ESPERIENZE SUL PIANO INCLINATO.

DI A. G. ROSSI.

1. — L'energia posseduta da un cilindro che rotola sopra un piano inclinato è la somma di una energia cinetica traslatoria e di una energia cinetica rotatoria; con un ragionamento semplicissimo si stabilisce che, astrazion fatta dagli attriti, la velocità di un cilindro che rotola è $\sqrt{\frac{2}{3}}$ di quella dovuta all'altezza di caduta.

La diminuzione di velocità può essere resa molto notevole, se il raggio di rotolamento si faccia molto più piccolo del raggio d'inerzia della massa cadente sul piano inclinato. La fig. 1 mostra la forma di una ruota adatta a scendere lentamente sopra un opportuno binario inclinato.

Fig. 1.

Sul centro di un alberetto di acciaio, profilato come mostra la fig. 2, può girare liberamente un mozzo cilindrico m fra gli orecchi $o o$, quando esso non sia costretto fra le estremità a vite delle tre asticciuole prismatiche a , che portano

all'altra estremità tre masse uguali di piombo *M* foggiate a lente, distanti un 15 cm. fra centro e centro. Avvitando a fondo queste tre asticciuole, la ruota a tre raggi è resa solidale con l'asse d'acciaio; svitandole alquanto, la ruota è folle sullo stesso asse.

Fig. 2.

Questo asse è fatto per correre lungo un binario, costituito con due liste metalliche *b b* incastrate sopra un telaio di legno, formando per 2 o 4 metri un piano inclinato. Due di questi binarii sono disposti di fronte, come nella fig. 6, simmetricamente e raccordati in mezzo con un breve tratto ricurvo.

Si cominci col lasciar cadere la ruota (fig. 1) solidalmente congiunta all'asse; se vuol cadere, deve rotolare su questo asse; dato il grande momento d'inerzia, l'energia cinetica assorbita dalla rotazione è assai maggiore di quella corrispondente alla traslazione dell'intera massa. La ruota cade assai lentamente. Si determini il tempo impiegato a cadere fino al fondo, o a risalire il secondo piano identico; e si ponga a confronto col tempo di caduta, molto minore, che si ottiene invece dopo aver svitato alquanto due dei raggi della ruota per liberare il mozzo e trasportato il terzo raggio in direzione opposta sul mozzo, ove è un altro foro a vite (fig. 3): allora il sistema rotola con un raggio d'inerzia molto minore di prima, e la stessa massa si trasporta con velocità traslatoria ben maggiore, sebbene gli attriti sull'asse sieno aumentati. I tempi impiegati nei due casi sono diversi, così come sono diverse le velocità raggiunte alla fine di uno stesso percorso;

ma la legge del moto rimane invariata sia nella discesa che nella salita, l'una essendo l'immagine invertita dell'altra.

Fig. 3.

Un sistema analogo si può improvvisare con un sughero cilindrico, attraversato per l'asse da un ago da calza a , e trasversalmente da altri due aghi r caricati con sferette di piombo (fig. 4). A seconda che si faccia rotolare sopra un binario inclinato (due fili metallici tesi parallelamente) con l'asse a , oppure con l'asse r , le velocità di traslazione sono molto diverse.

Fig. 4.

2. — Una ruota consimile a quella descritta, data la sua piccola velocità e l'attrito relativamente piccolo, può servire a osservare e registrare la legge di caduta dei gravi. Il binario metallico sia spalmato con una vernice isolante e brunita, e questa sia poi grattata via per un breve tratto a intervalli equidistanti e corrispondenti sulle due guide; le quali vengano inserite in un circuito elettrico con una *morse*: ogni volta che l'asse della ruota passa su due punti scoperti del binario, sulla zona di carta s'imprime un segno. Non si ha che a riportare la zona col tracciato sulla lavagna lungo l'asse delle ascisse, le ordinate rappresentando in una scala

qualunque uniforme, il tempo, per poter descrivere la nota parabola.

Può servire a quest'uso, più semplicemente, una ruota a volante qualsiasi, montata sopra un asse sottile di acciaio, come la M della fig. 5.

3. — Una coppia di binarii inclinati, posti di seguito come nella fig. 6, formati con due bacchette di vetro raccordate brevemente da una curva, oppure addirittura un arco di cerchio di grande raggio, con una palla da biliardo che discenda e risalga per la velocità dovuta all'altezza di caduta, costituisce l'apparecchio più istruttivo per iniziare in iscuola lo studio del pendolo di gravità; se ne ricava subito il fattore dinamico del periodo $\sqrt{l/g}$, con un coefficiente che tende dal valore 4 al valore π quando l'altezza di caduta diviene piccolissima.

