin u + y \cos u$$

die Länge der Strecke ist, die man auf der Geraden (u, v) vom Fußpunkte des Lotes v aus beschreiben muß, um zum Punkte (x, y) zu gelangen, und zwar ist v' positiv oder negativ, je nachdem man dabei in Übereinstimmung mit dem Fortschreitungsinn der Geraden ist oder nicht.

Die drei Größen $u, v, v' = \frac{dv}{du}$ sind also geometrisch leicht definierbare Koordinaten der Linienelemente.

Wenn wir ein Linienelement der Ebene einerseits durch die früheren Koordinaten x, y und w , andererseits durch die soeben eingeführten

Fig. 16.

Die gegebenen ∞^2 Elemente (x, y, w) definieren ∞^1 Kurven Γ_0 , deren Differentialgleichung in Punktkoordinaten x, y lautet:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \lambda(x, y).$$

Wir drehen jedes Element um seinen Punkt um den Winkel α . Dann ist

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} (\lambda + \alpha)$$

die Differentialgleichung der Isogonalkurven A_α der gegebenen Schar Γ_0 (oder A_0). Um die Differentialgleichung zweiter Ordnung *aller* ∞^2 Isogonalkurven zu erhalten, differenzieren wir nochmals:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\lambda_x + \lambda_y \frac{dy}{dx}}{\cos^2 (\lambda + \alpha)}$$

und eliminieren α aus beiden Gleichungen. Es ergibt sich also:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\lambda_x + \lambda_y \frac{dy}{dx} \right) \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right).$$

Der Mittelpunkt des Krümmungskreises derjenigen Isogonalkurve, die im Punkte (x, y) die Richtung $\frac{dy}{dx}$ hat, hat die Koordinaten

$$\xi = x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \frac{dy}{dx},$$

$$\eta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

so daß sich ergibt:

Die gegebenen ∞^2 Elemente (u, v, v') definieren ∞^1 Kurven Γ_0 , deren Differentialgleichung in Normal-Linienkoordinaten u, v lautet:

$$\frac{dv}{du} = \mu(u, v).$$

Wir verschieben jedes Element längs seiner Geraden um die Strecke a . Dann ist

$$\frac{dv}{du} = \mu(u, v) + a$$

die Differentialgleichung der Äquitangentialkurven B_a der gegebenen Schar Γ_0 (oder B_0). Um die Differentialgleichung zweiter Ordnung *aller* ∞^2 Äquitangentialkurven zu erhalten, brauchen wir diese Gleichung nur noch einmal zu differenzieren, da alsdann die Konstante a herausfällt. Es ergibt sich also:

$$\frac{d^2 v}{du^2} = \mu_u + \mu_v \frac{dv}{du}.$$

Der Mittelpunkt des Krümmungskreises derjenigen Äquitangentialkurve, die die Gerade (u, v) in dem durch $\frac{dv}{du}$ bestimmten Punkte berührt, d. h. nach (1) in dem Punkte

$$x = v \cos u - \frac{dv}{du} \sin u,$$

$$y = v \sin u + \frac{dv}{du} \cos u,$$

liegt in dem Schnittpunkt der Normalen

$$\xi \sin u - \eta \cos u + \frac{dv}{du} = 0,$$

mit der unendlich benachbarten

$$\xi \cos u + \eta \sin u + \frac{d^2 v}{du^2} = 0,$$

so daß sich wegen des obigen Wertes von $\frac{d^2 v}{du^2}$ ergibt:

$$\xi - x = - \frac{1}{\lambda_x + \lambda_y \frac{dy}{dx}} \cdot \frac{dy}{dx},$$

$$\eta - y = \frac{1}{\lambda_x + \lambda_y \frac{dy}{dx}}.$$

Durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$ kommt:

$$(5a) \quad \lambda_y(\xi - x) - \lambda_x(\eta - y) + 1 = 0.$$

$$\xi = -\sin u \cdot \frac{dv}{du} - \left(\mu_u + \mu_v \frac{dv}{du} \right) \cos u,$$

$$\eta = \cos u \cdot \frac{dv}{du} - \left(\mu_u + \mu_v \frac{dv}{du} \right) \sin u.$$

Durch Elimination von $\frac{dv}{du}$ kommt:

$$(5b) \quad (\mu_v \sin u - \cos u) \xi - (\mu_v \cos u + \sin u) \eta = \mu_u.$$

