Ueber gewisse Differentialgleichungen dritter Ordnung.*)

Von

F. KLEIN in Leipzig.

Die Theorie der elliptischen Functionen hat bekanntlich einen doppelten Eingang, indem man entweder mit den *doppeltperiodischen Functionen* oder mit den *Integralen* beginnen kann. Genau dasselbe gilt von gewissen neueren functionentheoretischen Untersuchungen, auf die ich mich hier zu beziehen habe. Einmal handelt es sich dabei um solche Functionen z einer Unabhängigen η , welche ungeändert bleiben, wenn man η einem gewissen discontinuirlichen Systeme linearer Substitutionen unterwirft**); das andere Mal mag man das einzelne z als independente Variable betrachten und η durch die Differentialgleichung dritter Ordnung definiren, der es in Bezug auf z genügt. Diese Differentialgleichung hat die übrigen wohlbekannte Gestalt:

$$(1) \quad \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta''}{\eta'} \right)^2 = f(z),$$

die dadurch definirt ist, dass sich die allgemeine Lösung aus einer beliebigen Particularlösung η als willkürliche lineare Function $\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ zusammensetzt. Der so bezeichnete Zusammenhang zwischen allgemeiner und particulärer Lösung überträgt sich natürlich auf die verschiedenen Zweige einer und derselben η -Function. Lässt man also z in seinem complexen Gebiete einen geschlossenen Weg beschreiben, d. h. einen solchen Weg, bei dem z selber, wie auch $f(z)$ die rechte Seite von (1), ihren ursprünglichen Werth wiedergewinnen, so wird η diesem Wege entsprechend eine gewisse lineare Substitution erfahren. Das Integral $\int f(z) \cdot dz$ wäre auf diesem Wege um einen Periodicitätsmodul gewachsen. Man kann das Wesen der neuen Functionen geradezu

*) Aus den Sitzungsberichten der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vom 29. Januar 1883.

**) Man vergl. etwa meinen neuerdings publicirten Aufsatz: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie“, Mathematische Annalen Bd. XXI, wo auch die anderweitige Literatur ausführlich angegeben ist.

unter dem Gesichtspunkte betrachten, dass man durchweg die Periodicitätsmoduln der Integrale und jene charakteristischen linearen Substitutionen der η -Function parallelisirt.

Ich habe mich nun gefragt, ob man die hiermit angedeutete Vergleichung nicht noch einen Schritt weiter treiben kann. Schreiben wir

$$(2) \quad d\eta = f(z) \cdot dz,$$

so heisst dies, dass η jedem Incremente dz von z entsprechend um eine bestimmte unendlich kleine Grösse vermehrt wird. Wir lösen die Differentialgleichung (2), indem wir von bestimmter unterer Grenze ausgehend den hiermit bezeichneten Process unendlich oft wiederholen; eben Dieses und nichts Anderes besagt das bestimmte Integral

$$(3) \quad \eta = \int_{z_0}^z f(z) \cdot dz + \eta_0.$$

Der Periodicitätsmodul aber, den η auf geschlossenem Wege erhält, ist nur ein specieller Werth dieses Integrals. — Genau entsprechend versuche ich im Folgenden die Differentialgleichung (1) aufzufassen. Und zwar werde ich zunächst zeigen, dass man dieselbe so interpretiren kann, als definire sie einem jeden Differential dz entsprechend eine auf η bezügliche unendlich kleine *lineare Transformation*. Reiht man sodann mehrere Differentiale dz aneinander, so setzen sich die entsprechenden linearen Transformationen als auf einander folgende Operationen zusammen, und es erwächst also die *allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1)*, indem man von einer *willkürlichen linearen Function* beginnend die letztere mit unendlich vielen durch (1) bestimmten *infinitesimalen linearen Transformationen componirt*. Die charakteristischen linearen Substitutionen von η aber, die geschlossenen Wegen entsprechen, sind wieder nur ein specielles Ergebniss des allgemeinen Lösungsprocesses.