Fig. 5.

4. — Si abbiano due ruote come M, N (fig. 5), identiche sulla periferia, ma l'una M con la massa distribuita esternamente, l'altra N con la massa accumulata presso il centro, dimanierachè abbiano momenti d'inerzia molto diversi; ma sieno dello stesso peso ¹⁾. Si dispongano a capo dei due piani

¹⁾ La ruota N si può costruire, data la M, ricavando il blocco cilindrico centrale in piombo-antimonio, con un peso press'a poco uguale a quello della M, e completando il diametro voluto con la parte nn , for-

inclinati della fig. 6, e si lascino cadere contemporaneamente. Le due ruote avendo lo stesso peso, si può ammettere che i loro assi soffriranno lo stesso attrito sui binarii. Poichè sono obbligate a rotolare, quella che ha maggior momento d'inerzia (M) assorbirà una parte maggiore della energia totale disponibile mgh , e quindi il suo moto traslatorio procederà con minor velocità in confronto a quello della ruota N di minor momento d'inerzia.

Fig. 6.

E succede questo, che la N giunge prima al fondo della sua discesa e risale una parte del piano inclinato di sinistra incontro alla M che discende ancora, finchè avviene lo scontro; dopo lo scontro, la ruota N torna indietro e la M l'accompagna, ben tosto distanziata, finchè si incontrano di nuovo, la N discendendo e la M salendo sul piano di destra; e quivi si fermano a contatto.

Si dispongano le due ruote a capo dello stesso piano inclinato, l'una di seguito all'altra, in contatto.

Se la ruota N è a valle della ruota M , abbandonandole, entrambe cominciano a discendere rotolando regolarmente come dianzi e la N distanzia tosto la M , accelerando in suo confronto: essa giunge al punto più basso, risale il secondo piano inclinato, poi ricade scontrandosi con la M che sopraggiunge, e quivi entrambe si fermano a contatto. Che se invece, si dispongano le due ruote a capo del primo piano inclinato, con la M a valle della N , cioè la M pronta a partire per la prima e la N retrostante a contatto, il sistema è in

mata con due anelli di lamiera, foggianti di sbalzo in forma di grondaia a sezione rettangola e poi calzati sul cilindro di piombo. Si possono creare sulla periferia delle due ruote varie condizioni di attrito, per gli scopi esposti più innanzi, cerchiandole con anelli metallici bruniti o altrimenti, oppure con anelli elastici di gomma, etc.

equilibrio e non rotola: l'*attrito al distacco* delle due periferie impedisce alla N di acquistare una velocità iniziale qualunque, che vorrebbe sempre essere maggiore di quella della M che le sta innanzi; onde si contrastano immutabilmente. Quando invece la N preceda la M, il distacco avviene, si può dire *virtualmente*, fin dallo stato di quiete.

Se, partendo da una piccola inclinazione del piano del binario, la si aumenti a poco a poco, giunge il momento in cui le due ruote a contatto, N a monte, M a valle, cominciano a scorrere, *pattinando* sul binario, e avanzano senza distaccarsi e senza quasi rotolare.

Ancora: si dispongano N ed M nello stesso ordine a contatto. Se entrambe sono libere, non cadono; se invece si fissa la retrostante N con un arresto (una pallina di cera sull'asse), si riesce a far partire la M dando dei piccoli colpi al sostegno, con che si sminuisce l'attrito al distacco. Se N è libera, gli stessi scuotimenti non hanno alcun effetto.

Queste esperienze possono fornire un esempio per il principio dei lavori virtuali, applicato ad un caso d'attrito radente. Se m è la massa di ciascuna delle due ruote, e si indichino con J i momenti d'inerzia, con ω le velocità angolari e con V le velocità di traslazione dei centri d'inerzia, l'equazione della energia è

$$m g h = \begin{cases} \frac{1}{2} J_N \omega_N^2 + \frac{1}{2} m V_N^2 \\ \frac{1}{2} J_M \omega_M^2 + \frac{1}{2} m V_M^2, \end{cases}$$

che si può abbreviare così:

$$m g h = \widehat{N} + \overline{N} = \widehat{M} + \overline{M},$$

segnando cioè con un arco o una linea le *energie* risp. rotatoria o traslatoria delle due ruote. Allora

$$\overline{N} - \overline{M} = \widehat{M} - \widehat{N}.$$

Se il secondo membro è positivo, sarà anche

$$\overline{N} > \overline{M}$$

ossia, data l'uguaglianza delle masse,

$$V_N > V_M$$

L'attrito al distacco delle due ruote N, M dipende ora dalla pressione periferica, e questa è funzione diretta della differenza fra le due velocità virtuali, $\Delta V_N - \Delta V_M$: quanto maggiore sia questa velocità differenziale, tanto più grande è la resistenza d'attrito al distacco.