Die beiden Gleichungen (5a) und (5b) sind linear in ξ, η , stellen also je eine Gerade dar. Die beiden Gleichungen würden dieselbe Gerade darstellen, wenn

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_y x - \lambda_x y - 1} = \frac{\mu_v \sin u - \cos u}{\mu_u},$$

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y x - \lambda_x y - 1} = \frac{\mu_v \cos u + \sin u}{\mu_v}$$

wäre. Diese Gleichungen aber sind in der Tat richtig infolge von (4), wenn wir bedenken, daß nach der ersten Gleichung (2) $\sin u = -\cos w$, $\cos u = \sin w$ ist, d. h. $\sin u = -\cos \lambda$, $\cos u = \sin \lambda$, da $w = \lambda(x, y)$ angenommen worden ist.

Da also die beiden Gleichungen (5a) und (5b) dieselbe Gerade darstellen, so folgt, daß erstens alle durch einen bestimmten Punkt P_0 gehenden Isogonalkurven in P_0 solche Krümmungskreise haben, deren Mitten (ξ, η) eine Gerade erfüllen, daß zweitens alle eine bestimmte Gerade p_0 berührenden Äquitangentialkurven in ihren Berührungspunkten solche Krümmungskreise haben, deren Mitten (ξ, η) ebenfalls eine Gerade erfüllen, und daß drittens beide Geraden zusammenfallen, sobald p_0 die Tangente derjenigen Kurve Γ_0 in P_0 ist, die durch P_0 hindurchgeht.

Hiermit ist der Satz 7 des § 1, S. 500, von neuem bewiesen.

Da die beiden Gleichungen (5a) und (5b) übereinstimmen, brauchen wir jetzt nur noch eine von beiden, etwa (5a), zu berücksichtigen. In § 4 spiegelten wir jeden Punkt (x, y) oder P_0 an der zugehörigen Geraden p_0' . Diese Gerade ist aber die Gerade (5a). Bei der Spiegelung geht der Punkt P_0 in einen neuen Punkt $\bar{P}_0$ oder $(\bar{x}, \bar{y})$ über. Es kommt offenbar:

$$(6) \quad \bar{x} = x - \frac{2\lambda_y}{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}, \quad \bar{y} = y + \frac{2\lambda_x}{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}.$$

Wir zeigten nun in § 4, daß die Beziehung zwischen den ursprünglichen Punkten P_0 und den transformierten Punkten $\bar{P}_0$ eine durchaus wechselseitige ist. Analytisch kommt dies darauf hinaus, daß die zur Punkttransformation (6) inverse Transformation wieder dieselbe charakteristische Form (6) hat, indem nur statt λ eine neue Funktion $\bar{\lambda}$ von $\bar{x}$ und $\bar{y}$

auftritt. D. h., um jene Umkehrbarkeit analytisch zu beweisen, müssen wir zeigen, daß die Auflösung von (6) nach x, y Gleichungen gibt von der Form:

$$(7) \quad x = \bar{x} - \frac{2\bar{\lambda}_y}{\bar{\lambda}_x^2 + \bar{\lambda}_y^2}, \quad y = \bar{y} + \frac{2\bar{\lambda}_x}{\bar{\lambda}_x^2 + \bar{\lambda}_y^2}.$$

Um dies zu tun*), empfiehlt es sich, die Gleichungen (6) bequemer zu schreiben: Wir setzen:

$$(8) \quad \lambda_x = \varrho \cos \omega, \quad \lambda_y = \varrho \sin \omega,$$

indem wir unter ϱ, ω irgend zwei Funktionen von x, y von der Art verstehen, daß es wirklich nach (8) eine zugehörige Funktion λ gibt, d. h. daß

$$(9) \quad d\lambda = \varrho \cos \omega dx + \varrho \sin \omega dy$$

wirklich ein *vollständiges Differential* ist. Setzen wir dies voraus, so läßt sich (6) so schreiben:

$$(6') \quad \bar{x} = x - 2 \frac{\sin \omega}{\varrho}, \quad \bar{y} = y + 2 \frac{\cos \omega}{\varrho}.$$

Lösen wir diese Gleichungen nach x, y auf, so gehen zunächst Gleichungen von der allgemeinen Form hervor:

$$x = \varphi(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = \psi(\bar{x}, \bar{y}).$$

Wir können sie so schreiben:

$$x = \bar{x} - 2 \cdot \frac{\bar{x} - \varphi}{2}, \quad y = \bar{y} + 2 \cdot \frac{\psi - \bar{y}}{2}.$$