Um die hiermit angedeuteten Anschauungen zu präcisiren, bedürfen wir zunächst, unter η eine beliebige Function von z verstanden, des Begriffs *der im Punkte $z = z_v$ osculirenden linearen Function*. Ich verstehe darunter diejenige lineare Function von z :

$$(4) \quad A_v(z) = \frac{a_v z + b_v}{c_v z + d_v},$$

die im Punkte $z = z_v$ mit η sowohl dem Werthe nach, als auch im ersten und zweiten Differentialquotienten übereinstimmt. Offenbar hat man (wie man durch Reihenentwicklung nach Potenzen von $(z - z_v)$ sofort verificirt):

$$(5) \quad A_v(z) = \eta_v + \frac{2\eta'_v{}^2(z - z_v)}{2\eta'_v - \eta''_v(z - z_v)}.$$

Wir bilden uns ferner den Begriff der auf zwei aufeinander folgende Punkte, z_v und z_{v+1} , bezüglichen *Uebergangssubstitution*. Ich definire als solche diejenige lineare Substitution, welche entsteht, wenn man in

$$A_v^{-1}(z) = \frac{-d_v z + b_v}{c_v z - a_v}$$

statt z den Werth

$$A_{v+1}(z) = \frac{a_{v+1} z + b_{v+1}}{c_{v+1} z + d_{v+1}}$$

einträgt, also in Formel:

$$(6) \quad S_{v,v+1} = A_v^{-1} \cdot A_{v+1}.$$

Wir mögen insbesondere die beiden Werthe z_v und z_{v+1} , wie es im Folgenden immer geschehen soll, *consecutiv* nehmen, also

$$(7) \quad z_{v+1} = z_v + dz_v$$

setzen. Ich bezeichne dann die betreffende Uebergangssubstitution, die ich in der Weise berechne, dass ich höhere Potenzen von dz_v vernachlässige, schlechthin mit dem Buchstaben S_v und nenne sie die zu dem Werthe z_v gehörige *infinitesimale* Uebergangssubstitution.

Dies vorausgeschickt sage ich nun zunächst, dass die Differentialgleichung (1) für jeden Punkt z_v die zu diesem Punkte gehörige infinitesimale Uebergangssubstitution der Function η bestimmt.

Zum Beweise wolle man vor Allem beachten, dass eine Uebergangssubstitution ungeändert bleibt, wenn man η , die zu Grunde liegende Function, durch irgend eine lineare Function von η , $T(\eta)$, ersetzt. Denn die beiden osculirenden linearen Functionen $A_v(z)$, $A_{v+1}(z)$ verwandeln sich dann in $T \cdot A_v(z)$, $T \cdot A_{v+1}(z)$ und $S_{v,v+1}$ in $(A_v^{-1} \cdot T^{-1}) \cdot (T \cdot A_{v+1})$, was aber nichts Anderes ist, als das alte $S_{v,v+1}$.

Nun hängen alle Lösungen von (1), wie wir wissen, linear von einander ab. Sie ergeben also alle dieselben Uebergangssubstitutionen und insbesondere dieselben infinitesimalen Uebergangssubstitutionen. Letztere müssen sich also a priori bestimmen lassen. In der That, die infinitesimale Uebergangssubstitution hängt nach dem Früheren von z_v , dz_v , η_v , η'_v , η''_v und η'''_v ab, indem wir nämlich, der Gleichung (7) entsprechend, setzen:

$$(8) \quad \begin{cases} \eta_{v+1} = \eta_v + \eta'_v \cdot dz_v, \\ \eta'_{v+1} = \eta'_v + \eta''_v \cdot dz_v, \\ \eta''_{v+1} = \eta''_v + \eta'''_v \cdot dz_v, \end{cases}$$

Nun giebt es aber keinen anderen aus η_v , η'_v , η''_v , η'''_v zusammengesetzten Ausdruck, der bei allen linearen Umänderungen von η ungeändert bliebe, als

$$(9) \quad \frac{\eta_v'''}{\eta_v'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta_v''}{\eta_v'} \right)^2,$$

die linke Seite unserer Differentialgleichung (1). Die infinitesimale Uebergangssubstitution kann also jedenfalls (ev. nach geeigneter Zuffügung eines Factors im Zähler und Nenner) so geschrieben werden, dass sie nur von z_v , dz_v und dem Ausdrücke (9) abhängt. Dass heisst aber ohne Weiteres, dass sie für die durch (1) bestimmte η -Function von Vornherein bekannt ist, was zu beweisen war.

