Sopra i sistemi tripli di superficie isoterme e ortogonali.

(*Memoria di ENRICO BETTI, a Pisa.*)

È noto il seguente teorema dovuto a LAMÉ:

Non esistono altri sistemi tripli di superficie ortogonali e isoterme, fuori che quelli dei quali fanno parte superficie cilindriche e coniche, i sistemi di superficie di secondo grado omofocali, e il sistema di paraboloidi che è un caso limite di questo ultimo.

La dimostrazione che ha dato di questo teorema il suo scuopritore è molto complicata, e soltanto mediante considerazioni geometriche è stata dal sig. SERRET diminuita questa complicità. Quindi mi è sembrato non inutile di pubblicare la seguente dimostrazione che è interamente analitica e semplice.

Affinchè un sistema triplo di superficie sia ortogonale e isoterma è necessario e sufficiente che denotando con

$$y_1 = \text{cost.} \quad y_2 = \text{cost.} \quad y_3 = \text{cost.}$$

l'equazioni dei tre sistemi di superficie, e con x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane, l'elemento lineare dello spazio espresso per le coordinate curvilinee y_1, y_2, y_3 , prenda la forma

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \psi_2 \psi_3 dy_1^2 + \psi_3 \psi_1 dy_2^2 + \psi_1 \psi_2 dy_3^2$$

dove ψ_i è una funzione delle y che non contiene la y_i .

Le condizioni trovate in generale da RIEMANN, CHRISTOFFEL e LIEPSCHITZ per l'equivalenza delle forme differenziali omogenee di secondo grado e che per questo caso furono trovate da LAMÉ, sono espresse da due sistemi di equazioni

a derivate parziali, ai quali può darsi la seguente forma:

$$\left. \begin{aligned} \psi_2 \frac{\partial^2 \log \sqrt{\psi_1}}{\partial y_2^2} + \psi_3 \frac{\partial^2 \log \sqrt{\psi_1}}{\partial y_3^2} &= -\psi_1 \frac{\partial \log \sqrt{\psi_2}}{\partial y_1} \frac{\partial \log \sqrt{\psi_3}}{\partial y_1} + \psi_2 \frac{\partial \log \sqrt{\psi_3}}{\partial y_2} \frac{\partial \log \sqrt{\psi_1}}{\partial y_2} + \psi_3 \frac{\partial \log \sqrt{\psi_1}}{\partial y_3} \frac{\partial \log \sqrt{\psi_2}}{\partial y_3} \\ \psi_3 \frac{\partial^2 \log \sqrt{\psi_2}}{\partial y_3^2} + \psi_1 \frac{\partial^2 \log \sqrt{\psi_2}}{\partial y_1^2} &= \psi_1 \frac{\partial \log \sqrt{\psi_2}}{\partial y_1} \frac{\partial \log \sqrt{\psi_3}}{\partial y_1} - \psi_2 \frac{\partial \log \sqrt{\psi_3}}{\partial y_2} \frac{\partial \log \sqrt{\psi_1}}{\partial y_2} + \psi_3 \frac{\partial \log \sqrt{\psi_1}}{\partial y_3} \frac{\partial \log \sqrt{\psi_2}}{\partial y_3} \\ \psi_1 \frac{\partial^2 \log \sqrt{\psi_3}}{\partial y_1^2} + \psi_2 \frac{\partial^2 \log \sqrt{\psi_3}}{\partial y_2^2} &= \psi_1 \frac{\partial \log \sqrt{\psi_2}}{\partial y_1} \frac{\partial \log \sqrt{\psi_3}}{\partial y_1} + \psi_2 \frac{\partial \log \sqrt{\psi_3}}{\partial y_2} \frac{\partial \log \sqrt{\psi_1}}{\partial y_2} - \psi_3 \frac{\partial \log \sqrt{\psi_1}}{\partial y_3} \frac{\partial \log \sqrt{\psi_2}}{\partial y_3} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} -\psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y_3} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_2} + \psi_2 \frac{\partial \psi_3}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_3} + \psi_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_3} &= 0 \\ \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y_3} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_1} - \psi_2 \frac{\partial \psi_3}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_3} + \psi_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} &= 0 \\ \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_2} + \psi_2 \frac{\partial \psi_3}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} - \psi_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Affinchè l'equazioni (2) coesistano dovrà essere

$$0 = \begin{vmatrix} -\frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_3} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_3} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_3} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_3} \end{vmatrix} =$$

$$0 = \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_3} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_1} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}.$$

