SULLO SPIRITO ARITMETICO NELLA MATEMATICA.

Di **F. Klein**, in Gottinga.

Discorso pronunciato alla Società Reale delle Scienze di Gottinga,
nella seduta pubblica del 2 novembre 1895.

[Dalle *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*.
Geschäftliche Mittheilungen. 1895. Heft 2. — Traduzione del prof. S. Pin-
cherle, in Bologna].

Onorevoli uditori. — Mentre i particolari della scienza matematica vanno, per la natura delle cose, sottraendosi all'intelligenza e di conseguenza all'interesse dei profani, sembra forse compito del matematico di indicare quei punti di vista generali sotto ai quali gli appare lo sviluppo della sua scienza, tanto più, se questi punti di vista sono quelli che regolano il suo modo di pensare rispetto ai rami di scienza prossimi al suo. Egli è perciò che nella presente occasione voglio tentare di indicare il mio modo di vedere intorno a quell'importante indirizzo matematico, di cui abbiamo testè festeggiato il rappresentante più insigne, Weierstrass, nell'occasione del suo 80° compleanno, — intorno cioè alla prevalenza dello spirito aritmetico nella matematica. Debbo però premettere alcuni schiarimenti circa l'origine e la tendenza di questo indirizzo.

Comunemente si collega senz'altro al concetto della matematica l'idea di un sistema rigorosamente organizzato secondo logica e

fondato su sè stesso, tale quello che ci presenta la geometria di Euclide. Tuttavia lo spirito, cui s'è informata la matematica moderna, è tutt'altro. Venuta dall'osservazione della natura, diretta a spiegarla, essa ha posto all'apice un principio filosofico, il principio di continuità. Così è presso quei due grandi antesignani, Newton e Leibniz, così è in tutto il secolo decimottavo, che per lo sviluppo della matematica si può propriamente dire un secolo di scoperte. Poco a poco si risveglia però una critica più severa, che in nome della logica chiede la giustificazione dei troppo audaci sviluppi;—si direbbe quasi il riordinamento di una amministrazione regolare dopo un lungo periodo di conquiste. Questo è il periodo di Gauss ed Abel, di Cauchy e Dirichlet. Ma non si è rimasti a ciò. Per Gauss l'intuizione dello spazio, in particolare l'intuizione della continuità dello spazio viene ancora assunta incondizionatamente come fondamentale. Ora, ricerche più approfondite mostrarono non solo che, con ciò, molto era rimasto di non dimostrato, ma che l'intuizione dello spazio aveva inconsideratamente condotto a ritenere vere in generale proposizioni che tali non sono. Da ciò la richiesta di metodi di dimostrazione esclusivamente aritmetici. Come acquisito alla scienza si vorrà riguardare ciò solo che mediante l'applicazione delle usuali operazioni di calcolo si potrà manifestare chiaramente come identicamente esatto. Un'occhiata ai più recenti trattati di calcolo differenziale ed integrale basta a fare scorgere su di che si aggiri il metodo. Dove prima servivano le figure come mezzo di dimostrazione, ora vengono ad ogni piè sospinto ripetute considerazioni su grandezze che divengono o si può ammettere che divengano minori di qualunque grandezza prefissata arbitrariamente piccola. Qui vengono premesse discussioni su ciò che significhi o non significhi la continuità di una variabile e sui casi in cui si possa discorrere di differenziazione o d'integrazione di una funzione. Tale è l'impronta che il Weierstrass dà alla matematica, il rigore Weierstrassiano, come lo si chiama per brevità.

