**9. Ueber die auf einer schweren Flüssigkeit
möglichen Wellen von sehr kleiner Höhe;
von Willy Wien.**

Die Aufgabe, die Gestalt der Trennungsfläche zweier schwerer Flüssigkeiten aus den Werthen der Geschwindigkeiten ihrer horizontalen Strömungen zu bestimmen, ist von Helmholtz durch ein Näherungsverfahren zu lösen versucht worden, bei dem die Strömungsfunktion in eine convergente trigonometrische Reihe entwickelt wird, von der bei der Erfüllung der Forderung gleichen Druckes nur die ersten Glieder benutzt werden. Ich habe dieses Verfahren benutzt, um verschiedene Fragen, die für die Theorie der Wellen von Wichtigkeit sind, zu beantworten.

Ob eine physikalisch geforderte Grenzbedingung mathematisch genau erfüllt werden muss, oder ob es gestattet ist, eine Annäherung zuzulassen, muss durch eine besondere Untersuchung entschieden werden und hängt ausschliesslich von dem physikalischen Charakter der Grenzbedingung ab. Ich habe in meiner Arbeit über die Gestalt der Meereswellen darauf hingewiesen, dass es unzulässig ist, die Grenzbedingung, welche die Zusammensetzung der Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten aus Stromlinien verlangt, anders als mathematisch vollkommen streng zu erfüllen, sobald man der Wellenhöhe bestimmte Werthe vorschreibt und sich nicht vorbehält, diese unbeschränkt klein gegen die Wellenlänge werden zu lassen. Denn sobald sich die Stromlinien der beiden verschiedenen Flüssigkeiten irgendwo, wenn auch nur auf sehr kleine Strecken, schneiden, so bedeutet das ein Hineinpressen der einen Flüssigkeit in die andere, also einen physikalischen Zustand, bei dem Kräfte erregt werden, deren Grösse sich gegen die sonst auftretenden nicht abschätzen lässt.

Wenn dagegen die Bedingung der Gleichheit des Druckes nur annähernd erfüllt wird, so wird ein Zustand dargestellt, der dem gesuchten Gleichgewicht nicht genau entspricht, aber

ihm doch so nahe liegt, als eben durch die Annäherung der Lösung ermöglicht wird, denn alle Zustände, die durch Variation der Wellenform eintreten, sind mögliche dynamische Zustände, die continuirlich zum Gleichgewichte übergeführt werden können.

Alle die verschiedenen Annahmen für die Strömungsfunktion, die verschiedenen Wellenformen entsprechen, geben für verschwindende Wellenhöhe als Wellenlinie eine Sinuslinie. Es lässt sich leicht nachweisen, dass dies allgemein der Fall sein muss. Wenn keine Rotationsbewegung in den Flüssigkeiten vorhanden ist und die Wellenformen sich mit der Zeit nicht ändern, so lässt sich die Strömungsfunktion ψ und das Geschwindigkeitspotential φ , als complexe Variable $\psi + i\varphi$, als Function der Variablen $x + iy$ darstellen, wenn x und y die rechtwinkligen Coordinaten der den Wellen parallelen Ebenen sind. Dieser Zusammenhang ist auch so möglich, dass sowohl $\psi + i\varphi$ als $x + iy$ Functionen eines complexen Argumentes $\vartheta + i\eta$ sind, das so gewählt wird, dass einem constanten Werthe $\eta = h$ die Wellenlinie entspricht. Da nun die Wellenlinie periodisch ist und symmetrische Gestalt hat¹⁾, so lassen sich sowohl ψ als auch x in trigonometrische Reihen entwickeln, die nach dem Cosinus des Vielfachen ϑ fortschreiten und deren Coefficienten Functionen von η sind, die für den Werth $\eta = h$ convergiren, wenn die Wellenhöhe nicht zu gross wird.

Man hat so allgemein für symmetrische Wellen²⁾

1) Es ist mir nicht gelungen, unsymmetrische Wellenlinien mit der Bedingung der Gleichheit des Druckes zu vereinigen, ohne die wesentliche Forderung der Eindeutigkeit der Functionen aufzugeben.

