VII. *Einige Versuche über Induction in körperlichen Leitern; von Dr. F. Himstedt,*
Privatdocent an der Universität Freiburg i. Br.

Durch die Arbeiten von Helmholtz¹⁾ und die damit zusammenhängenden vieler anderen Autoren ist festgestellt worden, dass eine Entscheidung zwischen den verschiedenen Elementargesetzen der Electricität durch das Experiment nur von solchen Versuchen zu erwarten ist, bei welchen in dem Leiter eine Anhäufung freier Electricität stattfindet, und weiter, dass eine solche Anhäufung in Wirklichkeit auftreten kann bei den Inductionerscheinungen in körperlichen Leitern. Die Versuche, welche bisher über körperliche Induction angestellt sind, beschränken sich meines Wissens ausschliesslich darauf, überhaupt nur das Vorhandensein inducirter Electricität nachzuweisen und die Richtung der auftretenden Ströme festzustellen, sehen aber von einer genauern Messung derselben ab. Es schien mir deshalb nicht ohne Interesse zu sein, eine quantitative Bestimmung der in einem körperlichen Leiter inducirten Electricität zu versuchen. Ich muss jedoch vorweg bemerken, dass bei den hier zu beschreibenden Versuchen von vorn herein eine messbare Ansammlung freier Electricität in dem Leiter nicht zu erwarten war, und dass ihre Bedeutung nach dieser Richtung sich darauf beschränkt, durch eine Behandlung der einfachsten Fälle vielleicht die der complicirteren vorbereitet zu haben, welche geeignet sind, auf experimentellem Wege eine Entscheidung zwischen den Elementargesetzen herbeizuführen.

Eine selbständige Bedeutung glaube ich den Versuchen nach einer andern Richtung beimessen zu dürfen, insofern sie eine experimentelle Prüfung der von Kirchhoff aufgestellten Bewegungsgleichungen der Electricität in nicht linearen Leitern enthalten. Kirchhoff hat diese Gleichungen aufgestellt, ausgehend von denselben Voraussetzungen, welche W. Weber's Betrachtungen zu Grunde liegen, und wenn auch der Ausdehnung dieser Annahmen auf nicht lineare Leiter theoretische

1) Helmholtz, Crelle's Journ. 72. u. 75.

Bedenken nicht entgegenstehen, so wird eine directe Bestätigung doch immerhin nicht nutzlos erscheinen, da jene Gleichungen die Grundlage bilden für alle Berechnungen über körperliche Induction.

Als weiteres Resultat der Versuche kann ich dann noch hervorheben, dass durch dieselben der specifische Leitungswiderstand eines festen Leiters bestimmt wurde, der die Form einer Kugel besass, während bisher eine solche Bestimmung nur für die Drahtform gemacht war.

Die Versuche zerfallen in zwei Gruppen. In der ersten werden die Inductionerscheinungen untersucht, welche durch bewegte Magnete in einer ruhenden Kupferkugel entstehen, in der zweiten diejenigen, welche in einer in einem homogen magnetischen Felde rotirenden Kugel auftreten. Die Ueberlegungen, welche den Versuchen zu Grunde liegen, sind bei beiden Gruppen die nämlichen. Versetzen wir einen Magnet in der Nähe eines Leiters in eine schwingende Bewegung, so inducirt er in diesem electriche Ströme von solcher Art, dass dieselben rückwärts die Bewegung des Magnets dämpfen. Berechnen wir also zuerst aus der bekannten electromotorischen Kraft des Magnets die Stärke und Richtung der inducirten Ströme, dann das von diesen auf den Magnet ausgeübte Drehungsmoment und führen dieses in die Bewegungsgleichung des Magneten ein, so liefert uns die Integration derselben eine Beziehung zwischen dem Drehungsmoment und dem logarithmischen Decrement der Schwingungsbögen. Das letztere können wir mit grosser Schärfe beobachten und haben dann in der Vergleichung des beobachteten mit dem berechneten Werthe ein Mittel, die Richtigkeit der für die inducirte Electricität abgeleiteten Ausdrücke zu prüfen. Rufen wir die Induction durch die Bewegung eines Leiters in der Nähe von magnetischen Massen hervor, so üben diese auf die inducirten Ströme ponderomotorische Kräfte aus, welche die Bewegung des Leiters dämpfen, und wir haben also die nämlichen Verhältnisse.

I. Gruppe.

Die Betrachtungen und Rechnungen, welche den Versuchen dieser Gruppe zu Grunde liegen, habe ich zuerst in

meiner Dissertation¹⁾ durchgeführt, und finden sich dieselben ausserdem in grosser Uebersichtlichkeit und Allgemeinheit in einer Arbeit von Prof. Riecke: „Ueber die Bewegung der Electricität in körperlichen Leitern“.²⁾ Ich beschränke mich deshalb hier darauf, nur die zum Verständniss nothwendigen Formeln anzugeben und werde mich dabei der Bezeichnungsweise der letztgenannten Arbeit bedienen.

Aufstellung und Integration der Bewegungsgleichungen der Electricität.

Bezeichnen wir die an einem Punkte xyz der Kugel auftretenden Stromcomponenten mit uvw , so gelten für diese die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda u + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A^2 \frac{dU}{dt} - X = 0, & \lambda v + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + A^2 \frac{dV}{dt} - Y = 0, \\ \lambda w + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + A^2 \frac{dW}{dt} - Z = 0, \end{cases}$$

in welchen φ das Potential der freien Electricität, XYZ die Componenten der äusseren electromotorischen Kräfte, λ der Leitungswiderstand, $A^2 = \frac{V^2}{c}$, c die Constante des Weber'schen Gesetzes und nach Helmholtz:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1-k}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \iiint \frac{u'}{r} dx' dy' dz' \\ V &= \frac{1-k}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \iiint \frac{v'}{r} dx' dy' dz' \\ W &= \frac{1-k}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \iiint \frac{w'}{r} dx' dy' dz' \\ \Psi &= \iiint \left(u' \frac{\partial r}{\partial x} + v' \frac{\partial r}{\partial y} + w' \frac{\partial r}{\partial z} \right) dx' dy' dz' \\ r^2 &= (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \end{aligned}$$

wo $u'v'w'$ zu $x'y'z'$ gehört. Hierzu kommen noch:

$$(1a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \frac{d(\Delta \varphi)}{dt}$$

für einen Punkt im Innern und:

1) Himstedt, Ueber die Schwingungen eines Magnets unter dem dämpfenden Einfluss einer Kupferkugel. Göttingen 1875.

2) Riecke: Abhdl. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. 21. 1876.

$$(1b) \quad u_1 \frac{dx_1}{dn} + v_1 \frac{dy_1}{dn} + w_1 \frac{dz_1}{dn} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{d^2 \varphi}{dt dn} - \frac{d^2 \varphi_a}{dt dn} \right\}$$

für einen Punkt der Oberfläche $x_1 y_1 z_1$, dessen nach dem Innern gehende Normale n ist. φ ist der dem innern, φ_a der dem äussern Raume entsprechende Werth des Potentials.