Ora le derivate delle funzioni ψ non possono annullarsi altro che quando alcuno dei sistemi di superficie è cilindrico o conico; non possono neppure divenire infinite, quindi se i sistemi di superficie non ne contengono dei cilindrici nè dei conici dovrà essere

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_3} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_1} = 0$$

ossia

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & 0 \frac{\partial \psi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè una delle tre funzioni, per esempio ψ_2 , sia una funzione delle altre due indipendente dalle y_1, y_2, y_3 . Avremo dunque

$$\psi_2 = \psi_2(\psi_1, \psi_3).$$

Sostituendo nella terza dell'equazioni (2), avremo:

$$\psi_2 = \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_1} + \psi_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_3}.$$

Dunque ψ_2 funzione omogenea, di grado primo, di ψ_1 e ψ_3 . Onde

$$\psi_2 = \psi_1 f\left(\frac{\psi_3}{\psi_1}\right).$$

Ponendo

$$\frac{\psi_3}{\psi_1} = \alpha$$

avremo

$$\left. \begin{aligned} \psi_3 &= \psi_1 \alpha \\ \psi_2 &= \psi_1 f(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Poniamo

$$\frac{\partial \log \sqrt{f(z)}}{\partial \log \sqrt{z}} = f', \quad \frac{\partial^2 \log \sqrt{f(z)}}{(\partial \log \sqrt{z})^2} = f''.$$

Poichè ψ_2 non contiene y_2 , e ψ_3 è indipendente da y_3 , avremo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \log \sqrt{\psi_1}}{\partial y_3} &= -\frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \log \sqrt{\psi_1}}{\partial y_2} &= -f' \frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

e sostituendo i valori (3) e (4) nelle equazioni (1) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \sqrt{z}}{\partial y_1^2} + f(1-f') \frac{\partial^2 \log \sqrt{z}}{\partial y_2^2} &= f' \left(\frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_1} \right)^2 + f(f'' + f'^2 - f') \left(\frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_2} \right)^2 - \alpha(1-f') \left(\frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_3} \right)^2 \\ \frac{\partial^2 \log \sqrt{z}}{\partial y_3^2} + f f'' \frac{\partial^2 \log \sqrt{z}}{\partial y_2^2} &= f' \left(\frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_1} \right)^2 - f(f'' + f'^2 - f') \left(\frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_2} \right)^2 + \alpha(1-f') \left(\frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_3} \right)^2 \\ \frac{\partial^2 \log \sqrt{z}}{\partial y_1^2} - (1-f') \frac{\partial^2 \log \sqrt{z}}{\partial y_3^2} &= (f' - f'') \left(\frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_1} \right)^2 - f(f'^2 - f') \left(\frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_2} \right)^2 + (1-f' - f'') \left(\frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_3} \right)^2. \end{aligned}$$

Se moltiplichiamo la prima di queste equazioni per f' , la seconda per $f' - 1$, la terza per -1 e le sommiamo, avremo:

$$0 = (f'' + 2f'^2 - 2f') \left[\left(\frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_1} \right)^2 + f' \left(\frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_2} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial \log \sqrt{z}}{\partial y_3} \right)^2 \right].$$

Poichè la forma dell'elemento lineare è positiva, $\psi_1\psi_2$ e $\psi_1\psi_3$ sono positivi sempre e quindi anche $\frac{\psi_2}{\psi_1}$ e $\frac{\psi_3}{\psi_1}$ ossia f ed α . Dunque il 2° fattore non può essere zero, se tutti i termini non sono nulli, ossia α costante, ma se è costante α , sarà costante anche $f(\alpha)$ e quindi ψ_2 e ψ_3 non potranno differire da ψ_1 altro che per un fattore costante. Ma ψ_3 non contiene y_3 quindi ψ_1 non conterrà y_3 , ψ_2 non contiene y_2 , quindi ψ_1 non conterrà neppure y_2 e non potrà essere altro che una costante; e quindi anche ψ_2 e ψ_3 costanti, e l'elemento lineare ha i coefficienti costanti e i tre sistemi di superficie sono tre sistemi di piani ortogonali. Avremo dunque necessariamente, escludendo questo caso,