Naturalmente esso non è nulla di assoluto, questo rigore potendo anzi essere portato più oltre quando si assoggetti ad ulteriori limitazioni il modo di concepire i legami fra le grandezze. A questo proposito citerò la tendenza di Kronecker, di bandire gl'irrazio-

nali e di ridurre la scienza matematica a sole relazioni fra i numeri interi. Citerò ancora i tentativi per introdurre pochi segni ad esprimere i vari modi di relazione logica, onde escludere così le associazioni di idee e quella indeterminatezza che inavvertitamente (e quindi in modo insindacabile) s'introduce coll'uso del linguaggio ordinario. In questo ordine di idee ha specialmente proceduto, in questi ultimi tempi, uno scienziato italiano, il Peano di Torino, cui dobbiamo pure varie osservazioni interessanti in altri campi.

Io comprenderei queste varie evoluzioni, in ciò che segue, col nome di « spirito aritmetico » (*) della matematica. Ed ora il mio compito si è, di intrattenervi del significato che l'insieme delle direzioni così indicate viene ad acquistare per quelle parti della nostra scienza che oltrepassano il dominio della pura Analisi. Di buon grado, come intenderete facilmente, riconoscerò la straordinaria importanza di una simile evoluzione; d'altra parte, non potrò a meno di respingere il concetto che nella scienza « aritmetizzata » si trovi racchiuso e concentrato, come in un estratto, tutto quanto il contenuto della matematica. Debbo pertanto sviluppare il mio concetto da due lati: positivo, assenziente l'uno, l'altro negativo, confutatorio. In quanto considero come essenziale non la forma aritmetica dello sviluppo del pensiero, bensì il logico rigore raggiungibile sotto quella forma, richiedo — ed è questo il lato positivo del mio programma — una nuova elaborazione, appoggiata al fondamento aritmetico dell'analisi, delle altre discipline della matematica. D'altra parte, debbo pure accentuare nel modo più esplicito — ed è questo il lato negativo — che la matematica non è per nulla esauribile colla deduzione logica, bensì che accanto ad essa l'intuizione conserva ancora oggidi la sua piena e specifica efficacia. — Una completa trattazione della questione vorrebbe ch'io parlassi anche del lato algoritmico della matematica, del significato cioè dei metodi formali: dovrò però lasciare da parte, nella presente occasione, questo argomento che a me personalmente è meno familiare.

Non vogliate però ritenere, da queste mie spiegazioni, ch'io abbia molti particolari nuovi da dirvi. In sostanza, si tratta piuttosto di

---

(*) Nell'originale: « Arithmetisierung ».

raccogliere e di raggruppare le cose note e, dove sia necessario, di presentarle nella loro vera luce.

Per la ristrettezza del tempo concessomi, mi limiterò a toccare alcuni punti principali. Lasciate prima ch'io adombri il modo in cui il lato positivo del mio concetto si applica alla Geometria. Lo « spirito aritmetico » della matematica ha avuto origine, come ho accennato, dal volere bandire l'intuizione dello spazio. Quando veniamo ad applicarlo alla geometria, dobbiamo tornare a mettere in relazione coll'intuizione spaziale i risultati ottenuti per via aritmetica. Con ciò intendo qui che si accettino i fondamenti ordinari della geometria analitica e che da essi si cerchi di dedurre l'interpretazione geometrica dei nuovi svolgimenti analitici. La cosa non è difficile, ma vuole essere accuratamente trattata, come ho tentato di fare in diverse direzioni, in una conferenza di seminario dell'anno scorso, appositamente rivolta a questo oggetto. Se ne ottiene una esercitazione sull'intuizione spaziale, che porta ad un perfezionamento della medesima; mentre d'altra parte si ha il vantaggio di dilucidare immediatamente gli sviluppi analitici che si presentano e di fare quindi perdere loro quel carattere paradossale che, senza di ciò, presentano spesse volte. Quale è il concetto più generale di curva, di superficie? Che cosa s'intende quando si dice che una curva, ecc., è « analitica » o « non analitica »? Queste e simili domande debbono essere trasformate e perfezionate fino ad evidenza.—In secondo luogo, i fondamenti stessi della geometria si assoggettano a nuove ricerche. Ciò si potrebbe fare benissimo, come si fece già, per via puramente geometrica, ma nel momento attuale si pongono anche qui in prima linea il sistema dei concetti dell'analisi e la conseguente applicazione del metodo analitico-geometrico. La ricerca esteriore delle formule mediante le quali noi rappresentiamo le forme dello spazio, la così detta geometria non euclidea e tutto ciò che ne dipende non costituisce ora che un primo lato della questione, in cui penetra più profondamente la domanda: perchè dobbiamo noi cercare il complesso dei punti dello spazio in una varietà di numeri, numeri razionali ordinati secondo tre direzioni e fra cui sono interpolati nella solita guisa i numeri irrazionali? Giungiamo così al concetto che l'intuizione spaziale è, sulle prime, alcunchè di impreciso, che noi idealizziamo