Um die Werthe der XYZ zu bestimmen, legen wir unseren Betrachtungen ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, dessen Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Kugel fällt, dessen X -Axe nach Norden, dessen Y -Axe nach Westen und dessen Z -Axe senkrecht nach oben gerichtet ist. Die äusseren electromotorischen Kräfte sollen hervorgebracht werden durch die Bewegung zweier fest miteinander verbundenen Magnete, von denen wir annehmen, dass sie ersetzt werden können, jeder durch zwei von einer geraden Linie getragene Pole, N_1 und S_1 mit den magnetischen Massen $\pm \mu_1$ und N_{11} und S_{11} mit $\pm \mu_2$, deren Lage bestimmt ist durch die Coordinaten:

$$\begin{array}{ll} N_1 x = d_1 y = z = 0 & S_1 x = d_2 y = z = 0 \\ N_{11} x = -d_4 y = z = 0 & S_{11} x = -d_3 y = z = 0 \\ d_1 > d_2 & d_4 > d_3 \end{array}$$

Die Bewegung soll bestehen in einem Hin- und Herschwingen der alle vier Pole tragenden horizontalen Linie um die Z -Axe als Rotationsaxe; die Weite der Schwingungen soll so gering sein, dass wir die dabei auftretenden Aenderungen in den Coordinaten der Pole vernachlässigen können.

Bezeichnen wir die Entfernung des Poles N_1 von einem Punkte xyz der Kugel mit R_1 , so erhalten wir als Beitrag zu den electromotorischen Kräften von diesem Pole:

$$X_1 = -A\mu_1 w_1 \frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial y}, \quad Y_1 = +A\mu_1 w_1 \frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial x}, \quad Z_1 = 0$$

wobei w_1 die Geschwindigkeit von N_1 . Entsprechend erhalten wir für S_1 X_2 Y_2 Z_2 für N_{11} X_4 Y_4 Z_4 für S_{11} X_3 Y_3 Z_3 , und ergeben sich die Componenten der Gesamtkraft dann $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ und ebenso Y und Z . Führen wir Polarcordinaten ein:

$x = \rho \cos \delta$, $y = \rho \sin \delta \cos \psi$, $z = \rho \sin \delta \sin \psi$
und wählen für die Kugelfunctionen die Bezeichnungen von Heine, Handbuch der Kugelfunctionen:

$$C_m^n = \sin^m \delta \mathfrak{P}_m^n(\cos \delta) \cos m\psi \quad S_m^n = \sin^m \delta \mathfrak{P}_m^n(\cos \delta) \sin m\psi$$

$$\mathfrak{P}_m^n(\cos \delta) = \cos \delta^{n-m} - \frac{n-m \cdot n-m-1}{2 \cdot 2n-1} \cos \delta^{n-m-2} + \\ \frac{n-m \cdot n-m-1 \cdot n-m-2 \cdot n-m-3}{2 \cdot 4 \cdot 2n-1 \cdot 2n-3} \cos \delta^{n-m-4} \dots \dots,$$

so wird:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{(x-d_1)^2 + y^2 + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n}{d_1^{n+1}} \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} C_0^n,$$

und setzen wir für die Geschwindigkeit:

$$w_1 = d_1 \frac{d\varphi}{dt} = D \cdot d_1 x e^{xt},$$

so erhalten wir:

$$(2) \quad X = e^{xt} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n \alpha_n^1 C_1^n \quad Y = e^{xt} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n \beta_n^0 C_0^n \quad Z = 0$$

$$(2a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n^1 = ADzn \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left\{ \mu_1 \left(\frac{1}{d_1^{n+1}} - \frac{1}{d_2^{n+1}} \right) \right. \\ \quad \left. + (-1)^{n+1} \mu_2 \left(\frac{1}{d_3^{n+1}} - \frac{1}{d_4^{n+1}} \right) \right\} \\ \beta_n^0 = \frac{n+1}{n} \alpha_n^1, \quad \beta_0^0 = \alpha_1^1. \end{array} \right.$$

Aus den Gleichungen (1) lassen sich die neuen ableiten¹⁾:

$$(3) \quad \frac{d(\Delta \varphi)}{dt} + \frac{4\pi}{\lambda} \Delta \varphi - 4\pi \frac{A^2}{\lambda} k \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0$$

für die Bestimmung des Potentials, und

$$(3a) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 4\pi u = \chi_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} & 4\pi w = \chi_3 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \\ 4\pi v = \chi_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} & \Delta \chi - 4\pi \frac{A^2}{\lambda} \frac{d\chi}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

für die Stromcomponenten uvw .

Unter der Annahme, dass die Abhängigkeit der Grössen $uvw\varphi$ von der Zeit dieselbe wie die der XYZ , genügen wir jenen Gleichungen durch die Reihenentwicklungen²⁾:

1) Vgl. a. a. O.

2) Vgl. über die Integrationsmethode auch Lorberg, Crelle. 71.

$$(4) \quad \begin{cases} q = e^{xt} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n q_n \sum_{m=0}^{\infty} F_n^m S_m^n + \Phi_n^m C_m^n \\ \chi_1 = e^{xt} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n p_n \sum_{m=0}^{\infty} A_n^m S_m^n + A_n^m C_m^n \\ \chi_2 = e^{xt} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n p_n \sum_{m=0}^{\infty} B_n^m S_m^n + B_n^m C_m^n \\ \chi_3 = e^{xt} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n p_n \sum_{m=0}^{\infty} C_n^m C_m^n - \Gamma_n^m S_m^n \end{cases}$$

Die Werthe von q_n und p_n sind bestimmt durch:

$$(4a) \quad \begin{cases} \frac{d^2 q_n}{d\varrho^2} + \frac{2n+2}{\varrho} \frac{dq_n}{d\varrho} - \frac{c^2}{a^2} q_n = 0, \\ \frac{d^2 p_n}{d\varrho^2} + \frac{2n+2}{\varrho} \frac{dp_n}{d\varrho} - \frac{g^2}{a^2} p_n = 0, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt:

$$4\pi \frac{A^2}{\lambda} k \frac{x^2}{\frac{4\pi}{\lambda} + x} = \frac{c^2}{a^2} \quad 4\pi \frac{A^2}{\lambda} x = \frac{g^2}{a^2},$$

und lassen sich die Integrale von (4a) in die Form bringen:

$$q_n = \frac{2^n \Pi(n)}{1.3 \dots 2n+1} \left(1 + \frac{c^2}{2.2n+3} \frac{\varrho^2}{a^2} + \frac{c^4}{2.4.2n+3.2n+5} \frac{\varrho^4}{a^4} \dots \right) \\ p_n = \frac{2^n \Pi(n)}{1.3 \dots 2n+1} \left(1 + \frac{g^2}{2.2n+3} \frac{\varrho^2}{a^2} + \dots \right).$$