L'altro fattore del lavoro virtuale dell'attrito è poi un'altra funzione diretta della differenza delle due velocità periferiche virtuali o, se vuolsi, delle velocità angolari virtuali, $\Delta \omega_N + \Delta \omega_M$.

Se le ruote fossero identiche, non solo nella massa ma anche nel momento d'inerzia, si avrebbe: $\Delta V_N = \Delta V_M$, cioè sarebbe nulla la pressione periferica, e $\Delta \omega_N = \Delta \omega_M$ cioè sarebbe $2 \Delta \omega$ lo scorrimento virtuale; il quale realizzandosi però senza pressione, si sottrarrebbe all'attrito per il minimo scuotimento: le due ruote rotolerebbero indipendenti.

Ora, il prodotto dei due fattori del lavoro virtuale dell'attrito, $(\Delta V_N - \Delta V_M)(\Delta \omega_N + \Delta \omega_M)$, differisce per il solo fattore r , raggio di rotolamento dell'asse delle ruote sul binario, dall'espressione $\Delta V_N^2 - \Delta V_M^2$, che moltiplicata per $\frac{1}{2}m$ dà la differenza delle energie cinetiche virtuali di traslazione, ossia il lavoro virtuale motore $(\Delta \bar{N} - \Delta \bar{M})$; che è uguale puranche alla differenza delle energie di rotazione $(\Delta \hat{M} - \Delta \hat{N})$. Finchè questa sia positiva, cioè le ruote cadano nel senso N M, il lavoro virtuale motore non può superare il lavoro virtuale resistente; donde, condizione d'equilibrio.

Se le ruote fossero *identiche* in tutto, e con la periferia perfettamente *liscia*, cadrebbero indipendenti con uguali velocità, su ogni piano inclinato; abbandonate insieme a contatto, rotolerebbero a contatto. Ma è prevedibile, senza tentare l'esperienza, che nelle condizioni reali esisterà sempre un lavoro virtuale d'attrito al distacco maggiore di zero, a vincere il quale occorrerà una energia disponibile di caduta, variabile da caso a caso. A seconda, cioè, del coefficiente d'attrito fra le due periferie, esisterà in ogni caso una certa inclinazione

critica del binario al disotto della quale il sistema delle due ruote identiche a contatto non potrà cominciare a rotolare come un tutto. Superata questa inclinazione, le due ruote acquisterebbero una velocità di rotazione, che, in presenza dell'attrito periferico, dovrebbe tendere ad un valore costante di regime, tanto più rapidamente raggiunto quanto meno distante fosse la inclinazione assunta da quella critica.

Salvo le difficoltà pratiche per rendere uniformi le condizioni d'attrito sulle due periferie, e l'effetto delle vibrazioni, v'ha qui il principio di un metodo per determinare il coefficiente d'attrito, — almeno per un apparecchio di carattere unicamente dimostrativo o comparativo.

Questo apparecchio potrebbe ricevere la disposizione indicata nella fig. 7. Le due ruote M, M, *identiche*, poggiano

Fig. 7.

con le gole intagliate presso gli estremi dei loro assi sopra un *binario mobile*, formato con due corde senza fine (di due o tre mm. di diametro) passanti su due coppie di puleggie F, F, solidali a due a due su gli stessi assi agli estremi dell'apparecchio. Questi assi sono collegati fra loro da una vite perpetua, condotta da un motore elettrico E (in serie), cosicchè le guide del binario scorrono nella propria direzione con una stessa velocità. Il castello, avente una sezione ad U, che sopporta il piano inclinato, è profilato in basso in un settore circolare che risiede sopra un piedestallo analogamente profilato, costituendo arco diviso in gradi a partire dal centro e

di fronte a un segno di riferimento che dà la verticale, cui corrisponde la posizione orizzontale per il binario mobile. Un bottone a scrupolo, non indicato in figura, permette di variare lentamente l'inclinazione. V' ha una disposizione di commutatore automatico che fa girare il motore E sempre nel senso di trascinare il binario in salita; cosicchè quando il piano è orizzontale, il circuito è aperto e il binario immobile. Un reostato a corsoio permette di regolare la velocità delicatamente, e un tachimetro, condotto dalle puleggie F, indica direttamente in m. la velocità del binario. Alle estremità del binario si trovano due arresti, in forma di uncini raccordati al piano stesso, che trattengono verso l'interno gli assi delle ruote M.