$$f'' + 2f'^2 - 2f' = 0.$$

Ma

$$f' = \frac{\partial \log \sqrt{f}}{\partial \log \sqrt{\alpha}} = \frac{df}{d\alpha} \frac{\alpha}{f}, \quad f'' = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \frac{\alpha^2}{f} + 2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{f} - 2\alpha^2 \left(\frac{df}{d\alpha} \right)^2 \frac{1}{f^2}$$

onde:

$$f'' + 2f'^2 - 2f' = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \frac{\alpha^2}{f} = 0$$

$$f = c + c' \alpha$$

ossia

$$\psi_2 = c \psi_1 + c' \psi_3$$

ed inchiudendo le costanti in ψ_1 e ψ_3 ,

$$\psi_2 = \psi_1 + \psi_3.$$

Ma ψ_2 non contiene y_2 . Quindi:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \psi_2} = - \frac{\partial \psi_3}{\partial \psi_2}$$

e poichè ψ_1 non contiene y_1 , e ψ_3 non contiene y_3 , queste due derivate saranno funzioni della sola y_2 e avremo

$$\psi_1 = A_2 - A_3$$

$$\psi_3 = -A_2 + A_1$$

e

$$\psi_2 = A_1 - A_3$$

ed A_i funzione soltanto di y_i .

La forma dell'elemento lineare per tutti i sistemi tripli di superficie isoterme ortogonali che non contengono sistemi cilindrici e conici, sarà dunque

$$ds^2 = (A_1 - A_2)(A_1 - A_3)\theta_1 dy_1^2 + (A_2 - A_3)(A_1 - A_2)\theta_2 dy_2^2 + (A_1 - A_3)(A_2 - A_3)\theta_3 dy_3^2 \quad (5)$$

dove le θ_i e le A_i sono funzioni soltanto di y_i .

Determiniamo ora tutte le sostituzioni che danno all'elemento lineare la forma (5).

Ponendo

$$B_i = (A_i - A_{i+1})(A_i - A_{i+2})\theta_i$$

bisogna integrare il sistema di equazioni

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} = \sum_s \frac{(\alpha s \beta)}{B_s} \frac{\partial x}{\partial y_s} \quad (6)$$

dove:

$$(\alpha s \beta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B_{\alpha s}}{\partial y_\beta} + \frac{\partial B_{s\beta}}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial y_s} \right)$$

cioè:

$$(iii) = \frac{1}{2} \frac{\partial B_i}{\partial y_i}, \quad (iii') = \frac{1}{2} \frac{\partial B_i}{\partial y_{i'}}, \quad (ii'i) = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_i}{\partial y_{i'}}, \quad (ii'i'') = 0.$$

Poniamo

$$\frac{\partial x}{\partial y_i} = p_i$$

avremo

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial y_\beta} = \sum_s \frac{(\alpha s \beta)}{B_s} p_s$$

e affinché:

$$f(p_1 p_2 p_3, y_1 y_2 y_3) = \text{cost.}$$

sia un integrale di questo sistema di equazioni, è necessario e sufficiente che sia una soluzione comune del sistema di equazioni a derivate parziali:

$$\left. \begin{aligned} A_1(f) &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \sum_s (is1) \frac{p_s}{B_s} + \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0 \\ A_2(f) &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \sum_s (is2) \frac{p_s}{B_s} + \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0 \\ A_3(f) &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \sum_s (is3) \frac{p_s}{B_s} + \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Questo sistema è Jacobiano quando sono soddisfatte l'equazioni (1) e (2).

