RISOLUZIONE DI PROBLEMI
RELATIVI ALL' ELLISSE ED AL CIRCOLO.

Sulla curva luogo geometrico dei raggi di curvatura di un' ellisse data.

1° Dal centro di un' ellisse, e sulla direzione di un semidiametro r si prendano altrettante rette eguali ai rispettivi raggi ρ di curvatura dell' ellisse data; si domanda la curva che passa per le successive estremità delle rette ρ .

Sia un' ellisse di semiassi a, b con l' origine al centro, r un semidiametro di un punto qualunque (x, y) , e ρ il raggio di curvatura, si avranno come è noto l'equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\rho = \frac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}{a^4 b^4}$$

Ciò posto se dal centro dell' ellisse lungo il semidiametro r si portino le lunghezze uguali al raggio di curvatura ρ , e si chiamino X, Y le coordinate delle loro estremità, si avrà ancora

$$\rho^2 = X^2 + Y^2, \quad x = \frac{rX}{\rho}, \quad y = \frac{rY}{\rho}$$

e la curva luogo geometrico dei raggi ρ si otterrà dall' eliminazione delle x, y entro le precedenti equazioni. Sia u l'angolo polare che ambedue i raggi r, ρ formano con l'asse delle x , avremo

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u$$

e quindi dall' equazione dell' ellisse, e dal valore di ρ deduciamo

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}, \quad a^8 b^8 \cdot \rho^2 = r^6 (a^4 \sin^2 u + b^4 \cos^2 u)^3$$

d'onde per l'equazione polare della nuova curva otterremo

$$a^2 b^2 \rho^2 = \frac{(a^4 \sin^2 u + b^4 \cos^2 u)^3}{(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^3}$$

Per l'equazione in coordinate ortogonali, sostituiamo i valori

$$\cos u = \frac{X}{\rho}, \quad \sin u = \frac{Y}{\rho}, \quad \rho^2 = X^2 + Y^2$$

si avrà

$$a^2 b^2 (X^2 + Y^2) (a^2 Y^2 + b^2 X^2)^3 = (a^4 Y^2 + b^4 X^2)^3$$

la quale elevandosi all'ottavo grado, indicherà che la curva è di ottavo ordine. Essa è chiusa ed i suoi assi sono nella direzione degli assi $2a$, $2b$, della ellisse, ed eguali ai parametri $\frac{2b^2}{a}$, $\frac{2a^2}{b}$, i quali ridotti alla loro metà rappresentano i raggi di curvatura ai vertici dell'ellisse: alla stessa conseguenza si giunge col fare successivamente nell'equazione della curva $Y = 0$, ed $X = 0$, il che porge

$$X = \frac{b^2}{a}, \quad Y = \frac{a^2}{b}.$$

2°. Il perimetro della nuova curva si riporta ai trascendenti ultra ellittici, ma la sua quadratura dipende da integrali, che si riferiscono al rapporto π . Infatti facendo uso delle coordinate polari, la formola per la quadratura è

$$A = \frac{1}{2} \int \rho^2 du$$

e per il nostro caso diviene

$$A = \frac{1}{2a^2 b^2} \int \left(\frac{a^4 \sin^2 u + b^4 \cos^2 u}{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} \right)^3 du$$

Questo integrale si può esprimere in termini finiti; integrando fra i limiti $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, otterremo la quarta parte dell'area della nuova curva: per ridurre l'integrale alla forma di altri integrali definiti già cogniti decomponiamo per mezzo della divisione la frazion trigonometria sotto il vincolo integrale, il che si eseguirà facilmente dopo di aver moltiplicato il numeratore, e denominatore per $(a^2 + b^2)^3$: pongasi di più per brevità

$$M = a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u$$

si ricaverà per la quarta parte dell'area

$$A = \frac{(a^2 + b^2)^3}{2a^2 b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2) M} \right)^3 du$$

quale dallo sviluppo della potenza, diviene

$$A = \frac{(a^2 + b^2)^3}{2a^2b^2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} du - \frac{3a^2b^2}{(a^2 + b^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{M} + \frac{3a^4b^4}{(a^2 + b^2)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{M^2} - \frac{a^6b^6}{(a^2 + b^2)^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{M^3} \right)$$