Partendo da una piccola inclinazione, si supponga di dare al binario una velocità moderata: le ruote M vengono trasportate in alto solidalmente, fino all'arresto. Allora si faccia crescere lentamente l'inclinazione: giungerà un momento in cui le due ruote cominceranno a cadere, rotolando. Siccome il moto di caduta in principio sarà assai lento, si avrà tempo di regolare l'inclinazione, o la velocità, in maniera che il sistema raggiunga l'equilibrio dinamico; le due ruote rimangano cioè con i loro centri d'inerzia immobili nello spazio, rotolando su gli assi, con le periferie animate da velocità uguali e contrarie in contatto. La pressione nel punto di contatto essendo evanescente, il lavoro d'attrito a considerarsi dipenderà dall'attrito superficiale limite delle due circonferenze, quale caratterizzerebbe per es. lo *scorrimento* di un velo di lubrificante interposto; due superfici perfettamente piane vicinissime e parallele, comprendenti uno strato sottile di lubrificante, per uno scorrimento tangenziale metterebbero in giuoco semplicemente la viscosità del liquido. È il caso della *linea di contatto* delle due ruote M.

Raggiunto l'equilibrio dinamico per una data inclinazione, un piccolo aumento o una piccola diminuzione della velocità del binario, verrà trasmesso in una traslazione analoga ai due assi: se la velocità cresce, i centri delle ruote salgono, se diminuisce i centri discendono, per l'importo della variazione. Viceversa, per una data velocità, una variazione

nella inclinazione critica, produrrà una rottura dell'equilibrio dinamico, perfettamente invertibile: aumentando l'inclinazione, i centri delle due ruote cominceranno a discendere, diminuendola saliranno.

La disposizione del binario mobile serve appunto per valutare con sicurezza la velocità di traslazione corrispondente, per ogni data inclinazione critica, all'equilibrio dinamico.

Si suppone che gli assi delle due ruote non soffrano scorrimento sul binario. Sarebbe facile dimostrare che la condizione affinchè gli assi rotolino senza scorrere, è

$$A \geq \frac{J}{J + m r^2} \operatorname{tg} \alpha,$$

ove sia A il coefficiente di attrito radente degli assi sulle corde del binario, J il momento d'inerzia, m la massa delle ruote ed r il raggio di rotolamento. O altrimenti, se ρ è il raggio d'inerzia,

$$A \geq \frac{1}{1 + \frac{\rho^2}{r^2}} \operatorname{tg} \alpha.$$

Finchè l'inclinazione α sia piccola, gli assi rotoleranno senza scorrere. E sarà conveniente che il raggio di rotolamento non sia troppo piccolo in confronto al raggio d'inerzia, e le corde del binario non sieno lubriche, per assicurare una sufficiente aderenza fra larghi limiti.

Per ogni data inclinazione del binario, vi sarà dunque una certa velocità critica, e per ogni data velocità una certa inclinazione critica, che danno l'equilibrio dinamico: a questo corrisponde in ogni caso una velocità di traslazione nulla, rispetto al basamento, per il sistema delle due ruote. Per ciascuna data inclinazione α , la velocità critica V , letta al tachimetro, e moltiplicata per il rapporto R/r dei raggi, periferico e di rotolamento delle ruote M , darà la velocità tangenziale di ciascuna sulla linea di contatto; la velocità relativa di scorrimento sarà $2V \frac{R}{r}$. A questo scorrimento si oppone una forza tangenziale d'attrito, che diciamo σ per la velocità *uno*;

cosicchè il lavoro speso nell'attrito di scorrimento sarà, nella unità di tempo,

$$2V \frac{R}{r} \sigma \cdot 2V \frac{R}{r} ,$$

che all'equilibrio dinamico deve uguagliare il lavoro motore

$$2 m g \operatorname{sen} \alpha \cdot V .$$

Se ne deduce il coefficiente d'attrito di scorrimento limite

$$\sigma = \frac{1}{2} m g \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{V} ,$$

il quale caratterizza la viscosità del lubrificante che si suppone interposto nella linea di contatto delle due ruote M.

Abbiamo supposto la resistenza di scorrimento proporzionale alla velocità; è però più ragionevole scrivere ⁴⁾,

$$\sigma = K \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{f(V)} ,$$

ove K indichi una costante dell'apparecchio. Questa funzione della velocità si potrà riconoscere facendo esperienze con inclinazioni α diverse, a parità di altre condizioni; la velocità V d'altra parte non può variare fra limiti estremamente distanti.