Ich vervollständige diese Ueberlegung durch wirkliche Berechnung der Uebergangssubstitution. Am leichtesten dürfte sich dieselbe so gestalten, dass wir unter allen Lösungen von (1) diejenige, ξ , vorab herausgreifen, für welche die an der Stelle z_v osculirende lineare Function mit z selbst zusammenfällt, für welche also

$$(10) \quad \xi_v = z_v, \quad \xi_v' = 1, \quad \xi_v'' = 0$$

ist. Da allgemein

$$\frac{\xi_v'''}{\xi_v'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\xi_v''}{\xi_v'} \right)^2 = \frac{\eta_v'''}{\eta_v'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta_v''}{\eta_v'} \right)^2,$$

so wird

$$\xi_v''' = \frac{\eta_v'''}{\eta_v'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta_v''}{\eta_v'} \right)^2$$

zu setzen sein. Wir berechnen jetzt für ξ die im Punkte $z_{v+1} = z_v + dz_v$ osculirende lineare Function. Dieselbe ist nach (5) und (7):

$$= \xi_{v+1} + \frac{2 \xi_{v+1}^2 (z - z_v - dz_v)}{2 \xi_{v+1}' - \xi_{v+1}'' (z - z_v - dz_v)},$$

und also nach (8) unter Berücksichtigung der besonderen Werthe von ξ_v , ξ_v' , ξ_v'' :

$$(z_v + dz_v) + \frac{2(z - z_v - dz_v)}{2 - \xi_v''' dz_v (z - z_v - dz_v)},$$

oder, unter Wegwerfung höherer Potenzen von dz_v :

$$(11) \quad \frac{(2 - \xi_v''' z_v dz_v) z + (\xi_v''' z_v^2 dz_v)}{(-\xi_v''' dz_v) \cdot z + (2 + \xi_v''' z_v dz_v)}.$$

Dieser Ausdruck ist aber an sich mit der gesuchten Uebergangssubstitution identisch. Denn da $S_v = A_v^{-1} \cdot A_{v+1}$, für unser ξ aber A_v mit z zusammenfällt, so stimmt S_v ohne Weiteres mit dem bezüglichen A_{v+1} überein. Tragen wir nun noch für ξ_v''' seinen oben bestimmten Werth ein, so haben wir als Definition der Uebergangssubstitution S_v die allgemeine Formel:

$$(12) \quad S_v = \frac{\left(2 - \left(\frac{\eta_v'''}{\eta_v'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta_v''}{\eta_v'} \right)^2 \right) z_v dz_v \right) z + \left(\frac{\eta_v'''}{\eta_v'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta_v''}{\eta_v'} \right)^2 \right) z_v^2 dz_v}{-\left(\frac{\eta_v'''}{\eta_v'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta_v''}{\eta_v'} \right)^2 \right) dz_v \cdot z + \left(2 + \left(\frac{\eta_v'''}{\eta_v'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta_v''}{\eta_v'} \right)^2 \right) z_v dz_v \right)}.$$