Es bleiben dann nur noch die constanten Coëfficienten $F_n^m \Phi_n^m A_n^m$ u. s. w. zu bestimmen, im ganzen 4 Paar. Hierzu benutzen wir die Gleichungen (1) und (1a). Führen wir in diese die Entwicklungen aus (4) ein, so erhalten wir 4 Paar lineare Gleichungen für die 4 Paar Unbekannten. Ueber die Ausführung des eben Gesagten noch Folgendes: Die Gleichung (1a) geht durch die Substitution der Werthe für $u v w$ aus (3) über in:

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \chi_3}{\partial z} = 0,$$

und diese liefert für die in (4) gegebenen Werthe von χ die beiden Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{n+1}{2n+1 \cdot 2n+3} K_{n+1}^m(ABC) + \frac{1}{2 \cdot 2n} \frac{g^2}{a^2} H_{n+1}^m(ABC) = 0, \\ \frac{n+1}{2n+1 \cdot 2n+3} K_{n+1}^m(AB\Gamma) + \frac{1}{2 \cdot 2n} \frac{g^2}{a^2} H_{n+1}^m(AB\Gamma) = 0, \end{cases}$$

wo die Abkürzungen gebraucht sind:

$$K_{n+1}^m = 2 \cdot n + m + 1 \cdot n - m + 1 \cdot A_{n+1}^m + n + m + 2 \cdot n + m + 1 (B_{n+1}^{m+1} - C_{n+1}^{m+1}) \\ - n - m + 2 \cdot n - m + 1 (B_{n+1}^{m-1} + C_{n+1}^{m-1}),$$

$$H_{n-1}^m = 2 A_{n-1}^m - (B_{n-1}^{m+1} - C_{n-1}^{m+1}) + (B_{n+1}^{m-1} + C_{n+1}^{m-1}).$$

Die Gleichungen (1) verwenden wir auch nicht direct in der vorliegenden Form, sondern verwandeln zunächst die darin auftretenden Raumintegrale nach einer von Weingarten¹⁾ gegebenen Methode in Oberflächenintegrale. Es lassen sich hiernach die Gleichungen (1) ersetzen durch die folgenden:

$$(1\alpha) \quad U_1 + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad U_2 + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad U_3 + \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{in denen:}$$

$$U_1 = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{d(r\chi'_1)}{dn} \frac{do}{r^2} + \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} \iint \frac{\varphi' dx'}{r} \frac{do}{dn} + \frac{4\pi}{\lambda} X,$$

$$V = \frac{1-k}{2} \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} \iint \left(\varphi' \frac{dr}{dn} - r \frac{d\varphi_a}{dn} \right) do + \left(\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} + \frac{1}{\lambda} \right) \iint \frac{d(r\varphi')}{dn} \frac{do}{r^2}.$$

U_2 und U_3 ergeben sich aus U_1 durch Vertauschung von $\chi'_1 x' X$ mit $\chi'_2 y' Y$, resp. $\chi'_3 z' Z$. Der obere Index bei χ'_2 u. s. w. soll anzeigen, dass der in einem Punkte der Oberfläche gültige Werth dieser Grösse zu nehmen ist, do bezeichnet ein Oberflächenelement.

Die Gleichungen (1 α) ergeben bei Benutzung von (4) die Relationen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2n}{2n+1} p'_{n-1} A_n^m = \frac{4\pi}{\lambda} \alpha_n^1 - 4\pi \frac{A^2}{\lambda} x^2 \frac{1}{2n+1} q'_{n-1} \Phi_{n-1}^m \\ & - \left(x + \frac{4\pi}{\lambda} \right) \frac{2n \cdot 2n+2}{2n+1 \cdot 2n+3} \frac{n-m+1 \cdot n+m+1}{2n+1} q'_{n-1} \Phi_{n-1}^m, \\ & \frac{2n}{2n+1} p'_{n-1} B_n^m = \frac{4\pi}{\lambda} \beta_n^0 - 4\pi \frac{A^2}{\lambda} x^2 \frac{1}{2 \cdot 2n+1} q'_{n-1} (\Phi_{n-1}^{m-1} - \Phi_{n-1}^{m+1}) \\ & - \left(x + \frac{4\pi}{\lambda} \right) \frac{2n \cdot 2n+2}{2n+1 \cdot 2n+3} q'_{n-1} \\ & \quad \left(\frac{n+m+2 \cdot n+m+1}{2 \cdot 2n+1} \Phi_{n+1}^{m+1} - \frac{n-m+2 \cdot n-m+1}{2 \cdot 2n+1} \Phi_{n+1}^{m-1} \right) \end{aligned} \right.$$

1) Weingarten, Crelle's Journ. 63.

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2n}{2n+1} p'_{n-1} I_n^m = 4\pi \frac{A^2}{\lambda} \kappa^2 \frac{1}{2 \cdot 2n+1} q'_{n-1} (\Phi_{n-1}^{m-1} - \Phi_{n-1}^{m+1}) \\ - \left(\kappa + \frac{4\pi}{\lambda} \right) \frac{2n \cdot 2n+2}{2n+1 \cdot 2n+3} q'_{n-1} \\ \quad \left(\frac{n+m+2 \cdot n+m+1}{2 \cdot 2n+1} \Phi_{n+1}^{m+1} + \frac{n-m+2 \cdot n-m+1}{2 \cdot 2n+1} \Phi_{n+1}^{m-1} \right). \end{array} \right.$$

Ausserdem drei Gleichungen für $A_n^m B_n^m C_n^m$, die aus den vorstehenden sich ergeben durch Vertauschung der griechischen Buchstaben mit lateinischen und durch Fortlassen des ersten Gliedes in den beiden ersten Gleichungen. Die Combination der 4 Paar Gleichungen (5) und (6) behufs Auflösung für die Unbekannten, geschieht am bequemsten so, dass die Werthe aus (6) in (5) eingesetzt werden, wodurch F_n^m und Φ_n^m gefunden wird, und dass dann diese Grössen in (6) eingeführt werden. Es ergibt sich dann ohne weiteres:

$$F_n^m = A_n^m = B_n^m = C_n^m = 0.$$

Berücksichtigen wir bei der Ausrechnung der übrigen Coëfficienten, dass annähernd:

$$\lambda = \frac{1}{5 \cdot 10^{17}}, \quad \frac{A^2}{\lambda} = \frac{1}{2 \cdot 10^6},$$

wir also die erste Grösse gegen die zweite vernachlässigen können, so wird:

$$\begin{aligned} \Phi_n^1 &= \frac{1}{n \cdot q_n} \left\{ 1 - \frac{2n+1}{4n} \frac{\lambda}{\pi} \kappa \right\} \frac{2n-1}{n-1} \alpha_{n-1}^1, \\ A_n^1 &= -\frac{4\pi}{\lambda} \frac{1}{q_n} \left\{ 1 - \frac{4\pi}{2 \cdot 2n+1} \frac{A^2}{\lambda} \alpha^2 \kappa \right\} \frac{\alpha_n^1}{n-1}, \\ B_n^0 &= \frac{4\pi}{\lambda} \frac{1}{q_n} \left\{ 1 - \frac{4\pi}{2 \cdot 2n+1} \frac{A^2}{\lambda} \alpha^2 \kappa \right\} \frac{1}{2} \alpha_n^1, \\ B_n^2 &= \frac{4\pi}{\lambda} \frac{1}{q_n} \left\{ 1 - \frac{4\pi}{2 \cdot 2n+1} \frac{A^2}{\lambda} \alpha^2 \kappa \right\} \frac{n-1}{2n+2} \alpha_n^1, \\ I_n^0 &= -\frac{4\pi}{\lambda} \frac{1}{q_n} \left\{ 1 - \frac{4\pi}{2 \cdot 2n+1} \frac{A^2}{\lambda} \alpha^2 \kappa \right\} \frac{n+2}{2n} \alpha_n^1, \\ I_n^2 &= -\frac{4\pi}{\lambda} \frac{1}{q_n} \left\{ 1 - \frac{4\pi}{2 \cdot 2n+1} \frac{A^2}{\lambda} \alpha^2 \kappa \right\} \frac{n-1}{2n+2} \alpha_n^1. \end{aligned}$$

Alle übrigen Coëfficienten sind gleich Null. a bezeichnet den Radius der Kugel.

Vernachlässigen wir weiter in den Gleichungen (3) die zweiten Glieder, so erhalten wir für die Stromcomponenten:

$$\begin{aligned}
u &= -\frac{1}{\lambda} e^{xt} \sum \varrho^n \left\{ 1 - 2\pi \frac{A^2}{\lambda} \left(\frac{a^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} \right) x \right\} \frac{\alpha^n}{n+1} C_1^n, \\
v &= \frac{1}{\lambda} e^{xt} \sum \varrho^n \left\{ 1 - 2\pi \frac{A^2}{\lambda} \left(\frac{a^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} \right) x \right\} \alpha^n \left(\frac{1}{2} C_0^n + \frac{n-1}{2n+2} C_2^n \right), \\
w &= -\frac{1}{\lambda} e^{xt} \sum \varrho^n \left\{ 1 - 2\pi \frac{A^2}{\lambda} \left(\frac{a^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} \right) x \right\} \alpha^n \left(\frac{n+2}{2n} C_0^n + \frac{n-1}{2n+2} C_2^n \right)
\end{aligned}$$

Drehungsmoment der inducirten Ströme auf die bewegten
Magnete.

Bezeichnen wir die Componenten der ponderomotorischen Kraft, welche ein Punkt xyz der Kugel mit den Stromcomponenten uvw auf den Nordpol N_1 ausübt, mit $\Xi_1 H_1 Z_1$ und entsprechend mit den Indices 2 3 4 dieselben Grössen für die Pole $S_1 S_{11} N_{11}$, so ergibt sich, da wir die Abstände der Pole von der Drehungsaxe mit d bezeichnet haben, das von dem Punkte xyz auf den Magnet ausgeübte Drehungsmoment:

$$A_{xyz} = \sum_{n=1}^{n=4} d_n Z_n.$$

Hieraus berechnet sich das von allen in der Kugel auftretenden Strömen auf die Magnete ausgeübte Drehungsmoment:

$$A = \iiint A_{xyz} \cdot dx \, dy \, dz,$$

die Integration über die ganze Kugel ausgedehnt. Es ist:

$$Z_1 = \mu_1 A \left(u \frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial y} - v \frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial x} \right).$$

wo R_1 wieder die Entfernung des Poles N_1 vom Punkte xyz . Entsprechend bilden sich die übrigen Z , und finden wir durch Einführen der für u und v abgeleiteten Werthe und durch

Entwickeln der $\frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial x}$ u. s. w. nach Kugelfunctionen:

$$\begin{aligned}
A &= -4\pi \frac{A^2}{\lambda} D \cdot x e^{xt} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n^2}{2 \cdot 2n+1 \cdot 2n+3} a^{2n+3} \\
&\left(1 - \frac{8\pi}{2n+1 \cdot 2n+3} \frac{A^2}{\lambda} x a^2 \right) \left\{ \mu_1 \left(\frac{1}{d_1^{n+1}} - \frac{1}{d_2^{n+1}} \right) + (-1)^{n+1} \mu_2 \left(\frac{1}{d_3^{n+1}} - \frac{1}{d_4^{n+1}} \right) \right\}^2.
\end{aligned}$$

Erinnern wir uns der Substitution:

$$\frac{d\varphi}{dt} = D \cdot x e^{xt},$$

so können wir Δ in die Form bringen:

$$(7) \quad \Delta = -P \cdot \frac{d\varphi}{dt} + Q \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

wo dann:

$$(7a) \quad \begin{cases} P = 4\pi \frac{A^2}{\lambda} \sum \frac{n^2}{2 \cdot 2n+1 \cdot 2n+3} a^{2n+3} \\ \left\{ \mu_1 \left(\frac{1}{d_1^{n+1}} - \frac{1}{d_2^{n+1}} \right) + \mu_2 (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{d_3^{n+1}} - \frac{1}{d_4^{n+1}} \right) \right\}^2, \\ Q = 8\pi \frac{A^2}{\lambda} a^2 \frac{P}{2n+1 \cdot 2n+5}. \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichung der schwingenden Magnete.

Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des schwingenden Systems mit K , die von dem Erdmagnetismus und der Suspension herrührenden Kräfte mit T , so ist die Bewegung bestimmt durch:

$$(K - Q) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + T \frac{d\varphi}{dt} + T \cdot \varphi = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert die Beziehung:

$$\frac{P}{K - Q} = 2 \frac{l}{t},$$

wenn mit l das logarithmische Decrement der Schwingungsbögen, mit t die Schwingungsdauer bezeichnet wird. Bringen wir die Grössen P und Q in die Form:

$$P = \frac{A^2}{\lambda} \cdot p, \quad Q = \frac{A^4}{\lambda} \cdot q$$

und lösen die obige Gleichung für $\frac{A^2}{\lambda}$ auf, so wird:

$$\frac{A^2}{\lambda} = \frac{-p \cdot t + \sqrt{p^2 t^2 + 16 l^2 q K}}{4 l q},$$

und durch Entwicklung der Quadratwurzel:

$$(8) \quad \frac{A^2}{\lambda} = \frac{2 K l}{p t} - \frac{8 l^3 q K^2}{p^3 t^3} \dots$$

Alle Grössen auf der rechten Seite dieser Gleichung können durch die Beobachtung gewonnen werden, und sind wir durch diese Gleichung in den Stand gesetzt, 1) die Grösse $\frac{A^2}{\lambda}$, oder (A^2 als bekannt vorausgesetzt), die Grösse λ , d. h. den spezifischen Leitungswiderstand eines Metalles, aus In-

ductionsversuchen mit einem körperlichen Leiter zu finden, und 2) durch die Vergleichung des so gewonnenen Werthes für λ mit den früher auf anderem Wege gefundenen Werthen die Resultate der vorhergehenden Rechnungen, und damit auch die ihnen zu Grunde liegenden Kirchhoff'schen Gleichungen zu prüfen.