poi per lo scopo della trattazione matematica mediante i così detti assiomi (ché ci si presentano come proposizioni imperative). Il Kerry, morto prematuramente, si è, soprattutto, occupato del lato filosofico di un tale problema; io credo di potere sottoscrivere alle sue conclusioni principali, specialmente in quanto riguardo la sua critica al Du Bois. — Inversamente, coll'aver fondato in nuova guisa il modo di concepire lo spazio, veniamo a trovare una fonte di nuovi concetti analitici: lo spazio ci si presenta immediatamente coll'infinità dei suoi punti e delle forme da essi costituite. Da qui le ricerche fondamentali sugli insiemi e sui numeri transfiniti, con cui il Giorgio Cantor ha aperto alla scienza aritmetica un circolo di idee interamente nuovo. — Richiediamo infine che queste nuove vedute abbiano pur a valere anche nei campi più remoti della geometria, in particolare nella geometria differenziale. Anche qui vi si giunge nel modo più facile, attenendosi al metodo della geometria analitica. Non raccomando naturalmente con ciò un cieco calcolo coll' x, y, z , bensì un uso sussidiario di queste grandezze ogni qualvolta si tratterà di stabilire con precisione le condizioni di un passaggio al limite.

Avete così, nei suoi contorni, il nuovo programma geometrico. Come vedete, esso è ben diverso dalle tendenze che prevalsero nella prima metà del secolo e che hanno portato dippoi allo sviluppo della geometria proiettiva (che da molto tempo è diventata parte integrante e duratura della nostra scienza). La geometria proiettiva ci ha aperto con grande facilità nuovi campi di scienza: a suo onore fu detta, e a buon diritto, una « strada maestra ». La nostra nuova strada, all'opposto, è faticosa ed aspra ed occorre un'accurata e continuata attenzione per imparare ad orientarsi in mezzo agli ostacoli che essa presenta. Ci riaccostiamo maggiormente, con essa, ai metodi dell'antica geometria di cui impariamo appunto a comprendere in un nuovo modo l'essenza col sussidio dei nostri moderni concetti, come ha recentemente ed in modo brillante dimostrato lo Zeuthen. — Trasportiamo quindi questo stesso modo di pensare nel campo della meccanica e della fisica matematica. Qui, per non diffondermi troppo, limiterò la mia spiegazione a due esempi. Tutte le matematiche applicate devono, per trattare matematicamente i loro soggetti, fare