Was jetzt die *Lösung* unserer Differentialgleichung (1) auf Grund der hiermit entwickelten Formeln angeht, so denke man sich eine Reihenfolge von Punkten $z_0, z_1, z_2, \dots, z_v, \dots, z_n$ fixirt, die wir allmählich unter Festhaltung der Endpunkte immer dichter werden lassen, indem wir n grösser und grösser nehmen. Sei $A_0(z)$ eine beliebige lineare Function von z , von der wir annehmen, dass sie im Punkte $z = z_0$ die zu berechnende η -Function osculirt, eine Annahme, welche die drei willkürlichen Constanten fixirt, die in der allgemeinen Lösung von (1) enthalten sind. Dann haben wir der Reihe nach vermöge (6):

$$(13) \quad \begin{cases} A_1(z) = A_0 \cdot S_{0,1}, \\ A_2(z) = A_1 \cdot S_{0,1} \cdot S_{1,2}, \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{cases}$$

schliesslich:

$$(14) \quad A_n(z) = A_0 \cdot S_{0,1} \cdot S_{1,2} \cdots S_{n-1,n},$$

oder auch, indem wir n unendlich werden lassen und also die einzelnen Uebergangssubstitutionen $S_{v,v+1}$ durch die *infinitesimalen* S_v ersetzen:

$$(15) \quad A_n(z) = A_0 \cdot S_0 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdots S_n.$$

(lim $n = \infty$)

Dies ist die *gesuchte Lösung*. Denn unsere Formel lässt uns $A_n(z)$, jene lineare Function, welche η an einer beliebig vorgegebenen Stelle $z = z_n$ osculirt, aus dem willkürlich angenommenen, auf $z = z_0$ bezüglichen $A_0(z)$, durch Aneinanderreihung von unendlich vielen unendlich kleinen linearen Transformationen berechnen.

Ich komme nicht noch einmal auf den Vergleich dieser Formel mit der Begriffsbestimmung des bestimmten Integrals, der auf der Hand liegt, zurück. So wie man den Integrationsweg im complexen Gebiete in hohem Maasse abändern kann, ohne den Werth des Integrals zu ändern, so in (15) die Reihenfolge der zwischen z_0 und z_n eingeschalteten Punkte. Und wie das Integral über einen geschlossenen Weg erstreckt einen Periodicitätsmodul liefert, so Formel (15) die auf unsere η -Function bezügliche, dem geschlossenen Wege entsprechende charakteristische lineare Substitution.

Was die *Convergenz* unseres Verfahrens angeht, so braucht dieselbe kaum besonders erläutert zu werden. Denn *materiell* unterscheidet sich unser Verfahren nur unwesentlich von dem gewöhnlichen, eine Differentialgleichung dritter Ordnung zu integrieren. Indem wir aus A_v mittelst der Uebergangssubstitution S_v das A_{v+1} berechnen, erreichen wir ja, von Termen höherer Ordnung in dz_v abgesehen, jedesmal dasselbe, als wenn wir den Formeln (8) entsprechend

$$\begin{aligned} \eta_{v+1} &= \eta_v + \eta'_v \cdot dz_v, & \eta'_{v+1} &= \eta'_v + \eta''_v \cdot dz_v, \\ \eta''_{v+1} &= \eta''_v + \eta'''_v \cdot dz_v \end{aligned}$$

setzen. Es ist nur die *Form* unserer Lösung und die in ihr liegende Auffassung von der *Bedeutung* der Differentialgleichungen (1), welche, wenn überhaupt, einigen Werth beanspruchen dürfte.

A n h a n g.*)

Ich lasse hier noch einige Bemerkungen folgen, welche bestimmt sind, die vorstehenden Erläuterungen mit anderweitigen Untersuchungen in Verbindung zu setzen und Gesichtspunkte anzudeuten, die mir einen gewissen Werth zu besitzen scheinen.

Wird vermöge der gerade entwickelten Betrachtungen die Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$(16) \quad \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta''}{\eta'} \right)^2 = f(\eta)$$

mit der unmittelbar integrierbaren Differentialgleichung:

$$(17) \quad \eta' = f(\eta)$$

zusammengeordnet, so giebt es noch eine dritte Differentialgleichung, welche bei analoger Auffassungsweise mit den genannten beiden zusammengehört.