Ora in diverse mie Memorie pubblicate nel 1845, e 1846 nel *Journal de Mr. Crelle* à Berlin tom. 31, e 34, non che in altra mia Memoria nel giornale Arcadico 1847 mi occorre di dover calcolare questi integrali definiti, quali sono

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{M} = \frac{\pi}{2ab}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{M^2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{ab^3} + \frac{1}{ba^3} \right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{M^3} = \frac{\pi}{16} \left(\frac{3}{ab^5} + \frac{3}{b^5a} + \frac{2}{a^3b^3} \right)$$

Sostituendo tali valori, e riducendo, si avrà

$$A = \frac{\pi}{4} \left(\frac{(a^2 + b^2)^3}{a^2b^2} - \frac{15(a^2 + b^2)^2}{8ab} + \frac{ab}{2} \right)$$

e che potrebbe scriversi

$$A = \frac{\pi}{4} \left(\frac{(a^2 + b^2)^2 (a - b)^2}{a^2b^2} + \frac{(a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2}{8ab} \right)$$

La supposizione di $a = b$, ridurrà il secondo membro a, $\frac{\pi a^2}{4}$ cioè alla quarta parte dell' area di un circolo, come d'altronde è chiaro. Alla riportata curva ci si associa con una dipendenza del tutto semplice la curva luogo geometrico delle normali: infatti per la normale $n = R$, nell' ellisse, e per il raggio di curvatura ρ , si ha

$$\rho = \frac{a^2}{b^4} R^3, \quad \text{ovvero} \quad a^2 b^2 \rho^2 = \frac{a^6}{b^6} R^6$$

Ma per l'equazione polare si è trovato

$$a^2 b^2 \rho^2 = \left(\frac{a^4 \sin^2 u + b^4 \cos^2 u}{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} \right)^3$$

d' onde si ricava per la sostituzione l'equazione polare della nuova curva

$$R^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a^4 \sin^2 u + b^4 \cos^2 u}{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} \right)$$

In coordinate ortogonali si troverà

$$a^3 (X^2 + Y^2) (a^2 Y^2 + b^2 X^2) = b^2 (a^4 Y^2 + b^4 X^2)$$

e che appartiene al quart'ordine: di questa pure il perimetro si riporta ai trascendenti ultra ellittici, ma facile, e semplice sarà l'espressione della sua quadratura.

Sopra alcune formole relative al quadrilatero iscritto al circolo.

1° Siano a, b, c, d i quattro lati consecutivi di un quadrilatero iscritto al circolo, e sia x la diagonale dei lati a, b , e dei lati c, d e sia pure y la diagonale dei lati a, c e dei lati b, d . È noto che nel quadrilatero iscritto gli angoli opposti sono supplementari per cui chiamando θ , l'angolo compreso dai due lati a, b , si avrà per la diagonale x la doppia espressione

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta, \quad x^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cos \theta$$

d'onde si trae

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}}{2(ab + cd)}.$$

Sostituito il valore di $\cos \theta$ in uno qualunque dei due valori di x^2 , si avrà

$$x^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$$

Nello stesso modo per l'altra diagonale y^2 si ricaverà

$$y^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Facendo il prodotto $x^2 y^2$, si ottiene

$$xy = ac + bd$$

cioè che nel quadrilatero iscritto il prodotto delle due diagonali è eguale alla somma dei prodotti dei lati opposti: Il valore di $\sin \theta$ servirà per calcolare la superficie S : infatti avremo per essa

$$S = \frac{(ab + cd)}{2} \sin \theta$$

e quindi dedurremo

$$16S^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

Il secondo membro è una funzione simmetrica delle quantità a, b, c, d , e ponendo $a + b + c + d = 2p$, si ricava facilmente

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d).$$

Le riportate formole con altre molte sono tutte di già note, e le abbiamo richiamate per farne conoscere delle nuove, che si riportano al raggio del circolo circoscritto: di più queste somministrano un'applicazione all'analisi di Diofanto.