Infatti affinchè sia tale è necessario e sufficiente che sia

$$A_r[A_s(f)] - A_s[A_r(f)] = \sum_i C_v \frac{\partial f}{\partial p_i} + \sum_i C'_v \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0$$

dove:

$$C_v = \sum_{\mu} \left| \begin{array}{cc} \sum_l (\mu l r) \frac{p_l}{B_l}, & \sum_l (\mu l s) \frac{p_l}{B_l} \\ (\nu \mu r) \frac{1}{B_{\mu}}, & (\nu \mu s) \frac{1}{B_{\mu}} \end{array} \right| + \frac{\partial}{\partial y_r} \sum_l (\nu l s) \frac{p_l}{B_l} - \frac{\partial}{\partial y_s} \sum_l (\nu l r) \frac{p_l}{B_l} \quad (8)$$

ossia:

$$C_v \sum_l \frac{p_l}{B_l} \left\{ \sum_{\mu} \frac{1}{B_{\mu}} \left| \begin{array}{cc} (\mu l r), & (\mu l s) \\ (\nu \mu r), & (\nu \mu s) \end{array} \right| + \frac{\partial}{\partial y_r} (\nu l s) - \frac{\partial}{\partial y_s} (\nu l r) + \frac{(\nu l r)}{B_l} \frac{\partial B_l}{\partial y_s} - \frac{(\nu l s)}{B_l} \frac{\partial B_l}{\partial y_r} \right\}.$$

Ora l'equazioni (1) e (2) non sono altro che condizioni di trasformabilità, cioè:

$$\frac{\partial}{\partial y_r} (\nu l s) - \frac{\partial (\nu l r)}{\partial y_s} + \sum_{\mu} \frac{1}{B_{\mu}} \left| \begin{array}{cc} (\nu \mu r) & (\nu \mu s) \\ (l \mu r) & (l \mu s) \end{array} \right| = 0$$

onde quando queste siano soddisfatte, avremo sostituendo nella (8)

$$C_v = \sum_l \frac{p_l}{B_l} \left\{ \sum_{\mu} \frac{1}{B_{\mu}} \left| \begin{array}{cc} (\mu l r) + (l \mu r), & (\mu l s) + (l \mu s) \\ (\nu \mu r) & (\nu \mu s) \end{array} \right| + \frac{1}{B_l} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial B_l}{\partial y_s} & \frac{\partial B_l}{\partial y_r} \\ (\nu l s) & (\nu l r) \end{array} \right| \right\}.$$

Ma:

$$(\mu l r) + (l \mu r) = \frac{\partial B_{l\mu}}{\partial y_r}$$

$$(\mu l s) + (l \mu s) = \frac{\partial B_{l\mu}}{\partial y_s}$$

onde:

$$C_v = 0.$$

Abbiamo inoltre

$$C'_v = 0$$

perchè sono costanti tutti i coefficienti delle derivate parziali rispetto alle y_i . Dunque il sistema (7) è Jacobiano ed ha $6 - 3$, ossia tre soluzioni.

Pertanto avremo tre equazioni tra le p le y e tre costanti arbitrarie; onde le p saranno determinate in funzione delle y e di tre costanti, e quindi:

$$x = \int \sum p_i dy_i \quad (9)$$

ed x funzione determinata delle y di tre costanti e di un additiva.

Poichè l'equazioni (6) sono lineari rispetto alle p e alle loro derivate, gli integrali più generali avranno la forma

$$p_i = \sum a_s Y_{si}$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono le tre costanti arbitrarie, e le Y_{si} funzioni soltanto delle y_i e non delle costanti arbitrarie, che soddisfano coll'equazioni (6). Prendiamo tre sistemi di valori per le costanti: λ_i, μ_i, ν_i . Avremo

$$p_i = \sum \lambda_i Y_{si}, \quad p'_i = \sum \mu_i Y_{si}, \quad p''_i = \sum \nu_i Y_{si}.$$

Affinchè le tre funzioni x, x', x'' che otterremo dalla (9) diano la forma (5) è necessario che si abbia

$$p_1^2 + p_1'^2 + p_1''^2 = B_1, \quad p_2^2 + p_2'^2 + p_2''^2 = B_2, \quad p_3^2 + p_3'^2 + p_3''^2 = B_3 \quad (8)$$

onde

$$\sum_s (\lambda_s^2 + \mu_s^2 + \nu_s^2) Y_{s1}^2 + 2 \sum_s (\lambda_s \lambda_{s'} + \mu_s \mu_{s'} + \nu_s \nu_{s'}) Y_{s1} Y_{s'1} = 0$$

$$\sum_s (\lambda_s^2 + \mu_s^2 + \nu_s^2) Y_{s2}^2 + 2 \sum_s (\lambda_s \lambda_{s'} + \mu_s \mu_{s'} + \nu_s \nu_{s'}) Y_{s2} Y_{s'2} = 0$$

$$\sum_s (\lambda_s^2 + \mu_s^2 + \nu_s^2) Y_{s3}^2 + 2 \sum_s (\lambda_s \lambda_{s'} + \mu_s \mu_{s'} + \nu_s \nu_{s'}) Y_{s3} Y_{s'3} = 0.$$

