SUI PROBLEMI DETERMINATI RISOLUBILI COLLA RIGA E COL COMPASSO.

Nota di **Francesco Severi**, in Pisa.

(Estratto da una Lettera al Prof. F. ENRIQUES).

Adunanza del 12 giugno 1904.

.
Ella ricorderà che l'anno scorso, parlando insieme del bel teorema enunciato da DESCARTES e dimostrato da SMITH *), concernente la possibilità di risolvere colla riga e col compasso ogni problema determinato di 3° o di 4° grado, appena sia tracciato sul foglio del disegno un arco, comunque piccolo, di una conica (che non sia un circolo), osservammo come sarebbe stato opportuno stabilire, con mezzi elementari, una proprietà analoga, che si prevedeva valesse pei problemi di 2° grado, e, più in generale, per quelli risolubili colla riga e col compasso; dei quali Ella discorre nel § 74 delle Sue *Lezioni di Geometria proiettiva* **).

Ora, nel preparare una raccolta di problemi di Geometria proiettiva, che tra pochi giorni licenzierò alle stampe, ho ripensato alla cosa ed ho stabilito facilmente che *ogni problema determinato risolubile colla riga e col compasso, si può risolvere coll'uso della riga e di un arco di circolo, di dato centro, tracciato sul foglio del disegno.*

Prima di esporre la dimostrazione di questo teorema, gliene delineerò in poche parole il concetto.

Ogni problema di 2° grado si può ridurre con proiezioni e sezioni

*) Cfr. il *Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques* [Annali di Matematica, (2), t. 3, 1869; pag. 112-165 e 218-242]. Ho esposto questa dimostrazione, con qualche miglioramento, nel mio libro di problemi, a cui accenno più sotto.

**) Bologna, Zanichelli, 1904; 2^a edizione, pag. 289.

al problema tipico di determinare i punti XY comuni ad una retta u e ad una conica K (non tracciata); sicchè basterà provare come si possano costruire questi punti coll'uso della riga e del dato arco di circolo.

A tal uopo cercherò di individuare linearmente un arco della conica K , che contenga uno dei punti X, Y (se son reali); eppoi trasformerò omograficamente quest'arco nel dato arco di circolo. Si potranno allora costruire linearmente i punti X', Y' trasformati di X, Y , e si potrà quindi passare da quelli a questi con sole operazioni lineari.

Per effettuare le operazioni indicate, si costruisca linearmente il polo U della retta u rispetto a K : se U ed u si appartengono, la u tocca K nel punto U , e quindi le intersezioni della retta e della conica son già costruite.

Se U ed u non si appartengono, preso un punto generico A di K , e costruita linearmente l'ulteriore intersezione B della retta UA con K , la coppia AB risulterà armonica con la coppia XY dei punti, reali o immaginari, in cui la u sega K . Ne deriva che se C è un altro punto generico di K , e se i punti X, Y son reali, l'arco ACB conterrà certo uno di questi punti (e l'arco complementare, l'altro).

Sia ora K' il circolo a cui appartiene l'arco dato, A', B' due punti di quest'arco e C' un punto dell'arco stesso, intermedio tra A', B' . La proiettività tra K e K' , individuata dalle tre coppie di punti corrispondenti AA', BB', CC' , muta l'arco ACB di K nell'arco tracciato $A'C'B'$ di K' ; e l'omografia ω che subordina tra K, K' la proiettività posta, muta la retta u in una retta u' , che sega K' nei punti X', Y' , omologhi di X, Y .

Se dunque il problema ha soluzioni reali, uno dei punti $X'Y'$ si determinerà graficamente appena tracciata la retta u' , perchè è interno all'arco $A'C'B'$; e l'altro, dopo ciò, si costruirà linearmente. — Operando colla ω^{-1} sui punti X', Y' , si otterranno i punti incogniti X, Y .

Ella osserverà che *il centro dell'arco tracciato serve soltanto per individuare l'assoluto*, e non occorre affatto se il problema è grafico.

Dal teorema che Le ho esposto, si può trarre una conseguenza notevole relativa alla potenzialità della riga *finita* a due orli (paralleli), come strumento di disegno; ma prima di parlarne di ciò, è necessario ch'io dimostri la possibilità d'individuare linearmente un'omografia la quale muti K in K' , e una data retta, segante K in due punti reali, in una retta segante K' in due punti reali, che appartengano *ambidue* all'arco tracciato.