Die Versuche.

Ein elliptisch geformter Ring von 3 mm dickem Aluminiumdraht, dessen kleine Axe 120 mm, dessen grosse 180 mm, trug an den Enden der letztern zwei dünnwandige Messinghülsen, deren Längsaxen parallel dieser grossen Axe der Ellipse. Dieselben waren leicht federnd und dienten zur Aufnahme zweier kleiner Magnetstäbe. Der Draht ring trug ausserdem einen kleinen Planspiegel zur Fernrohrablesung und Vorrichtungen, um behufs der Ermittlung des Trägheitsmomentes kleine Messinggewichte in verschiedenen Abständen voneinander aufhängen zu können. Der Ring wurde bifilar an über eine leicht bewegliche Rolle führenden Coconfäden so aufgehängt, dass die Ringebene vertical hing, und die grosse Axe zusammenfiel mit dem magnetischen Meridian.

Die beiden Magnetstäbe, welche zu einem Versuche benutzt wurden, waren von gleichen Dimensionen und annähernd gleich stark magnetisirt. Sie wurden bei den Versuchen so in die Hülsen geschoben, dass der Nordpol des stärkern (*N I*) nach Norden, der des schwächern (*N II*) nach Süden zeigte, sie also nahezu ein astatisches Paar bildeten.

Als Leiter, in welchem die Inductionsströme erregt werden sollten, wurden zwei massive Kupferkugeln benutzt. Jede von ihnen war aus einem quadratischen Stücke geschnitten, das im hellglühenden Zustande mit schwerem Hammer bearbeitet war. Die bei den vier ersten der noch zu beschreibenden Versuche verwendete Kugel hatte einen Durchmesser $2a = 92,94$ mm, ein Gewicht $G = 3\,728\,700$ mg, ein specifisches Gewicht $s = 8,88$. Der fünfte Versuch wurde mit einer Kugel angestellt, bei welcher $2a = 59,85$ mm, $G = 999\,000$ mg, $s = 8,9$. Die Werthe der Durchmesser wurden bestimmt durch Kathetometermessung mit mikroskopischer Ablesung, und ist jede Zahl das Mittel aus 10 Messungen.

Wenn während einer Versuchsreihe die Kugel benutzt wurde, so wurde sie der Art aufgestellt, dass ihr Mittelpunkt zusammenfiel mit dem Mittelpunkte des Aluminiumringes. Die Anordnung der Versuche war die folgende: Es wurde das magnetische Moment und der Polabstand jedes der beiden Magnete bestimmt durch Ablenkungsbeobachtungen. Wegen der Bedeutung besonders des letztern für die Berechnung der in den Formeln mit p und q bezeichneten Reihen, wurde auf die Ermittlung desselben grosse Sorgfalt verwendet. Ein Stahlspiegel von 20 mm Durchmesser, sorgfältig magnetisirt, war an einem Coconfaden so aufgehängt, dass seine Mitte in gleicher Höhe mit der obern Fläche einer Holzschiene, auf welche die Magnetstäbe zu den Ablenkungsversuchen östlich und westlich vom Spiegelmittelpunkte gelegt wurden. Die Ablenkungen wurden in zwei verschiedenen Abständen der Magnete vom Spiegel sowohl östlich als westlich hervor gebracht. Die Entfernungen waren gleich dem Drei-, resp. Vierfachen der Magnetlänge. In jeder Lage wurden vier Beobachtungen gemacht, indem der Stab sowohl um die Längsaxe als um die Queraxe um je 180° gedreht wurde. Für die Entfernung des Stabmittelpunktes von dem Spiegelmittelpunkte a_1 , resp. a_2 wurde die Hälfte der Entfernung zwischen zwei Lagen östlich und westlich genommen. Dieselbe wurde mit dem Kathetometer gemessen, während der Magnetstab ablenkend wirkte.

Bezeichnen φ_1 und φ_2 die den a_1 und a_2 entsprechenden Ablenkungen des Magnetspiegels (mit Fernrohr und Scala gemessen) ρ den Polabstand des letztern, so ergibt sich der gesuchte Polabstand r des Magnetstabes:

$$r^2 = \frac{1}{2} \left\{ 3\rho^2 + \frac{a_1^5 \operatorname{tg} \varphi_1 (a_2^2 + 15\rho^2 \sin^2 \varphi_2) - a_2^5 \operatorname{tg} \varphi_2 (a_1^2 + 15\rho^2 \sin^2 \varphi_1)}{a_2^5 \operatorname{tg} \varphi_2 - a_1^5 \operatorname{tg} \varphi_1} \right\}$$

und das magnetische Moment M :

$$\frac{M}{T} = \frac{1}{2} \frac{a_2^5 \operatorname{tg} \varphi_2 - a_1^5 \operatorname{tg} \varphi_1}{a_2^2 - a_1^2 + 15\rho^2 (\sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_1)} (1 + \Theta),$$

wenn wir die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus mit T , das Torsionsverhältniss des Magnetspiegels mit Θ bezeichnen.

Nach der Bestimmung von M und r wurden die Magnete in der schon angegebenen Weise in die Hüllen des Alumi-

niumringes geschoben und mit Hülfe des Kathetometers die Abstände der Endpunkt des Magnets Nr. 1 von denen von Nr. 2 gemessen, aus diesen die Entfernungen der Magnetmittelpunkte vom Ringmittelpunkte berechnet und endlich durch Addition resp. Subtraction einer halben Poldistanz die Abstände der Magnetpole von dem Ringmittelpunkte, die im Vorhergehenden mit $d_1 d_2 d_3 d_4$ bezeichnet sind, erhalten. μ_1 und μ_2 wurden gleich $\frac{M_1}{r_1}$ und $\frac{M_2}{r_2}$ gesetzt. Hierauf wurde das Trägheitsmoment aus Schwingungsbeobachtungen bei zwei verschiedenen Abständen der Gewichte voneinander nach der Gauss'schen Methode bestimmt und die Luftdämpfung beobachtet, die Kupferkugel mittelst einer zweckdienlichen Vorrichtung in die richtige Stellung gebracht und Dämpfung und Schwingungsdauer beobachtet, endlich nochmals das magnetische Moment und der Polabstand bestimmt. Für die Berechnung wurde das Mittel aus dieser und der ersten Bestimmung dieser Grössen genommen. Die Werthe zweier solcher Bestimmungen waren für den Polabstand nie mehr als $\frac{1}{5}\%$, für das magnetische Moment selten mehr als $\frac{1}{10}\%$ des ganzen Werthes verschieden. Luftdämpfung und Dämpfung wurden jede dreimal durch die Beobachtung von mindestens je 60 Umkehrpunkten bestimmt, die Scalentheile¹⁾ auf Bogen reducirt und der 1te mit dem 31ten, der 2te mit dem 32ten etc. combinirt und das arithmetische Mittel genommen.