Statt φ, ψ führen wir zwei Funktionen $\bar{\varrho}$ und $\bar{\omega}$ von $\bar{x}, \bar{y}$ ein, indem wir setzen:

$$\frac{\bar{x} - \varphi}{2} = \frac{\sin \bar{\omega}}{\bar{\varrho}}, \quad \frac{\psi - \bar{y}}{2} = \frac{\cos \bar{\omega}}{\bar{\varrho}},$$

was wir tun dürfen. Alsdann erkennen wir, daß sich die zu (6') inverse Transformation so schreiben läßt:

$$(7') \quad x = \bar{x} - 2 \frac{\sin \bar{\omega}}{\bar{\varrho}}, \quad y = \bar{y} + 2 \frac{\cos \bar{\omega}}{\bar{\varrho}}.$$

Aber damit ist noch nicht bewiesen, daß sie dieselbe charakteristische Form (6') hat, denn in (6') haben ϱ und ω noch die besondere Eigenschaft, daß (9) ein vollständiges Differential ist. Wir müssen also noch beweisen, daß auch:

$$(10) \quad d\bar{\lambda} = \bar{\varrho} \cos \bar{\omega} d\bar{x} + \bar{\varrho} \sin \bar{\omega} d\bar{y}$$

ein vollständiges Differential ist. Dies geschieht so: Aus (6') und (7') folgt:

$$\frac{\sin \bar{\omega}}{\bar{\varrho}} = - \frac{\sin \omega}{\varrho}, \quad \frac{\cos \bar{\omega}}{\bar{\varrho}} = - \frac{\cos \omega}{\varrho},$$

*) Einen anderen, weniger eleganten Beweis hierfür findet man in der angegebenen ersten Arbeit des Verf. 1898, S. 279—282.

woraus wir schließen: $\bar{\varrho} = -\varrho$, $\bar{\omega} = \omega + 2n\pi$, wo n eine ganze Zahl ist. Also hat (10) die Form:

$$d\bar{\lambda} = -(\varrho \cos \omega d\bar{x} + \varrho \sin \omega d\bar{y}).$$

Da $d\lambda$ ein vollständiges Differential nach Voraussetzung ist, so ist auch $d\bar{\lambda}$ eines, sobald

$$-\frac{1}{2}(d\lambda + d\bar{\lambda}) = \varrho \cos \omega \cdot d\frac{\bar{x}-x}{2} + \varrho \sin \omega \cdot d\frac{\bar{y}-y}{2}$$

ein vollständiges Differential ist. Es ist aber nach (6):

$$d\frac{\bar{x}-x}{2} = -d\frac{\sin \omega}{\varrho}, \quad d\frac{\bar{y}-y}{2} = d\frac{\cos \omega}{\varrho}.$$

Also muß noch bewiesen werden, daß:

$$\frac{1}{2}(d\lambda + d\bar{\lambda}) = \varrho \cos \omega d\frac{\sin \omega}{\varrho} - \varrho \sin \omega d\frac{\cos \omega}{\varrho}$$

ein vollständiges Differential ist. Aber dieser Ausdruck ist:

$$\frac{1}{2}(d\lambda + d\bar{\lambda}) = d\omega$$

und daher tatsächlich ein vollständiges Differential. Hiermit ist der gewünschte Beweis erbracht. Zugleich hat sich ergeben, daß:

$$d\bar{\lambda} = 2d\omega - d\lambda,$$

also:

$$\bar{\lambda} = 2\omega - \lambda + \text{konst.}$$

sein muß. Dabei ist nach (8):

$$\omega = \arctg \frac{\lambda_y}{\lambda_x},$$

somit:

$$\bar{\lambda} = 2 \arctg \frac{\lambda_y}{\lambda_x} - \lambda + \text{konst.}$$

Da in (7) nur die Differentialquotienten von $\bar{\lambda}$ auftreten, so ist die additive Konstante belanglos. Wir haben also erkannt:

Satz 18. *Diejenige Transformation, die zu der Transformation*

$$\bar{x} = x - \frac{2\lambda_y}{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}, \quad \bar{y} = y + \frac{2\lambda_x}{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}$$

invers ist, hat dieselbe charakteristische Form:

$$x = \bar{x} - \frac{2\bar{\lambda}_y}{\bar{\lambda}_x^2 + \bar{\lambda}_y^2}, \quad y = \bar{y} + \frac{2\bar{\lambda}_x}{\bar{\lambda}_x^2 + \bar{\lambda}_y^2}.$$

Dabei ist:

$$\bar{\lambda} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda_y}{\lambda_x} - \lambda$$

infolge der vorgelegten Transformation.