ciò che ho testè indicato come necessario per l'intuizione spaziale: essi devono idealizzarli. Ma è un fatto costante che in un solo e medesimo campo, a seconda dello scopo che si ha in vista, si procede a questo idealizzare in uno od in un altro modo. Per citarne un'esempio, ora avviene che la materia si riguarda come tale da riempire in modo continuo lo spazio; altre volte come discontinua, formata da molecole separate, e queste alla lor volta ora si concepiscono come immobili, ora come animate da movimenti vivaci. Come ed in quanto siffatti modi di interpretazione saranno essi indifferenti per le conseguenze matematiche che se ne vogliono derivare? In questo senso, nè le antiche rappresentazioni di Poisson e di altri, nè gli sviluppi più recenti della teoria cinetica dei gaz sono, per il matematico moderno, abbastanza concludenti; dobbiamo esigere che il problema si elabori di nuovo e da capo. Presumo che una attesa pubblicazione del Boltzmann potrà condurre ad interessanti conclusioni in proposito.—Un'altra questione da porre è la seguente. L'esperienza fisica ci fornisce spesso volte fatti che siamo involontariamente condotti a generalizzare e che trasportiamo come teoremi alle forme idealizzate. A questo ordine di proposizioni appartiene il teorema dell'esistenza della cosiddetta funzione di Green per una superficie chiusa qualsivoglia con un polo arbitrario,—corrispondente al fatto, nel campo dell'elettricità, che su ogni conduttore si forma una distribuzione in equilibrio sotto l'influenza di un punto elettrizzato qualsiasi. Appartiene allo stesso ordine di proposizioni l'applicazione che ho fatta, per incidenza, delle correnti elettriche che si formano su di una superficie conduttrice arbitraria collocandovi gli elettrodi di una pila galvanica, col mostrare che la loro considerazione conduce senz'altro ai teoremi fondamentali della teoria Riemanniana delle funzioni abeliane. Vi appartengono ancora ed il teorema che ogni corpo elastico è suscettibile di una serie infinita propria di vibrazioni armoniche, e tanti altri. Sono queste, astrattamente considerate, vere ed esatte proposizioni matematiche, o meglio, come si debbono esse limitare e precisare, onde renderle tali? I matematici hanno tentato con successo di trattare la questione: primi C. Neumann e Schwarz nella teoria del potenziale, più di recente gli scienziati francesi, richiamandosi a lavori

tedeschi,—col risultato che i teoremi somministrati dalla fisica si possono, in larga misura, considerare come rigorosamente dimostrati. — Voi scorgete ora con evidenza, quand'anche non l'avessi espressamente rilevato, di che si tratti nelle ricerche in discorso: non già di nuove vedute fisiche, bensì di processi di dimostrazioni matematiche astratte cui aspiriamo per sè stesse, per amore di chiarezza e di precisione e che vengono poi ad introdursi nelle nostre interpretazioni dei fenomeni. Dirò ancora, se mi è lecito di usare un'espressione del Jacobi in senso alquanto modificato, che si tratta dell'onore dello spirito umano.

Onorevoli uditori! Dopo quanto ho espresso, appare cosa difficile il trattare l'opposto lato della questione, l'assicurare cioè all'intuizione il posto che gli spetta di diritto nella nostra scienza. Però, è appunto in questa antitesi che sta il vero senso dell'odierno mio assunto. Con ciò, non intendo di pensare tanto a quella forma perfezionata dell'intuizione di cui si discorreva testè, a quella intuizione cioè che si è svolta sotto l'influenza della deduzione logica e che si potrebbe riguardare come una forma elaborata dal pensiero, quanto a quella intuizione più ingenua che per buona parte è innata e per il rimanente va inconsapevolmente formandosi nella trattazione di questa o di quest'altra parte dello scibile. La stessa parola di « intuizione » non è forse neppur bene scelta. Io potrei comprendere in essa tanto quell'impressione d'indole motrice con cui l'ingegnere giudica della distribuzione delle forze in una qualunque costruzione da lui eseguita, quanto quell'indeterminato senso della convergenza che il provetto calcolatore prova dinnanzi ad un processo indefinito di calcolo. Or bene, io dico che l'intuizione matematica così intesa precede sempre, nella sua sfera, la deduzione logica e che in ogni momento essa abbraccia un campo più vasto di questa.