Die Mittel zweier Bestimmungen differirten unter einander um höchstens $\frac{1}{4}\%$ des ganzen Werthes. Die Luftdämpfung und die Dämpfung wurden bei denselben Schwingungsamplituden beobachtet und die erstere auf die Schwingungsdauer bei letzterer reducirt. Es wurde Sorge getragen, dass die sehr gut vor Luftzug schützenden Kasten und Röhren immer genau dieselbe Stellung gegen den Apparat einnahmen. Die Schwingungsdauer wurde gleichfalls dreimal beobachtet, und ergaben sich unter den drei Bestimmungen Abweichungen nie über 0,001 Sec.

1) Die benutzte Scala war sorgfältig auf ihre Gleichmässigkeit untersucht und corrigirt. Der Scalenabstand 3--4 m.

Bei der Berechnung des $\frac{A^2}{\lambda}$ aus der Gleichung VIII zeigte sich, dass nur das erste Glied rechter Hand zu berücksichtigen war. Das zweite verhielt sich zum ersten wie $\frac{1}{10^5}:1$. Die Reihe für p wurde bis auf 20 Glieder entwickelt und dadurch erreicht, dass die vernachlässigten Glieder erst die fünfte Ziffer der Zahl unsicher machten. Alle Beobachtungen einer Versuchsreihe wurden hinter einander innerhalb 3—5 Stunden angestellt.

In der folgenden Uebersicht der Resultate bezeichnet:

L die Länge der Magnete, der Querschnitt war bei allen ein Quadrat von 5 mm Seite;

r den Polabstand;

M das magnetische Moment;

d den Abstand eines Magnetpols vom Kugelmittelpunkte;

T die Horizontalintensität des Erdmagnetismus. Dieselbe wurde mit Hülfe des compensirten Magnetometers gefunden aus einer Vergleichung der Bussolenablenkungen am Orte der Beobachtung mit solchen an einem eisenfreien Orte.

Dass der fünfte Versuch mit einer andern Kugel gemacht wurde als die 4 ersten, vergleiche weiter oben.

Versuche:

Nr.	I	II	III	IV	V
L	60 mm	60 mm	70 mm	50 mm	60 mm
$\frac{M_1}{T}$	1 174 650	1 172 460	1 748 400	767 980	1 472 500
r	41,68	39,4	57,34	44,92	49,17
d_1	106,13	102,5	119,11	99,72	90,17
d_2	64,45	63,1	61,77	54,8	41,—
$\frac{M_2}{T}$	1 026 750	1,022,800	1 493 500	693 750	1 323 900
r_2	45,7	43,1	56,02	41,94	52,24
d_3	62,44	61,25	62,43	56,29	39,66
d_4	108,14	104,35	118,45	98,23	91,9
K	$22\ 812 \cdot 10^4$	$22\ 399 \cdot 10^4$	$285\ 92 \cdot 10^4$	$17\ 403 \cdot 10^4$	$14\ 936 \cdot 10^4$
t	11,842	11,573	12,32	9,83	9,611
l	0,0067	0,00742	0,00802	0,01095	0,00705
$\frac{A^2}{\lambda}$	215 760	213 900	220 800	218 900	201 270

II. Gruppe.

Aufstellung und Integration der Bewegungsgleichungen der Electricität,

Rotirt eine leitende Kugel in einem homogen-magnetischen Felde, so gelten für die Bewegung der inducirten Electricität die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{aligned} \lambda u + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A^2 \frac{dU}{dt} - X &= 0 \\ \lambda v + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + A^2 \frac{dV}{dt} - Y &= 0 \\ \lambda w + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + A^2 \frac{dW}{dt} - Z &= 0. \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie in den entsprechenden Gleichungen der 1^{ten} Gruppe. Für einen Punkt im Innern muss wieder die Gleichung bestehen:

$$(1a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \frac{d(\Delta \varphi)}{dt}$$

für einen Punkt der Oberfläche:

$$(1b) \quad u_1 \frac{dx_1}{dn} + v_1 \frac{dy_1}{dn} + w_1 \frac{dz_1}{dn} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d^2 \varphi}{dt dn} - \frac{d^2 \varphi_a}{dt dn} \right).$$

Um die Werthe der äusseren electromotorischen Kräfte zu bestimmen, legen wir den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems in den Mittelpunkt der Kugel, nehmen die *X*-Axe nach Norden, die *Y*-Axe nach Westen und die *Z*-Axe nach oben und letztere zur Rotationsaxe, alsdann werden die Geschwindigkeitscomponenten *u v w* eines Punktes *x y z* der Kugel:

$$u = -y \cdot \omega \quad v = x \cdot \omega \quad w = 0$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit, für welche im Folgenden die für kleine Schwingungsamplituden erlaubte Annahme gemacht werden soll:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = D \cdot x e^{xt}.$$

Nennen wir die Kraft des homogenen Feldes *R* und lassen ihre Richtung zusammenfallen mit der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus, so werden:

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = A \cdot D x e^{xt} R \cdot x.$$

Führen wir Polarcoordinaten ein:

$$x = \rho \cos \delta \quad y = \rho \sin \delta \cos \psi \quad z = \rho \sin \delta \sin \psi$$

und bedienen uns für die Kugelfunctionen derselben Bezeichnungsweise wie im ersten Abschnitte, so erhalten wir:

$$(2) \quad \begin{aligned} Z &= e^{\pi t} \rho c_1^0 C_1^1 \\ c_1^0 &= A D \kappa R \end{aligned}$$

Die Integration der Differentialgleichungen (1) erfolgt jetzt genau in derselben Weise wie in der ersten Gruppe und erhalten wir schliesslich:

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi = e^{\pi t} \rho^2 \left(1 - \frac{\lambda \kappa}{4\pi}\right) \frac{1}{2} c_1^0 \cos \delta \sin \delta \sin \psi \\ u = -\frac{1}{\lambda} e^{\pi t} \rho \left\{1 - 2\pi \frac{A^2}{\lambda} \left(\frac{a^2}{3} - \frac{\varrho^2}{5}\right) \kappa\right\} \frac{1}{2} c_1^0 \sin \delta \sin \psi \\ v = 0 \\ w = \frac{1}{\lambda} e^{\pi t} \rho \left\{1 - 2\pi \frac{A^2}{\lambda} \left(\frac{a^2}{3} - \frac{\varrho^2}{5}\right) \kappa\right\} \frac{1}{2} c_1^0 \cos \delta. \end{cases}$$

a bezeichnet den Radius der Kupferkugel.