2) Wenn unsymmetrische Wellen möglich wären, so würde die Darstellung gelten

$$n x = \text{const.} + A_1 \cos \vartheta + A_2 \cos 2 \vartheta + \dots \\ + B_1 \sin \vartheta + B_2 \sin 2 \vartheta + \dots$$

Wenn hier die Wellenhöhe sehr klein wird, so ist

$$n x = \eta + C \cos \vartheta_1,$$

wo

$$\vartheta_1 = \vartheta - \delta, \quad \delta = \arctg \frac{B_1}{A_1}, \quad C = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

ist. Also auch hier würde die Trennungslinie gegen eine Sinuslinie convergiren.

$$nx = \text{const.} + a_1 \cos \vartheta + a_2 \cos 2 \vartheta + \dots$$

$$ny = -\vartheta + b_1 \sin \vartheta + b_2 \sin 2 \vartheta + \dots$$

Wenn die Wellenhöhe sehr klein wird, so werden es auch a und b und wir erhalten

$$ny = -\vartheta, \quad nx = \text{const.} + a_1 \cos ny,$$

sodass eine Sinuslinie von unendlich kleiner Höhe entsteht.

Alle Parameter, die sonst auf die Wellenform Einfluss haben, fallen fort, und die Druckgleichung gibt die einfache Beziehung, bezogen auf ruhende Wellen

$$(1) \quad \frac{g \lambda (s_2 - s_1)}{2 \pi} = s_1 a_1^2 + s_2 a_2^2,$$

wo g die Beschleunigung durch die Schwere, λ die Wellenlänge, s_1, s_2 die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten, a_1, a_2 die Geschwindigkeiten ihrer Horizontalströmung bedeuten.

Diese Gleichung lässt sich auch ableiten, wenn man die Bedingung der Uebereinstimmung der Stromlinie mit der Sinuslinie an der Oberfläche nur annähernd erfüllt, aber die Grössenordnung der Wellenhöhe unbestimmt lassen kann. Gleichzeitig kann man zeigen, dass Rotationsbewegungen bei unendlich kleiner Wellenhöhe und der Sinuslinie als Trennungslinie nicht vorhanden sein können.

Wir legen das Coordinatensystem im Raume fest, x vertical, y horizontal und nehmen an, dass die Bewegung überall parallel der xy -Ebene vor sich gehe. Die Componenten der Geschwindigkeit seien u und v .

Die Gleichung der Continuität

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

bedingt die Existenz einer Function ψ , sodass

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ist. Bedeutet p den Druck, s die Dichtigkeit, so geben die hydrodynamischen Gleichungen

$$\begin{aligned} -g - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{s} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{s} &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} \end{aligned}$$

Durch Elimination von p ergibt sich

$$(2) \quad \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = 0,$$

wo

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

ist. Wenn die Bewegung stationär ist, so wird $\partial \Delta \psi / \partial t = 0$ und es folgt als Integral $\Delta \psi = f(\psi)$, wo f eine beliebige Function eines Argumentes ist. Dann ist die Integralgleichung für p

$$\frac{p}{s} = \text{const.} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right\} + \int f(\psi) d\psi - g x.$$

Soll nun eine horizontale Strömung vorhanden sein, so ist zu setzen

$$\psi = \psi_1 - \alpha x,$$

wo α die Geschwindigkeit der Strömung ist und ψ_1 die durch die Wellenbewegung hervorgerufenen Geschwindigkeiten gibt. Für $x = \infty$ wird $\psi_1 = 0$.

Aus (2) folgt

$$\frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} + \alpha \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} = 0.$$

ψ_1 muss eine solche Function sein, dass in den Gleichungen $\psi_1 = \text{const.}$ x als periodische Function von y darstellbar ist.

Es müssen demnach die linearen und die nicht linearen Glieder für sich verschwinden, wenn nicht $\Delta \psi_1 = 0$ ist.

Wir haben also

$$(3) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \quad \text{und} \quad \Delta \psi_1 = f(\psi_1).$$

Ist die Wellengeschwindigkeit α , so ist der Ausdruck für ψ_1 , Unveränderlichkeit der Wellenform vorausgesetzt,

$$\psi_1 = \Psi(x, y - \alpha t).$$

Es ist also $\alpha = \alpha$, wenn nicht $\Delta \psi_1 = 0$ ist.

Setzen wir

$$\psi_1 = c e^{-\beta x} \sin \gamma (y - \alpha t),$$

wo c, β, γ Constanten sind, so ist die Gleichung (3) erfüllt, denn es ist

$$\Delta \psi_1 = (\beta^2 - \gamma^2) \psi_1.$$

Wir nehmen als Trennungslinie eine Sinuslinie und setzen als Gleichung dieser Linie

$$F = 0 = x - b \sin \gamma (y - \alpha t)$$

fest, wo b eine unendlich kleine Constante bezeichnet.