Mantenendo le notazioni di poc'anzi, si costruisca l'ulteriore intersezione D di K colla retta UC , e, mediante la proiezione delle due coppie AB , CD da un altro punto di K , si stabilisca in quale ordine si susseguono entro alla conica i punti di queste coppie.

Se le due coppie si separano, la costruzione eseguita ci dice già che il problema ha due soluzioni immaginarie (e, ove si richieda, si potranno costruire linearmente quante si vogliano coppie dell'involuzione ellittica che rappresenta quelle soluzioni); se le due coppie non si separano, la retta u sega K in una coppia reale XY , armonica con entrambe.

Supponiamo ad es. che i punti di quelle coppie si susseguano nell'ordine $ABCD$: allora l'arco $ABCD$ di K conterrà i punti X , Y ; e quindi se A' , D' son due punti dell'arco tracciato di K' , e B' un punto dello stesso arco, intermedio tra A' e D' , l'omografia che subordina tra K , K' la proiettività $\begin{pmatrix} A & B & D \\ A' & B' & D' \end{pmatrix}$, muterà u in una retta u' , segante in due punti reali $X'Y'$ l'arco $A'B'D'$.

Trasportando per dualità le considerazioni precedenti, se ne trae la possibilità di risolvere coll'uso della riga e di un *arco-inviluppo* appartenente ad un circolo di dato centro, ogni problema risolubile colla riga e col compasso. Anzi vediamo che se un problema di 2° grado ha due soluzioni reali, colla sola riga si riesce a determinare un punto da cui escono due tali tangenti *del dato arco-inviluppo*, che da esse si risale linearmente alle soluzioni del problema.

Passo ora a dimostrare che *tutti i problemi determinati risolubili colla riga e col compasso, si risolvono pure con l'uso della sola riga a due orli, DI LUNGHEZZA FINITA **).

Poichè una riga a due bordi R , di lunghezza finita, permette (com'è noto) di eseguire qualunque costruzione lineare, per quanto precede, basterà provare che, data la riga R , si può *individuare* sul foglio un arco di circolo, di centro conosciuto, e tale che se da un punto del piano escono due rette che tocchino il circolo in 2 punti di quell'arco, esse si possano costruire colla riga R .

Fissato un punto O del foglio ed un punto P che disti da O meno

*) La possibilità di sostituire all'uso del compasso quello della riga a due bordi *indefinita*, fu rilevata dall'ADLER nei Sitzungsberichte dell'Acc. viennese (1890); ed Ella pure ne parla a pag. 292 delle Sue Lezioni citate.

della lunghezza l della riga, ma più della sua larghezza r , disponendo la riga, nei due modi possibili, in guisa che uno de' suoi bordi passi per P e l'altro per O , si tracciano subito due rette a, b che escono da P e toccano il circolo K' di raggio r e centro O .

Dei due archi determinati dai punti di contatto delle a, b , considereremo quello minore di mezza circonferenza. Quest'arco sarà individuato quando se ne conosca una tangente intermedia.

Per costruire una tale tangente, si muova la riga R in modo che un suo bordo passi sempre per O , e che l'altro si disponga secondo una retta c soddisfacente alle condizioni che il triangolo finito racchiuso dalle abc lasci all'esterno il punto O , e che questo punto appartenga all'angolo ab (inteso nel senso della Geometria elementare) del triangolo suddetto. È evidente che queste due condizioni si possono soddisfare in infiniti modi.

Se da un punto Q del piano escono due tangenti del circolo K' , appartenenti entrambe all'arco-inviluppo acb (il quale aderisce ad un arco $\alpha < \pi$), l'angolo β sotto cui i punti di contatto di quelle tangenti son veduti da O , non supera α (è uguale ad α soltanto quando Q coincide con P). Da ciò, osservando che :

$$OP = \frac{r}{\cos \frac{1}{2}\alpha}, \quad OQ = \frac{r}{\cos \frac{1}{2}\beta},$$

si trae :

$$OQ \leq OP < l.$$

Dunque se da un punto Q del foglio escono due tangenti dell'arco-inviluppo acb , esse si costruiscono con la riga R ; sicchè una volta dato questo strumento, è dato (potenzialmente) *tutto* un arco-inviluppo appartenente ad un circolo di centro assegnato.

.....

Pisa, 18 maggio 1904.

FRANCESCO SEVERI.