Dieser analytische Satz zieht nun nach den vorhergehenden Erörterungen sofort die Sätze 17a und 17b des § 4, S. 516, nach sich, die damit auf neuem Wege bewiesen sind.

§ 6.

Ein Seitenstück zur konformen Gruppe in der Ebene: Die äquilonge Gruppe.

Die unendliche Gruppe aller konformen Punkttransformationen steht in einem sehr engen Zusammenhang mit den Scharen von ∞^2 Isogonalkurven. Da sie nämlich die Winkel invariant läßt, so führt sie jede Schar von ∞^2 Isogonalkurven wieder in eine Schar von ∞^2 Isogonalkurven über.

Die charakteristischen Eigenschaften einer konformen Transformation der Ebene sind erstens, daß sie jeden Punkt in einen Punkt, und zweitens, daß sie jeden Winkel in einen gleichgroßen Winkel überführt.

Infolge des Parallelismus zwischen unseren beiden Betrachtungsreihen liegt demnach eine andere Frage nahe, nämlich die Frage nach denjenigen *Berührungstransformationen der Ebene*, die erstens jede Gerade in eine Gerade und zweitens jede Strecke in eine gleichlange Strecke überführen (siehe Fig. 17). Man kann diese Transformationen vielleicht als *äquilonge Transformationen* bezeichnen. Zu ihnen gehören von den Punkttransformationen der Ebene offenbar nur die Bewegungen der Ebene. Dazu tritt jedoch eine unendliche Schar von äquilongen Berührungstransformationen, unter denen z. B. die *Dilatationen**) enthalten sind. Es ist von vornherein klar, daß alle äquilongen Transformationen eine *Gruppe* bilden und daß jede Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven vermöge einer äquilongen Transformation wieder in eine Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven übergeht. Die Gruppe aller äquilongen Transformationen der Ebene, die *äquilonge Gruppe*, bildet also bei unseren Betrachtungen das vollkommene Gegenstück der konformen Gruppe, und

Fig. 17.

*) Vgl. bez. der Dilatationen das auf S. 491 genannte Werk von Lie, S. 14.

wir werden später sehen, daß diese Analogie noch in einer höchst interessanten Hinsicht zum Ausdruck kommt. Vorerst jedoch wollen wir alle äquilongen Transformationen bestimmen.

Dabei benutzen wir die im vorigen Paragraphen (S. 519) eingeführten Normalkoordinaten u, v der Geraden, so daß u, v, v' die Koordinaten der Linienelemente sind. Eine Berührungstransformation der Ebene, die jede Gerade in eine Gerade überführt, geht aus einer Transformation in u, v :

$$(1) \quad \bar{u} = \varphi(u, v), \quad \bar{v} = \psi(u, v)$$

durch *Erweiterung*, d. h. durch Hinzunahme der Transformation des Differentialquotienten v' :

$$(2) \quad \bar{v}' = \frac{\psi_u + \psi_v v'}{\varphi_u + \varphi_v v'}$$

hervor. Soll sie nun *äquilong* sein, so heißt dies, daß zwei beliebige Linienelemente einer und derselben Geraden (u, v) so in zwei Linienelemente der neuen Geraden $(\bar{u}, \bar{v})$ übergehen sollen, daß die Strecke a zwischen den Punkten der beiden ursprünglichen Elemente gleich der Strecke zwischen den Punkten der beiden neuen Elemente ist. Da v' , wie wir auf S. 519 sahen, die Strecke auf der Geraden (u, v) des Elementes (u, v, v') vom Fußpunkt des Lotes v bis zum Punkte des Elementes bedeutet, so haben die beiden ursprünglichen Elemente die Koordinaten u, v, v' bez. $u, v, v' + a$. Also fordern wir nur dies: Wenn v' in (2) durch $v' + a$ ersetzt wird, so soll $\bar{v}'$ in $\bar{v}' + a$ übergehen, und zwar für jeden Wert von u, v, v' und a . Es soll also sein:

$$\frac{\psi_u + \psi_v(v' + a)}{\varphi_u + \varphi_v(v' + a)} - \frac{\psi_u + \psi_v v'}{\varphi_u + \varphi_v v'} = a,$$

was aber dann und nur dann der Fall ist, wenn

$$(3) \quad \varphi_v = 0, \quad \psi_v = \varphi_u$$

ist, wenn wir beachten, daß natürlich $\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v \equiv 0$ sein muß. φ ist also eine Funktion von u allein, so daß φ_u mit φ' bezeichnet werden kann, während

$$\psi = \varphi' v + \chi$$

ist, wo χ auch nur von u abhängt. Also folgt:

Satz 19: *Die äquilongen Transformationen haben in Normal-Linienkoordinaten die Form:*

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \varphi(u), & \bar{v} &= \varphi' v + \chi(u), \\ \bar{v}' &= \frac{\chi'}{\varphi'} + \frac{\varphi''}{\varphi'} v + v', \end{aligned}$$

wo φ und χ nur von u abhängen.

Wie man sieht, enthalten diese Gleichungen noch zwei beliebig annehmbare Funktionen φ und χ von u allein. Alle äquilongen Trans-

formationen bilden eben eine unendliche Gruppe, die *unendliche äquilonge Gruppe*.

Man kann diese Gruppe benutzen, um aus einer bekannten Schar von Äquitangentialkurven neue Scharen abzuleiten, ebenso wie man aus einer bekannten Schar von Isogonalkurven neue mittels der konformen Gruppe erhält.

§ 7.

Die konforme und die äquilonge Gruppe der Ebene dargestellt mittels der beiden Zahlensysteme in zwei Einheiten.

Es ist bekannt, daß sich die konforme Gruppe durch eine einzige Gleichung darstellen läßt, sobald man die Punkte (x, y) der Ebene als Träger der gewöhnlichen komplexen Zahlen $x + iy$ benutzt. Denn alsdann ist:

$$\bar{x} + i\bar{y} = f(x + iy)$$

die Gleichung der Gruppe, nämlich der Ausdruck einer konformen Abbildung der Ebene.

Die Funktion $f(x + iy)$ ist dabei eine analytische Funktion, d. h. der Differentialquotient

$$\frac{df(x + iy)}{d(x + iy)}$$

ist von der Richtung, nach der man vom Punkte (x, y) um unendlich wenig weiter geht, unabhängig.

Diese Erwägung führt uns nun abermals zu einer merkwürdigen Analogie. Zu ihrer Erläuterung holen wir, um nicht zu viel voraussetzen zu müssen, etwas weiter aus:

Man kann statt der aus 1 und i gebildeten komplexen Zahlen $x + iy$ Zahlen $x + jy$ einführen, die aus 1 und einer andern Einheit j zusammengesetzt sind. Wie i nur durch die Eigenschaft $i^2 = -1$ definiert ist, so können wir von diesem allgemeinen Standpunkt aus j definieren durch die Eigenschaft:

$$j^2 = \alpha + \beta j,$$

wo α und β zwei bestimmt gewählte Zahlen bedeuten, die den gewöhnlichen Rechenregeln folgen.

Als dann sind die Produkte zweier beliebiger Zahlen $x + jy$ und $x' + jy'$ des Systems definiert durch die Formel, die aus dem Gesetze der Distribution, nämlich aus:

$$(x + jy)(x' + jy') = xx' + (xy' + yx')j + yy'j^2,$$

folgt, d. h. durch das Gesetz:

$$(x + jy)(x' + jy') = xx' + \alpha yy' + j(xy' + yx' + \beta yy').$$

Auch gilt das Gesetz der Assoziation $(ab)c = a(bc)$. Nur ein Gesetz der

gewöhnlichen Multiplikation braucht nicht erfüllt zu sein, nämlich das, wonach ein Produkt nur dann gleich Null ist, wenn einer seiner Faktoren gleich Null ist. Lassen wir dies Gesetz fallen, so ist der Begriff des Zahlensystems in zwei Einheiten $1, j$ allgemeiner als der des gewöhnlichen komplexen Systems*).

Es läßt sich bekanntlich — und zwar auf recht einfachem Wege — zeigen, daß man jedes solche System dadurch, daß man als zweite Einheit des Systems statt j eine *passende* Zahl $a + bj$ benutzt, wo $b \neq 0$ ist, auf eine von *zwei typischen Formen* bringen kann**). Die erste Form ist nichts anderes als das gewöhnliche komplexe System, worin wir also die zweite Einheit mit i bezeichnen werden, so daß $i^2 = -1$ ist. Die zweite Form dagegen ist das System, bei dem $j^2 = 0$ ist.