Nach den Untersuchungen von Lie nämlich**) lassen sich alle Transformationsgruppen, welche neben einer einzelnen Variablen continuirlich veränderliche Parameter in endlicher Zahl enthalten, auf einen der drei Typen zurückführen:

$$(18) \quad \eta_1 = \eta + C,$$

$$(19) \quad \eta_1 = a\eta + b,$$

$$(20) \quad \eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}.$$

Eliminiren wir hier bei (18) oder bei (20) zwischen η und seinen successiven Differentialquotienten auf möglichst einfache Weise die vorkommenden Constanten, so werden wir gerade zu den Differentialausdrücken

$$\eta' \quad \text{und} \quad \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta''}{\eta'} \right)^2$$

geführt, welche in den linken Seiten von (17) und (16) auftreten. Entsprechend erwächst die neue hier in Betracht zu ziehende Art von Differentialgleichungen, indem wir aus (19) und den beiden Gleichungen, die sich aus (19) durch Differentiation ergeben, die beiden Constanten a, b eliminiren. Auf solche Weise entsteht:

*) [Zugefügt Jan. 1884].

**) Siehe etwa Math. Annalen Bd. XVI (1880): *Theorie der Transformationsgruppen*, insbesondere p. 455 daselbst.

$$\frac{\eta_1''}{\eta_1} = \frac{\eta''}{\eta};$$

die neuen Differentialgleichungen lauten also:

$$(21) \quad \frac{\eta''}{\eta} = f(z).$$

Natürlich ist eine solche Differentialgleichung durch zweifache Quadratur vermöge der Formel:

$$(22) \quad \eta = \int dz e^{\int f(z) dz}$$

aufzulösen. An gegenwärtiger Stelle aber werden wir uns die betreffende Lösung in ähnlicher Weise durch Aufeinanderfolge unendlich vieler unendlich kleiner Operationen (19) construirt denken, wie wir dies betreffs der Gleichungen (16) mit Bezug auf unendlich kleine Substitutionen (20) vorstehend erläutert haben. Wir werden also zunächst für eine beliebige Function η von z an beliebiger Stelle z_v eine Contactfunction:

$$(23) \quad \eta = A + B(z - z_v)$$

construiren (wo A offenbar $= \eta_v$, $B = \eta'_v$ ist) und nun die *infinitesimale Uebergangstransformation* vom Typus (19) suchen, welche diese Contactfunction in die dem Punkte $z_v + dz_v$ entsprechende überführt.

Diese Uebergangstransformation kann nur von $\frac{\eta''}{\eta}$ abhängen, in der That finden wir dieselbe:

$$(24) \quad S_v = z + \frac{\eta''_v}{\eta'_v} (z - z_v) dz_v.$$

Die Bedeutung einer Differentialgleichung (21) ist also diese, dass für die durch sie definirte η -Function besagte infinitesimale Uebergangstransformation a priori bekannt ist. Und nun construiren wir uns die Lösung von (21), indem wir nach dem Schema (15) (siehe oben) unendlich viele derartige unendlich kleine Transformationen an einander reihen.

Wir wollen jetzt insbesondere annehmen, dass die rechte Seite $f(z)$ unserer Differentialgleichungen eine *algebraische* Function von z sei. Indem wir uns sodann die zugehörige Riemann'sche Fläche (über der z -Ebene) construiren, erhalten wir auf dieser dreierlei η -Functionen, welche die Eigenschaft haben, sich nach Durchlaufung eines beliebigen geschlossenen Weges je nachdem entweder in der Gestalt (18), oder (19), oder (20), zu reproduciren. Die Functionen ersterer Art sind wohlbekannt, es sind die *Integrale algebraischer Functionen* oder kurz gesagt: die *Abel'schen Integrale*. Von den Functionen dritter Art habe ich in meiner schon citirten Arbeit*) einen be-

*) Mathem. Ann. XXI: Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie, insbesondere p. 182—185.