$\lambda = 2\pi/\gamma$ ist die Wellenlänge. Die Bedingung, dass die Oberfläche stets aus Stromlinien gebildet wird, drückt sich durch die Gleichung aus

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Es wird also

$$b \alpha \gamma \cos \gamma (y - \alpha t) + \gamma c e^{-\beta x} \cos \gamma (y - \alpha t) - \alpha \gamma b \cos \gamma (y - \alpha t) \\ - c b \beta \gamma e^{-\beta x} \cos \gamma (y - \alpha t) \sin \gamma (y - \alpha t) = 0.$$

Setzen wir $c = b(a - \alpha)$ und vernachlässigen Größen von der Ordnung b^2 gegen solche von der Ordnung b , so ist die Gleichung erfüllt für $x=0$. Da nun $a=\alpha$ war, so ist überhaupt keine innere Bewegung in der Flüssigkeit vorhanden, also auch keine Rotationsbewegung. *Es ist daher unter den gemachten Voraussetzungen überhaupt keine Rotationsbewegung möglich.*

Ist keine Rotationsbewegung vorhanden, so ist $\beta = \gamma$ und $\Delta \psi_1 = 0$ und es existirt ein Geschwindigkeitspotential φ , sodass die Gleichung des Druckes wird

$$p = -s g x - \frac{s}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{s}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Wir unterscheiden die beiden Flüssigkeiten durch die Indices 1 und 2.

Wir setzen

$$\varphi_1 = c_1 e^{\gamma x} \cos \gamma (y - \alpha t) + a_1 y.$$

Für $x = -\infty$ wird $\partial \varphi / \partial y = a_1$, dort strömt die Flüssigkeit horizontal mit der Geschwindigkeit a_1 .

Auch hier gibt die Gleichung (4)

$$c_1 = b(a_1 - \alpha).$$

Für 2 setzen wir

$$\varphi_2 = c_2 e^{-\gamma x} \cos \gamma (y - \alpha t) + a_2 y,$$

wo a_2 dann die Horizontalströmung für $x = \infty$ ist.

Aus (4) ergibt sich

$$c_2 = b(\alpha - a_2)$$

und die Druckgleichung liefert

$$\begin{aligned} \text{const.} = g(s_2 - s_1)x + \frac{s_1 a_1^2}{2} - \frac{s_2 a_2^2}{2} - \gamma(a_1 - \alpha)^2 s_1 x \\ - s_2 x \gamma (a_2 - \alpha)^2 \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \text{const.} = \frac{s_1 a_1^2}{2} - \frac{s_2 a_2^2}{2} \\ \frac{g \lambda (s_2 - s_1)}{2 \pi} = (a_1 - \alpha)^2 s_1 + (a_2 - \alpha)^2 s_2. \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung (1), wo jetzt a_1 und a_2 nicht mehr die Strömungen relativ zu den Wellen, sondern die absoluten Strömungen bezeichnen.

Wenn beide Flüssigkeiten keine Rotationsbewegung besitzen, so ist die Gleichheit des Druckes an der Trennungslinie identisch mit der Bedingung eines Grenzwertes der Energie bei ruhend gedachten Wellen. Ich habe das Auftreten eines kleinern Energiewerthes für fortschreitende Wellen gegenüber dem Energiewerthe bei ebener Grenze als hinreichende Erklärung für das Entstehen von Wellen ansehen zu können geglaubt. Hr. Planck hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass in diesem Falle die absolute Bewegung des Systems von Einfluss auf die Stabilität sein würde. Da dies nicht der Fall sein darf, so kann der Werth der Energie nur im stationären System zur Entscheidung der Frage nach der Stabilität herangezogen werden. Es ist deshalb die Folgerung von Helmholtz, dass Wellen entstehen, weil sie kleinere Energie besitzen, als das System bei ebener Grenze enthält, so lange als nicht erwiesen zu betrachten, bis Wellenformen gefunden sind, die diesen Energieunterschied auch im stationären System haben.

Bekanntlich lassen sich die Bedingungen an der Oberfläche bei *einer* Flüssigkeit durch die Annahme von Rotationsbewegungen auch bei endlicher Höhe der Wellen streng erfüllen.

Hierbei ist es aber nicht möglich, die Existenz einer zweiten Flüssigkeit von endlicher Dichte über der ersten anzunehmen und die Lösung stellt daher einen der Wirklichkeit wenig entsprechenden Fall des hydrodynamischen Gleichgewichtes dar.

Bemerkenswerth ist aber, dass auch diese strenge Lösung für verschwindende Wellenhöhe eine Sinuslinie für die Oberfläche ergiebt und dass die Rotationsbewegungen als unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung fortfallen, sodass wir auf einen Specialfall unserer obigen Ableitung geführt werden.

Charlottenburg, Mai 1896.