2°. Sia s_1 la superficie del triangolo di lati (a, b, x) , s_2 di lati (c, d, x) , s_3 di lati (a, c, y) , s_4 di lati (b, d, y) , avremo $s_1 + s_2 = s_3 + s_4 = S$. Ciò posto sia r il raggio del circolo circoscritto al quadrilatero, sarà nello stesso tempo circoscritto ai quattro triangoli s_1, s_2, s_3, s_4 ; per cui come è noto si avrà

$$r = \frac{abx}{4s_1} = \frac{cdx}{4s_2}, \quad \text{od anche} \quad r = \frac{(ab + cd)x}{4(s_1 + s_2)} = \frac{(ab + cd)x}{4S}$$

Nella stessa guisa si troverebbe

$$r = \frac{(ac + bd)y}{4(s_3 + s_4)} = \frac{(ac + bd)y}{4S}$$

Moltiplicando fra di loro i due valori di r , e sostituendo $xy = ac + bd$, si otterrà

$$r^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{16S^2}$$

Quest' espressione è somigliante a quella del raggio circoscritto ad un triangolo, qualora ciascun fattore binomio si rappresenti per un quadrato, e dati i quattro lati del quadrilatero iscritto si conoscerà il raggio del circolo: di più è una funzione simmetrica dei quattro lati a, b, c, d , e dati tre con il raggio r , dipenderà il valore del quarto lato da una equazione completa di quarto grado: Nell' Opera *L. Euleri Opera posthuma Petropoli* 1862 al tomo 1. pag. 229, Eulero enuncia un teorema dicendo che onde in un quadrilatero iscritto al circolo, i quattro lati, e le due diagonali si esprimano in numeri razionali fa d'uopo che il prodotto $(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)$ si renda un quadrato perfetto, il che si otterrà quando presi ad arbitrio cinque numeri f, g, h, p, q si prenda

$$a = fgh(q^2 - p^2), \quad b = g(fp + gq)^2 - h^2p^2$$

$$c = 2fghpq + h(f^2 + g^2 - h^2)q^2, \quad d = f(gp + fq)^2 - h^2q^2$$

$$x = f\left(fg(p^2 + q^2) + (f^2 + g^2 - h^2)pq\right), \quad y = g\left(fg(p^2 + q^2) + (f^2 + g^2 - h^2)pq\right)$$

Eulero fa di più osservare che con questi valori non si potrebbe mai rendere un quadrato perfetto la superficie S : terminiamo questo breve articolo col mostrare come il valore di r^2 si possa esprimere in funzione dei quattro coefficienti di un'equazione di quarto grado, della quale le radici siano a, b, c, d : sia adunque l'equazione

$$z^4 + 4Az^3 + 6Bz^2 + 4Cz + D = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d) = 0$$

si avrà

$$4A = -(a + b + c + d), \quad 6B = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

$$4C = -(abc + abd + acd + bcd), \quad D = abcd$$

Ora dal precedente valore di r^2 , e di S^2 otterremo

$$16r^2 (p - a) (p - b) (p - c) (p - d) = (ab + cd) (ac + bd) (ad + bc)$$

od anche

$$16r^2 (p^4 + 4Ap^3 + 6Bp^2 + 4Cp + D) = (ab + cd) (ac + bd) (ad + bc)$$

Ma per il semiperimetro p , abbiamo

$$2p = a + b + c + d = -4A, \quad p = -2A$$

per cui la precedente equazione diverrà,

$$16r^2 (D - 8AC + 24BA^2 - 16A^4) = (ab + cd) (ac + bd) (ad + bc).$$

Resta ancora ad esprimersi il secondo membro in funzione dei coefficienti. Ora nella risoluzione dell'equazioni di quarto grado si calcola una ridotta di terzo grado delle quali le tre radici sono i tre fattori binomi e si ha per il prodotto delle medesime

$$(ab + cd) (ac + bd) (ad + bc) = 8 \left((2A^2 - 3B) D + 2C^2 \right).$$

d'onde

$$r^2 = \frac{(2A^2 - 3B) D + 2C^2}{2 (D - 8AC + 24BA^2 - 16A^4)}$$

Il numeratore potrà ridursi ad un quadrato perfetto, quante volte i coefficienti A, B, C, D si facciano dipendere da quelle cinque quantità f, g, h, p, q per la sostituzione dei valori di a, b, c, d di sopra riportati. Se il quadrilatero si riducesse al quadrato sarà $a = b = c = d$, $B = A^2$, $C = A^3$, $D = A^4$, $A = -a$ e la precedente formola diviene

$$r^2 = \frac{A^2}{2}, \quad r = -\frac{A}{\sqrt{2}}, \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

come d'altronde è noto.

BARNABA TORTOLINI.