L'espressione della costante dell'apparecchio mostra che converrà limitare il raggio R delle ruote, ossia anche il loro raggio d'inerzia, e dare ad esse, cioè, la forma di rulli cilindrici piuttosto che di volanti, con assi di rotolamento non troppo sottili: nulla sembra opporsi a prendere prossimamente

⁴⁾ Il Dettmar, col suo noto apparecchio (*Elektrotechn. Zeitschr.* 1899; pag. 380), che cimenta gli olii lubrificanti fra perni e cuscinetti analoghi a quelli delle macchine della pratica, trova difatti che il « coefficiente d'attrito » cresce come la radice quadrata della velocità dell'albero. Il Lasche (*Zeitschr. d. Ver. D. Ing.* 1902; pag. 1889) trova che questa legge si limita a velocità lineari non superiori a 2,5 m/sec, e da questa fino a 10 m/sec, l'attrito cresce proporzionalmente alla radice quinta della velocità; di poi, tende a divenire costante. Ma si tratta di attrito *con pressione*.

$r = R$. L'equazione si riduce, in sostanza, alla forma $\sigma.f(V) = P \sin \alpha$.

Questo apparecchio potrebbe servire all'esame di lubrificanti molto viscosi, che male si sottopongono alla prova degli ordinari viscosimetri a efflusso; salvo la difficoltà pratica di costruire due cose perfettamente identiche, come dovrebbero essere i rulli M e le corde del binario, e salvo l'effetto delle vibrazioni del motore.

5. — Comunque sia, con esperienze sul piano inclinato, si possono mettere in luce varii effetti dall'attrito. Fra l'altro, è possibile determinare qual è la direzione della forza d'attrito in condizioni d'equilibrio, che in generale non può venire assegnata se manca la velocità fra i punti di contatto.

I pattinatori sanno per pratica che in giornate eccessivamente fredde, il loro esercizio è ben più faticoso che non quando la temperatura sia prossima a 0° C. L'attrito del metallo sul ghiaccio è allora assai più forte quando la pressione del tagliente del pattino non riesce ad abbassare la temperatura di fusione del ghiaccio fino al disotto della temperatura regnante, in modo da produrre l'acqua temporaneamente necessaria alla lubrificazione delle due superfici solide.

Non è difficile mostrare con una esperienza didattica questo effetto grandemente lubrificante che accompagna il fenomeno del rigelo, facendo scendere o *risalire* un grosso blocco di ghiaccio sopra un piano inclinato, quando con una pressione normale sufficiente si faccia sparire l'attrito a secco.

Si costituisce il piano inclinato con una coppia di fili di ferro zincato (di 3-4 mm) tesi fortemente a 45° fra il terreno e una parete, distanti fra loro 5 o 6 cm, circa $\frac{1}{3}$ del lato del blocco parallelepipedo di ghiaccio che vi si appoggia sopra per il lungo, fissandolo temporaneamente a capo del piano inclinato: se pesa una diecina di Kg. dopo qualche quarto d'ora i fili di ferro sono affondati nel ghiaccio fin quasi a metà, come mostra in sezione G la figura 8. Allora si avvolge una corda sulla mezzeria per servire d'attacco ad un legame, come G A, destinato a sostenere il peso per l'equilibrio. Questo legame passa sopra una puleggia A, abbastanza alta da fornire una componente che compensi in buona parte

la pressione normale del blocco sui fili del binario inclinato: si tratta di regolare l'altezza di A in maniera che il peso equilibratore non possa vincere l'attrito di distacco e la componente normale sia ridotta abbastanza piccola da lasciare un

Fig. 8.

attrito a secco, ciò che è facile ottenere se la temperatura ambiente è un po' sotto 0°C . L'esperimento riesce bene in un cortile, d'inverno. Allora, se si aumenta la pressione, mediante una trazione normale eseguita sulla corda TG' , il blocco scorre, verso il basso o l'alto, a seconda del valore del peso d'equilibrio. Meglio convincente è il risultato che si osserva con la disposizione in doppio, mostrata dalla fig. 8. Due piani inclinati uguali, a 45° col terreno, come sopra è descritto, sostengano due blocchi di 10 Kg. ciascuno, che si fanno equilibrio col legame GAG'' passante sopra una carrucola A (dolce e robusta!), di cui si possa regolare l'altezza, intorno ai 2 m. sul vertice dei piani FF' , variando insieme la lunghezza del legame. Sotto i due blocchi G' e G'' pende una cordicella $G'TG''$ tesa in angolo retto da una pallina fissata nel suo mezzo, per marcare le normali ai due piani inclinati. Esercitando una trazione in direzione TG' , il blocco G' risale un po' il suo binario e il blocco G'' discende di altrettanto. E viceversa.