stimmten einfachen Typus betrachtet, der auf der Riemann'schen Fläche keine anderen Singularitäten, als algebraische, bez. logarithmische Verzweigungen darbietet. Ich bezeichnete eine solche Function dementsprechend mit der *Signatur* (p, n, l_k) , wo p das Geschlecht der Riemann'schen Fläche, n die Zahl der Verzweigungspunkte, l_k den Exponenten der einzelnen Verzweigungspunkte angab. In den parallel laufenden Untersuchungen von Poincaré treten noch allgemeinere Fälle dieser Functionen dritter Art auf*). *Aber auch die Functionen zweiter Art sind bereits verschiedentlich behandelt worden.* Hierher gehören die sogenannten *Wurzelfunctionen*, auf welche Riemann im zweiten Theile seiner Abel'schen Functionen (Nr. 26, 27) eingeht, d. h. algebraische Functionen des Ortes, welche sich bei Durchlaufung eines beliebigen auf der Riemann'schen Fläche geschlossenen Weges mit einer Einheitswurzel multipliciren. Allgemein und unter principiellen Gesichtspunkten, die ich sogleich zur Sprache bringen muss, hat die Functionen zweiter Art sodann Hr. Prym in Betracht gezogen (Borchardt's Journal Bd. 70: *Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen* $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$). Neuerdings endlich hat sich Hr. Appell mit diesen Functionen wiederholt beschäftigt (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences vom 18. April 1881 und vom 23. Oktober 1882, Journal des Mathématiques pures et appliquées, 3. sér., t. 9 (1883): *Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce*).

Was die principiellen Gesichtspunkte von Hrn. Prym angeht, so beziehen sich dieselben auf Folgendes. Bekanntlich hat Riemann gefunden, dass man das einzelne Abel'sche Integral auf gegebener Riemann'scher Fläche durch seine Unendlichkeitspunkte und die reellen Theile seiner Periodicitätsmoduln im Wesentlichen (d. h. von der Integrationsconstante abgesehen) vollständig bestimmen könne. Hr. Prym giebt nun (leider ohne Beweis) für solche η -Functionen zweiter Art, deren beliebigen geschlossenen Wegen entsprechende Multiplicatoren jeweils den absoluten Betrag 1 haben, analoge transcendente Bestimmungsstücke an.

Wir werden fragen, ob eine entsprechende transcendente Bestimmungsweise nicht auch bei den η -Functionen dritter Art, insbesondere bei denjenigen von der Signatur (p, n, l_k) möglich sei? Eine solche η -Function enthält, wie ich l. c. zeigte, sofern man die Riemann'sche Fläche und die n Verzweigungspunkte auf ihr als gegeben ansieht,

*) Man vergl. neben den schon in Bd. XXI citirten Publicationen von Poincaré dessen in der Zwischenzeit in den Acta Mathematica erschienene Abhandlungen, sowie verschiedene neue Noten in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

von den Integrationsconstanten abgesehen, noch $(3p - 3 + n)$ willkürliche Constante*). Es ist leicht zu sehen, dass dieselben in der rechten Seite der Differentialgleichung (16) linear auftreten. Andererseits bieten jene „erzeugenden“ Substitutionen:

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta},$$

welche den Querschnitten der Riemann'schen Fläche und den Umkreisungen der Verzweigungspunkte entsprechen, mit Rücksicht auf die zwischen ihnen bestehende „Fundamentalrelation“ und die im Ausgangswerte η enthaltenen drei willkürlichen Constanten ihrerseits $6p + 2n - 6$ disponible Substitutionscoefficienten dar. Wir werden fragen, ob man für diese $6p + 2n - 6$ Coefficienten in einfacher Weise derart $(3p + n - 3)$ Bedingungen aufstellen kann, dass auf gegebener Riemann'scher Fläche bei gegebenen Verzweigungspunkten diesen Bedingungen entsprechend von den Integrationsconstanten abgesehen immer gerade eine η -Function (p, n, l_k) existirt.