Das von dem homogen magnetischen Felde auf die inducirten Ströme der Kugel ausgeübte Drehungsmoment und die Bewegungsgleichung der Kugel.

Bezeichnen wir die Componenten der ponderomotorischen Kraft, welche das homogen-magnetische Feld auf einen Punkt $x y z$ der Kugel mit den Stromcomponenten $u v w$ ausübt, mit $\Xi H Z$, so ist bei einer Rotation der Kugel um die Z -Axe das auf jenen Punkt ausgeübte Drehungsmoment:

$$\Delta_{xyz} = x H - y \Xi$$

In unserem Falle ist:

$$\Xi = 0 \quad H = -A \cdot w \cdot R.$$

Durch Einsetzen des in (3) für w gefundenen Werthes ergibt sich also:

$$\Delta_{xyz} = -\frac{A}{\lambda} e^{\pi t} \rho^2 \left\{1 - 2\pi \frac{A^2}{\lambda} \left(\frac{a^2}{3} - \frac{\varrho^2}{5}\right) \kappa\right\} \frac{1}{2} c_1^0 R \cos^2 \delta.$$

Das auf die gesammten Ströme der Kugel ausgeübte Drehungsmoment Δ erhalten wir aus Δ_{xyz} durch Multiplication mit $dx dy dz$ und Integration über die Kugel:

$$\Delta = -4\pi \frac{A^3}{\lambda} \kappa e^{\pi t} D R^2 \frac{a^5}{30} \left(1 - 8\pi \frac{A^2}{\lambda} \kappa \frac{a^2}{21}\right)$$

oder wegen der Substitution:

$$D \cdot \kappa e^{\kappa t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad D \cdot \kappa^2 e^{\kappa t} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

können wir schreiben:

$$\Delta = -P \frac{d\varphi}{dt} + Q \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\text{wo:} \quad P = 4\pi \frac{A^2}{\lambda} R^2 \cdot \frac{a^5}{30} \quad Q = 32\pi^2 \frac{A^4}{\lambda^2} R^2 \frac{a^7}{21 \cdot 30}.$$

Ist die Kupferkugel bifilar aufgehängt und wird sie durch eine Drehung um die *Z*-Axe von nur wenigen Graden aus ihrer Ruhelage getrieben, so bestimmt sich die entstehende schwingende Bewegung durch die Gleichung:

$$(K - Q) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + P \frac{d\varphi}{dt} + T \cdot \varphi = 0,$$

K das Trägheitsmoment, *T* die Directionskraft der Suspensionsdrähte. Ist die Schwingungsdauer *t*, das logarithmische Decrement *l*, so muss:

$$\frac{P}{K - Q} = 2 \frac{l}{t}.$$

Setzen wir $P = \frac{A^2}{\lambda} p$, $Q = \frac{A^4}{\lambda} q$, so erhalten wir nach dieser Gleichung:

$$(4) \quad \frac{A^2}{\lambda} = \frac{2lK}{p \cdot t} - \frac{8l^3 q K^2}{p^3 t^3} \dots$$

Von der Gleichung (4) gilt genau das über Gleichung (8) der 1. Gruppe Gesagte. Durch Beobachtung der Grössen rechter Hand lässt sich aus ihr ein Werth für *λ* ableiten, und durch Vergleichung desselben mit den Resultaten früherer Bestimmungen ergibt sich eine Prüfung der unseren Rechnungen zu Grunde liegenden Bewegungsgleichungen der Electricität in nicht linearen Leitern.

Herstellung und Messung des homogen-magnetischen Feldes.

Drei Magnetstäbe von 1800—1850 mm Länge, 20 mm Dicke und 80 mm Höhe wurden mit ihren Längsaxen parallel dem magnetischen Meridian, hochkant, mit nur sehr kleinen Zwischenräumen neben einander gelegt, sodass die Endflächen des Systems im Norden wie im Süden ein vertical stehendes Rechteck von 70 mm Grundlinie und 80 mm Höhe bildeten.

Drei weitere, diesen ganz gleiche Magnete waren in derselben Weise zu einem zweiten System zusammengelegt, und

zwar so, dass die Längsaxe jedes einzelnen parallel war dem magnetischen Meridian und die directe Fortsetzung der Längsaxe des entsprechenden Magnets im ersten System bildete. Der mittlere Theil des Raumes zwischen der nördlichen Endfläche des ersten und der südlichen Endfläche des zweiten Systems konnte als homogen-magnetisches Feld betrachtet werden. Die Homogenität des Feldes wurde in doppelter Weise untersucht. Einmal durch Betrachtung der Linien, welche Eisenfeilspähne bildeten, die auf einem Kartenblatte in das Feld gebracht wurden; die Linien waren vollständig parallel und gleichmässig an allen Stellen des Feldes. Sodann aber fand eine genaue Prüfung statt durch die Messung der Winkel, um welche eine Bifilarrolle durch einen genau gemessenen Strom aus ihrer Ruhelage abgelenkt wurde. Die Ruhelage war der Art, dass in ihr die Längsaxe der Rolle senkrecht stand zum magnetischen Meridian.

Bezeichnen wir die Stromfläche der Rolle mit F , die Intensität des hindurchgeleiteten Stromes mit i , die Directions-kraft der Suspensionsdrähte mit D , die Horizontalintensität des Erdmagnetismus mit T , endlich den Ablenkungswinkel der Rolle mit φ , so ist die Kraft R des Feldes bestimmt durch die Gleichung:

$$R + T = \frac{D \cdot \varphi}{F \cdot i \cos \varphi}.$$

Um die Stromfläche F zu eliminiren beobachtet man ferner die Ablenkung φ' welche ein Strom i' bei der Rolle hervorbringt, wenn dieselbe nur unter der Einwirkung des Erdmagnetismus steht. Dann ist:

$$T = \frac{D \cdot \varphi'}{F \cdot i' \cos \varphi'},$$

und aus der Combination beider Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{R + T}{T} = \frac{\varphi \cdot i' \cos \varphi'}{\varphi' \cdot i \cos \varphi},$$

also die Kraft R gemessen durch die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus.