Dieses zweite System hat die Produktregel:

$$(x + jy)(x' + jy') = xx' + j(xy' + yx').$$

Sind nun $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ zwei Funktionen von x, y innerhalb des Gebietes der reellen oder auch der gewöhnlichen komplexen Zahlen, d. h. innerhalb des Gebietes, in dem die gewöhnlichen Rechenregeln gelten, so können wir den Ausdruck:

$$\varphi(x, y) + j\psi(x, y)$$

betrachten. Er ändert sich, wenn sich x oder y ändert, ist also eine Funktion von x und y . Allgemein ist sein totales Differential:

$$(\varphi_x + j\psi_x)dx + (\varphi_y + j\psi_y)dy.$$

Man kann nun diesen Ausdruck $\varphi + j\psi$ in Analogie mit der Ausgangsbetrachtung der Funktionentheorie als eine „analytische“ Funktion***) im Zahlensystem $1, j$ bezeichnen, wenn der „Differentialquotient“

$$\frac{(\varphi_x + j\psi_x)dx + (\varphi_y + j\psi_y)dy}{dx + jdy},$$

den man aus jenem Differential und dem Differential $dx + jdy$ der

*) Vgl. z. B. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften I A 4, S. 159 u. f.

**) Vgl. ebenda S. 166. Wir sprechen hier von den verschiedenen „Typen“, nicht von den verschiedenen „Gestalten“ der Systeme, d. h. wir lassen zu, daß die Koeffizienten a, b irgend welche den gewöhnlichen Rechenregeln folgende Zahlen, also gewöhnliche komplexe Zahlen bedeuten. Infolgedessen gelten unsere späteren Betrachtungen auch für imaginäre Gebilde in der Ebene.

***) Der Verf. hat allgemein, für Zahlensysteme in n Einheiten, die Frage nach dem Vorhandensein von „analytischen“ Funktionen untersucht und erledigt. Siehe: „Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich komplexen Funktionen“, Leipziger Berichte 1893, S. 828—848, und 1894, S. 120—134. Im vorliegenden Falle liegen die Verhältnisse sehr einfach.

Zahl $x + jy$ des Systems 1, j bilden kann, unabhängig von dem Werte von $dy : dx$ ist, also die Form hat: $\Phi(x, y) + j\Psi(x, y)$. Es ist zu fordern:

$$(\varphi_x + j\psi_x)dx + (\varphi_y + j\psi_y)dy = (\Phi + j\Psi)(dx + jdy)$$

oder also, wenn wir rechts mit Rücksicht auf $j^2 = 0$ ausmultiplizieren:

$$(\varphi_x + j\psi_x)dx + (\varphi_y + j\psi_y)dy = \Phi dx + j(\Phi dy + \Psi dx).$$

Es soll also Funktionen Φ und Ψ geben, so daß einzeln:

$$\varphi_x + j\psi_x = \Phi + j\Psi, \quad \varphi_y + j\psi_y = j\Phi$$

ist. Diese Formeln zerfallen wieder in je zwei:

$$\varphi_x = \Phi, \quad \psi_x = \Psi, \quad \varphi_y = 0, \quad \psi_y = \Phi.$$

Es gibt also solche Funktionen Φ und Ψ , sobald:

$$(1) \quad \varphi_y = 0, \quad \psi_y = \varphi_x$$

ist. Ist dies der Fall, so heiße

$$\varphi(x, y) + j\psi(x, y)$$

eine analytische Funktion $f(x + jy)$ in dem Gebiete der Einheiten 1 und j , wo $j^2 = 0$ ist. Man kann alsdann die grundlegenden Begriffe der gewöhnlichen Funktionentheorie auf diese Funktionen $f(x + jy)$ übertragen, was wir aber hier nicht weiter ausführen wollen.

Die Gleichungen (1) aber sind uns schon unter (3) im vorigen Paragraphen auf S. 526 begegnet. Nur werden dort x und y durch u und v bezeichnet. Der Satz 19 lehrt uns also, daß

$$\bar{u} + j\bar{v} = \varphi(u) + j[\varphi'v + \chi(u)]$$

eine allgemeine analytische Funktion im Gebiete der Zahlen $u + jv$ des aus 1 und j gebildeten Systems ist. Also haben wir zwei einander analoge Sätze:

Satz 20a. *Die konforme Gruppe läßt sich mit Benutzung der Einheiten 1 und i , wo $i^2 = -1$ ist, durch eine einzige Gleichung:*

$$\bar{x} + i\bar{y} = f(x + iy)$$

darstellen. Dabei ist $f(x + iy)$ eine beliebige analytische Funktion im System (1, i).