Es ist mir, wenn es sich um die allgemeinsten derartigen Bedingungen handeln soll, bisher nicht gelungen, eine bestimmte Antwort auf diese Frage zu finden. Wohl aber kann man unendlich viele directe Fälle derartiger Bedingungssysteme aufstellen. In der That ist die Bedeutung des l. c. gegebenen „Fundamentaltheorems“**) im Zusammenhange der hier vorgetragenen Betrachtungen gerade diese, uns mit unendlich vielen Fällen brauchbarer Bedingungssysteme bekannt zu machen. Dasselbe besagt z. B., dass auf gegebener Riemann'scher Fläche etc. immer eine eindeutig umkehrbare η -Function (p, n, l_k) existirt, welche lauter reelle Substitutionscoefficienten darbietet, was in der That, da es sich um das Null-Sein von $(6p + 2n - 6)$ rein imaginären Theilen handelt, mit $(3p + n - 3)$ gewöhnlichen (auf complexe Zahlen bezüglichen) Bedingungen gleichwerthig ist. Aehnlich in allen anderen Fällen.

Auf die hiermit dargelegte Auffassung des Fundamentaltheorems möchte ich Gewicht legen. Denn sie nähert die Betrachtungen von Bd. XXI auf neue Weise dem Riemann'schen Ideenkreise an. Es hat nämlich Riemann in einem verwandten Falle eine Gattung transcender Functionen durch Periodicitätsforderungen zu bestimmen gesucht. Es geschieht dies in dem von Hrn. Weber bearbeiteten Fragmente: *Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen*

*) Hierbei sind nur die niedersten Fälle: $p = 0$, $n < 3$ und $p = 1$, $n = 0$ ausgeschlossen.

**) Cf. pag. 206 ff. daselbst. — Was den Beweis des Fundamentaltheorems angeht, so vergl. man eine neuere Mittheilung von Poincaré in den Comptes Rendus vom 21. Mai 1883 (t. 96, p. 1485–87) sowie eine in Bd. IV der Acta Mathematica erscheinende Arbeit: *Sur les groupes des équations linéaires*.

mit algebraischen Coefficienten*), welches eine Fortsetzung zu der Abhandlung über die Gaussische Reihe**) bildet und gleich dieser aus dem Jahre 1857 stammt. Bei der Differentialgleichung der Gaussischen Reihe genügt es, nur die Art der Verzweigungspunkte zu fixiren. In den höheren Fällen aber bleiben hierüber hinaus Constante disponibel, und es fragt sich Riemann, ob man zu ihrer Fixirung nicht die Coefficienten der Periodicitätssubstitutionen benutzen könne. Der ganze Ansatz ist dem unsrigen um so ähnlicher, als man die Lösungen der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung in ganz ähnlicher Weise durch Aneinanderreihung unendlich kleiner Operationen aufbauen kann, wie wir dies bei den Differentialgleichungen (16), (17), (21) gethan haben. Man muss zu dem Zwecke statt der einen von uns betrachteten Variablen η nur immer gleichzeitig n linear unabhängige Lösungen:

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

in Betracht ziehen und dann statt der Gruppen (18), (19), (20) die Gesamtheit der homogenen linearen Substitutionen von n Grössen verwenden.

Es ist mit diesen letzten Bemerkungen zugleich eine weitere Ausdehnung unserer Betrachtungen indicirt, indem wir nämlich überhaupt statt der Transformationsgruppen (18)—(29), die sich auf nur eine Variable beziehen, solche mit grösserer Variablenzahl zu Grunde legen und nun diejenigen Differentialgleichungen untersuchen können, welche sich durch Elimination der Parameter ergeben. Ich muss mich in diesem Betracht darauf beschränken, wiederholt auf Lie's allgemeine Untersuchungen über Transformationsgruppen, sowie auf Halphen's Theorie der Differentialinvarianten zu verweisen***).

*) Riemann's Werke, p. 357 ff.

**) Werke, p. 62 ff.

***) Siehe insbesondere die Arbeit: *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y , die eine Gruppe von Transformationen gestatten*, im Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (Christiania) vom Jan. 1883, wo Lie die Stellung seiner Untersuchungen zu denen von Halphen präcisirt.