Der innere Durchmesser der benutzten Rolle war 8 mm. Es waren 13 Lagen 2 mm dicken überspinnenen Kupferdrahts aufgewickelt, sodass der äussere Durchmesser 60 mm betrug. Die Länge der Rolle war 40 mm. Die Suspensionsdrähte, die

zugleich als Zuleitungsdrähte dienten, waren an ihren oberen Enden in zwei Metallklappen geklemmt, welche an den Enden eines gleicharmigen Hebels befestigt waren, dessen leichte Beweglichkeit die gleichmässige Spannung der Suspensionsdrähte garantierte. Die Suspension war unter der Decke des Beobachtungsraumes so befestigt, dass durch eine Schiebervorrichtung die Rolle ohne sonstige Aenderungen an 5 verschiedene Punkte *A B C D E* des homogenen Feldes gebracht werden konnte. *A* war der Mittelpunkt des Feldes, *B* und *C* in der Richtung des magnetischen Meridians nach Norden, resp. Süden um 20 mm von *A* entfernt, *D* und *E* senkrecht zum Meridian nach Osten resp. Westen, um je 5 mm von *A*. An jedem dieser fünf Punkte wurde *R* in der oben angegebenen Weise bestimmt. Die Ablenkungen der Rolle wurden mit Spiegel und Fernrohr beobachtet. Die Stärke des benutzten galvanischen Stromes wurde durch eine Tangentenbussole gemessen, in deren Mitte an einem Coconfaden ein Stahlspiegel hing, umgeben von einem Kupferdämpfer. Der Standpunkt der Bussole war von den Magneten des homogenen Feldes etwa 15 m (Luftlinie) entfernt, doch wurde, um den Einfluss der starken Magnete genau in Rechnung zu bringen, für jede Messung mit der Tangentenbussole die Horizontalintensität mit dem compensirten Magnetometer bestimmt. Die für *R* gefundenen Werthe weichen um höchstens $\frac{1}{3}\%$ des ganzen Werthes voneinander ab und dienen somit als Beweis dafür, dass das hergestellte magnetische Feld als homogen betrachtet werden darf.

Die Schwingungsversuche mit der Kupferkugel.

Nachdem in der angegebenen Weise die Stärke des homogenen Feldes bestimmt war, wurde die Kupferkugel von 60 mm Durchmesser, mit welcher auch in der ersten Gruppe schon ein Versuch angestellt war, an einem ca. $2\frac{1}{2}$ m langen Messingdrahte bifilar aufgehängt, sodass ihr Mittelpunkt zusammenfiel mit dem Mittelpunkte des Feldes. Um möglichst alles andere Metall zu vermeiden, war mittelst einer Kupferschraube, deren Kopf nur $1\frac{1}{2}$ mm aus der Kugel hervorragte, auf dieser eine dünne Holzschiene befestigt, an welcher durch ein Elfenbeinplättchen die Suspensionsdrähte eingeklemmt wurden

Dieselbe diente weiter zum Aufhängen von Glasgewichten, mit deren Hülfe das Trägheitsmoment bestimmt wurde. Die Kugel wurde in Bewegung gesetzt durch vorsichtiges Anblasen vermittelt einer capillar ausgezogenen Glasröhre gegen einen Arm der Holzschiene. Jede Dämpfungsbeobachtung und jede Bestimmung der Schwingungsdauer wurde mindestens fünfmal wiederholt. Die logarithmischen Decremente zusammengehöriger Beobachtungen unterschieden sich voneinander selten um mehr als $\frac{1}{5}\%$. Die Schwingungsdauern differirten höchstens um $\frac{1}{1000}$ Sec.

Die einzelnen Versuche unterscheiden sich voneinander durch die Grösse des Abstandes zwischen den sich gegenüberliegenden Endflächen der beiden oben beschriebenen Systeme von Magneten und der damit zusammenhängenden Kraft des homogenen Feldes. Jener Abstand ist in der folgenden Uebersichtstabelle mit L bezeichnet. R ist die Stärke des Feldes, t die gedämpfte Schwingungsdauer, l das logarithmische Decrement der Dämpfung vermindert um das der Luftdämpfung (letztere auf die Schwingungsdauer der erstern reducirt), K das Trägheitsmoment. Für die Berechnung genügte es, das erste Glied rechter Hand in der Gl. 4 allein zu berücksichtigen.

Versuche:

Nr.	I	II	III
L	455 mm	500 mm	590 mm
R	87,3 . T	79,8 . T	63,6 . T
K	8746 . 10^5	86154 . 10^4	13243 . 10^5
t	15,164	15,28	18,882
l	0,01202	0,01038	0,00528
$\frac{A^2}{\lambda}$	1 205 650	1 203 500	1 204 300

Die Resultate dieser Gruppe stimmen sehr gut überein und weichen auch von dem dazugehörigen des fünften Versuchs I. Gruppe nur wenig ab.

Das arithmetische Mittel aus allen Versuchen ergibt:

I. Kugel:

Durchm. = 92,94 mm, Gew. = 3 728 700 mgr, spec. Gew. = 8,88.

$$\frac{A^2}{\lambda} = \frac{1}{217\,340} \quad \lambda = \frac{1}{444\,278 \cdot 10^{12}}.$$

II. Kugel:

Durchm. = 59,85 mm, Gew. = 999 000 mgr, spec. Gew. = 8,9.

$$\frac{A^2}{\lambda} = \frac{1}{208\,600} \quad \lambda = \frac{1}{474\,074 \cdot 10^{12}}.$$

Zur Beurtheilung dieser Werthe mögen die Resultate einiger früherer Bestimmungen hier Platz finden, die für Kupferdrähte ausgeführt sind:

Jacobi $\lambda = \frac{1}{374\,116 \cdot 10^{12}}$

Kirchhoff $\lambda = \frac{1}{451\,043 \cdot 10^{12}}$

W. Weber $\lambda = \frac{1}{463\,382 \cdot 10^{12}}$

Für bestleitendes galvanoplastisches Kupfer:

$$\lambda = \frac{1}{513\,144 \cdot 10^{12}}.$$

Die Temperatur des Beobachtungsraumes war bei allen Beobachtungen nahezu constant und lag zwischen 12° und 14° R.

Die Beobachtungen im physikalischen Institute zu Göttingen anzustellen, hatte mir Herr Prof. Riecke gütigst gestattet, wofür ich ihm meinen Dank ausspreche.

Freiburg i/B., September 1880.

VIII. *Ueber die Entladung der Electricität in verdünnten Gasen; von Eugen Goldstein.*

(Der Berliner Academie vorgelegt am 28. Januar 1878; abgedruckt im Monatsbericht vom Januar 1880.)

Ueber die Phosphorescenzerregung durch electriche Strahlen.

Eine ausgedehnte Gruppe meiner Versuche suchte die Gesetze der Ausbreitung jener merkwürdigen, von der Kathode in einem verdünnten Gase ausstrahlenden Bewegung zu ermitteln, die durch ihre geradlinige Fortpflanzung sich den schon lange studirten Formen der Schall- und Lichtbewegung als neues Glied an die Seite stellt. Schon Hit-