Satz 20b. *Die äquivalente Gruppe läßt sich mit Benutzung der Einheiten 1 und j , wo $j^2 = 0$ ist, durch eine einzige Gleichung:*

$$\bar{u} + j\bar{v} = f(u + jv)$$

darstellen. Dabei ist $f(u + jv)$ eine beliebige analytische Funktion im System (1, j).

Hierdurch werden wir schließlich zu den Analogien geführt, die in der folgenden Gegenüberstellung ihren Ausdruck findet:

Satz 21. *Es gibt in zwei Einheiten gerade zwei Typen von Zahlensystemen (1, i) und (1, j), wobei $i^2 = -1$ und $j^2 = 0$ ist.*

Sind die Punkte der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y die Träger der komplexen Zahlen $x + iy$ des Systems $(1, i)$, so wird die unendliche konforme Gruppe der Ebene, d. h. die Gruppe aller derjenigen Berührungstransformationen, die jeden Punkt in einen Punkt und jeden Winkel in einen gleich großen Winkel überführen, dargestellt durch die Gleichung:

$$\bar{x} + i\bar{y} = f(x + iy).$$

Hierin bedeutet $f(x + iy)$ eine beliebige analytische Funktion, d. h. eine Funktion der komplexen Zahl $x + iy$, deren Differentialquotient

$$\frac{df(x + iy)}{d(x + iy)}$$

von $dy : dx$ unabhängig ist. Die Transformationen der Gruppe führen jede Schar von ∞^2 Isogonalkurven wieder in eine Schar von ∞^2 Isogonalkurven über, indem sie die Punkte der Kurven der ersten Schar in die Punkte der Kurven der neuen Schar verwandeln.

Dadurch, daß wir zu dem ja längst bekannten links stehenden Satze den rechts stehenden gefunden haben, sind wir dazu gelangt, eine in der Natur der Sache begründete Deutung des zweiten Zahlensystems zu finden, das in zwei Einheiten existiert. Man sieht, daß es hier naturgemäß ist, die Koeffizienten u, v der Zahl $u + jv$ nicht als Punkt-, sondern als Linienkoordinaten zu deuten und zwar v als das Lot von einem Anfangspunkt auf die Gerade, u als den Winkel des Lotes mit einer Anfangsrichtung.

Sind die Geraden der Ebenen mit den Normalkoordinaten u, v die Träger der komplexen Zahlen $u + jv$ des Systems $(1, j)$, so wird die unendliche äquilonge Gruppe der Ebene, d. h. die Gruppe aller derjenigen Berührungstransformationen, die jede Gerade in eine Gerade und jede Strecke in eine gleich lange Strecke überführen, dargestellt durch die Gleichung:

$$\bar{u} + j\bar{v} = f(u + jv).$$

Hierin bedeutet $f(u + jv)$ eine beliebige analytische Funktion, d. h. eine Funktion der komplexen Zahl $u + jv$, deren Differentialquotient

$$\frac{df(u + jv)}{d(u + jv)}$$

von $dv : du$ unabhängig ist. Die Transformationen der Gruppe führen jede Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven wieder in eine Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven über, indem sie die Tangenten der Kurven der ersten Schar in die Tangenten der Kurven der neuen Schar verwandeln.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung.	491
§ 1. Isogonalkurven und Äquitangentialkurven	493
§ 2. Neue charakteristische Eigenschaften der Isogonalkurven und Äquitangentialkurven	501
§ 3. Evolutoiden und Tangentialen sowie Beispiele zu den Isogonal- und Äquitangentialkurven	505
§ 4. Eine Zuordnung zwischen zwei Scharen von Isogonal- bez. Äquitangentialkurven	512
§ 5. Analytische Ableitung der Sätze über Isogonal- und Äquitangentialkurven.	518
§ 6. Ein Seitenstück zur konformen Gruppe in der Ebene: Die äquilonge Gruppe	525
§ 7. Die konforme und die äquilonge Gruppe der Ebene dargestellt mittels der beiden Zahlensysteme in zwei Einheiten	527