Se

$$\sum_s Y_{si}^2 = 1$$

saranno soddisfatte le (8) quando si abbia

$$\lambda_s^2 + \mu_s^2 + \nu_s^2 = 1, \quad \lambda_s \lambda_{s'} + \mu_s \mu_{s'} + \nu_s \nu_{s'} = 0$$

ossia quando siano λ, μ, ν i coseni degli angoli che determinano la direzione di un sistema triplo di assi ortogonali, rispetto agli assi coordinati. Quindi le costanti degli integrali determinano soltanto la posizione delle superficie isoterme e non la loro natura e trovato un sistema, questo è l'unico.

Basterà dunque trovare una sola sostituzione che dia all'elemento lineare la forma (5).

Le equazioni (6) in questo caso divengono

$$2 \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{A'_1 \frac{\partial x}{\partial y_2} - A'_2 \frac{\partial x}{\partial y_1}}{A_1 - A_2}, \quad 2 \frac{\partial^2 x}{\partial y_2 \partial y_3} = \frac{A'_2 \frac{\partial x}{\partial y_3} - A'_3 \frac{\partial x}{\partial y_2}}{A_2 - A_3},$$

$$2 \frac{\partial^2 x}{\partial y_3 \partial y_1} = \frac{A'_1 \frac{\partial x}{\partial y_3} - A'_3 \frac{\partial x}{\partial y_1}}{A_1 - A_3}$$

le quali sono soddisfatte prendendo

$$x = \sqrt{C} \cdot f_1 f_2 f_3$$

$$2f'_i = \frac{A'_i}{f_i}, \quad f_i^2 = A_i - a_i.$$

Onde una soluzione è

$$x_1 = \sqrt{C_1} \sqrt{(A_1 - a_1)(A_2 - a_2)(A_3 - a_3)}.$$

Altre due si avranno prendendo due altri valori per a_1

$$x_2 = \sqrt{C_2} \sqrt{(A_1 - a_2)(A_2 - a_2)(A_3 - a_2)}$$

$$x_3 = \sqrt{C_3} \sqrt{(A_1 - a_3)(A_2 - a_3)(A_3 - a_3)}.$$

Quindi:

$$\frac{x_1^2}{A_1 - a_1} + \frac{x_2^2}{A_1 - a_2} + \frac{x_3^2}{A_1 - a_3} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{A_2 - a_1} + \frac{x_2^2}{A_2 - a_2} + \frac{x_3^2}{A_2 - a_3} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{A_3 - a_1} + \frac{x_2^2}{A_3 - a_2} + \frac{x_3^2}{A_3 - a_3} = 1,$$

se

$$C_1 = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$$

$$C_2 = \frac{1}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}$$

$$C_3 = \frac{1}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

Questa sostituzione fa acquistare all'elemento lineare la forma

$$ds^2 = \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)A_1'^2}{(A_1 - a_1)(A_1 - a_2)(A_1 - a_3)} dy_1^2 + \frac{(A_2 - A_3)(A_1 - A_2)A_2'^2}{(A_2 - a_1)(A_2 - a_2)(A_2 - a_3)} dy_2^2 +$$

$$\frac{(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)A_3'^2}{(A_3 - a_1)(A_3 - a_2)(A_3 - a_3)} dy_3^2$$

e prendendo:

$$\frac{dA_i}{\sqrt{(A_i - a_1)(A_i - a_2)(A_i - a_3)}} = \sqrt{\theta_i} \cdot dy$$

abbiamo la forma (5). Il sistema di superficie è unico. Con che riman dimostrato il teorema di LAMÉ.