Qui potrei dare posto ad una digressione storica in cui si mostrerebbe come nello sviluppo della maggior parte dei rami della nostra scienza, l'intuizione abbia fatto i primi passi e preceduto la trattazione logica rigorosa. E ciò non vale soltanto per le origini del calcolo infinitesimale, come ho indicato per sommi capi nell'introduzione; lo stesso si è verificato per molti altri campi, anche fra quelli

aperti nel corso del presente secolo. Ricorderò a questo proposito, per citarne uno, la teoria di Riemann delle funzioni di variabile complessa; aggiungerò di buon grado che la disciplina che per tanto tempo ha sembrato rifuggire più di tutte dalla intuizione, la teoria dei numeri, mostra di volere prendere un nuovo slancio precisamente dopo l'adozione di metodi intuitivi, per opera del Minkowski e di altri.

Sarebbe inoltre sommamente interessante di seguire l'evoluzione, sotto il punto di vista indicato, non solo delle singole discipline, ma anche dell'ingegno delle singole personalità matematiche: su di che mi contenterò di accennare come i due più operosi investigatori del nostro tempo, il Lie a Lipsia ed il Poincaré a Parigi, abbiano l'uno e l'altro fondate le loro prime ricerche sulla intuizione: ma troppo minuti sarebbero i particolari in cui si dovrebbe entrare volendo diffondersi maggiormente su ciò, ed applicabili solo a casi eccezionali. Piuttosto mostrerò come l'intuizione abilmente diretta possa bene spesso, per la trattazione quantitativa dei problemi fisici o tecnici, più della trattazione numerica o grafica. Tornando, per mò d'esempio, ai due problemi di elettricità cui ho accennato poco fa, ogni fisico potrà, per un caso dato e con sufficiente esattezza, indicare l'andamento delle superficie di livello della funzione di Green, o le curve di corrente nei due esperimenti sopra mentovati. Prendete ancora il caso di una equazione differenziale qualunque: per stare al caso più semplice, di un'equazione differenziale di prim'ordine fra due variabili. Molto probabilmente la trattazione analitica sarà in difetto. Pur nonostante si può sempre, con mezzi grafici, segnare l'andamento generale delle curve integrali, come ha mostrato recentemente Lord Kelvin (Sir W. Thomson)—uno dei grandi maestri della matematica intuitiva—per una famosa equazione differenziale del problema dei tre corpi. In tutti questi casi si tratta, se vogliamo esprimere la cosa col linguaggio dell'analisi, di una specie di interpolazione, in cui è dato minore peso alla precisione dei risultati che alla considerazione delle condizioni generali della questione. Tengo anzi a far notare espressamente che quando noi stabiliamo le nostre leggi naturali, od in generale quando ci sforziamo di formulare matematicamente qualunque fatto esterno, facciamo uso

di una simile sorta di interpolazione, che ha per effetto di porre in evidenza, fra la moltitudine delle perturbazioni accidentali, le relazioni più semplici fra le quantità essenziali. Ciò non è altro, in conclusione, che quanto ho indicato più sopra come processo di idealizzazione. La riflessione logica riprende i suoi diritti solo quando questa idealizzazione è stata compiuta dalla intuizione.

Vogliate considerare il presente accenno come rivolto, non a spiegare, bensì piuttosto a descrivere quanto avviene in realtà. Solo con l'osservazione su sé stesso può il matematico constatare la speciale natura del processo psichico che ha luogo in ogni singolo caso. Forse che un giorno otterremo, coi progressi della fisiologia e della psicologia sperimentale, nozioni più esatte sull'intima natura dei procedimenti che conducono dalla intuizione alla facoltà di connetterla logicamente. Che, nel fatto, si tratti di facoltà dell'anima diversamente e quindi non necessariamente congiunte fra di loro, lo dimostrano le grandi differenze che si rilevano dalle osservazioni su diversi individui. I moderni psicologi distinguono una attitudine visiva, una motrice ed una uditiva. Sembrerebbe che l'intuizione matematica, quale io la intendo, dovesse appartenere alle due prime, la facoltà di concepire logicamente all'ultima di queste attitudini. La psicologia comincia ora ad intraprendere un sì fatto ordine di ricerche, ciò ch'io saluto con gioia, e molti studiosi con me; imperocchè noi speriamo che molte discrepanze, che ora sembrano durevoli, nella nostra scienza e nel modo di coltivarla, vengano a scomparire quando saremo meglio edotti delle condizioni psicologiche del pensiero matematico e delle sue diversità individuali.

Debbo ora entrare a discorrere brevemente del lato pedagogico della matematica. Rispetto ad esso, osserviamo oggidì in Germania una condizione di cose assai degna di nota. Vi sono due correnti contrarie che scorrono vicine, senza però influire sensibilmente l'una sull'altra. Per gl'insegnanti dei nostri ginnasi la necessità di un insegnamento matematico fondato sull'intuizione è al giorno d'oggi richiesto spesse volte ed in modo così accentuato da costringerci a contraddirvi, accentuando al contrario la necessità di uno svolgimento severamente logico: è in questa vista ch'io ho pubblicato nello scorso estate un piccolo scritto sui problemi di geometria elementare. Accade

precisamente l'opposto presso agli insegnanti della nostra materia nelle scuole superiori: l'intuizione bene spesso non viene contata per nulla, anzi, per quanto è possibile, sistematicamente posta in disparte. Ciò consegue senza dubbio dal convincimento dell'alta e profonda importanza che giustamente si trova nella tendenza « aritmetica » della matematica moderna. Ma l'effetto va al di là del giusto segno. È tempo ormai di dichiararlo apertamente: non ne viene solo una male intesa pedagogia, ma una falsa comprensione dell'insieme della scienza. Lascio volentieri all'attitudine propria dei singoli insegnanti accademici la più grande libertà d'azione e mi sono perciò sempre guardato dal proporre regole generali per l'insegnamento della matematica superiore. Ciò non mi vieta però di osservare che vi sono due categorie di lezioni matematiche, le quali debbono prendere necessariamente le mosse dall'intuizione. Esse sono dapprima le lezioni elementari, che hanno per iscopo di iniziare i principianti nello studio delle matematiche superiori,—l'uditore deve, in piccolo, percorrere quella stessa via che la scienza stessa ha percorso, in grande, nella sua evoluzione. Poi, quelle lezioni il cui uditorio è, per il suo indirizzo, essenzialmente destinato avere molto a che fare colla intuizione: così le lezioni per i naturalisti o per gl'ingegneri. Colla esagerazione unilaterale della forma logica abbiamo fatto perdere alla matematica, presso di questi, molto di quel valore generale che le appartiene naturalmente: è tempo, è dovere di ridonarglielo con un indirizzo più opportuno.

Ritorno ancora alle considerazioni teoretiche. Occorre appena di formulare più particolarmente il concetto generale ch'io propugno nei problemi odierni della scienza matematica. Mentre richiedo dovunque e nel più alto grado la elaborazione logica della materia, insisto in pari tempo perchè, accanto ad essa, ne progrediscano in tutti i modi la concezione ed i raffazzonamenti d'indole intuitiva. Quei sviluppi matematici che si innestano sull'intuizione non si possono riguardare come stabilmente acquisiti alla scienza, finchè essi non siano portati ad una forma rigorosamente logica. Viceversa, una esposizione astratta di deduzioni logiche non ci può bastare, finchè non ne sia formulata la portata in ogni forma d'intuizione e non si conoscano le molteplici relazioni che, a seconda del campo che sce-

gliamo, lo schema logico ha colle altre parti delle nostre cognizioni.— Io paragono la scienza matematica ad un albero, che sprofonda le sue radici ognora più nel terreno, mentre erge liberamente sempre più in alto i suoi rami ombrosi. Dobbiamo noi considerare come parti essenziali di esso i rami o le radici? C'insegnano i botanici che la domanda è male posta: che la vita dell'organismo sta piuttosto nel ricambio organico fra le sue varie parti.

F. KLEIN.