STATISTICA DEI SISTEMI NON PERTURBATI.

di LUDOVICO SILBERSTEIN.

Lo stato d' un sistema qualunque sia determinato, all' istante t , dai valori numerici di n quantità indipendenti tra loro ¹⁾ $x_1, x_2, \dots x_n$, e le leggi differenziali di questo sistema siano date dalle n equazioni

$$(1) \quad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots x_n), \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Se le funzioni f_i sono *funzioni dello stato* istantaneo del sistema, cioè se esse *non* contengono esplicitamente il tempo t , chiamo il sistema *non perturbato*, indipendentemente dalle sue proprietà specifiche e dal significato fisico delle quantità x_i . Nella presente memoria ci limiteremo alla considerazione di tali sistemi, (e ciò solo per una maggiore chiarezza dell'esposizione dell'argomento), benchè i nostri risultati si possano, con opportune modificazioni, facilmente generalizzare pei sistemi perturbati.

Chiamo *linea di stati* ²⁾ l' assieme continuo (ad una dimensione) degli stati o, parlando figurativamente, dei punti nello spazio ad n dimensioni $(x_1, \dots x_n)$ nei quali si trova successivamente il sistema considerato, partendo da uno stato « iniziale » qualunque. Le equazioni differenziali di una tale linea sono dunque

$$(2) \quad dx_1 : dx_2 : \dots : dx_n = f_1 : f_2 : \dots : f_n.$$

Se $\Phi_1(x_1, x_2, \dots x_n)$, Φ_2 , Φ_3 , ... Φ_{n-1} sono gli $n - 1$ *invarianti essenziali* del sistema, cioè tali funzioni dello stato, che si abbia

$$(3) \quad \frac{d\Phi_k}{dt} = \sum_i^n \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_i f_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1,$$

1) Le quali cioè per un dato istante t_0 possono essere prescritte l'una indipendentemente dall'altra.

2) Cfr. Ostwalds Annalen der Naturphilosophie, Vol. 2, pag. 201-254.

allora una linea di stati sarà determinata dalle equazioni

$$(4) \quad \phi_1 = c_1, \phi_2 = c_2, \phi_{n-1} = c_{n-1},$$

dove $c_1, \dots, c_{n-1}$ sono costanti date numericamente. Trattandosi di sistemi non perturbati, tutte queste linee di stati (le quali formano una varietà ∞^{n-1}) *conservano permanentemente la loro forma e rimangono immobili* nella regione degli stati. *Due linee di stati non si intersecano* ¹⁾ (benchè una linea possa intersecare se stessa, ed allora il punto d'intersezione rappresenta uno stato d'equilibrio).

Chiamo *tubo di stati* una porzione dello spazio $(x_1, \dots, x_n)$ limitata dall'insieme di linee di stati tracciate per tutti i punti d'una linea rientrante qualunque (la quale non è però una linea di stati). Immagineremo tutta la regione di stati scomposta in tali tubi. Se un dato esemplare del sistema che ubbidisce alle leggi (1) si trova in uno di tali tubi, esso vi rimarrà sempre, muovendosi lungo questo tubo e non penetrando mai in alcun altro tubo. Un tubo elementare di stati sarà caratterizzato dai limiti ϕ_1 e $\phi_1 + \delta\phi_1$, ecc. ϕ_{n-1} e $\phi_{n-1} + \delta\phi_{n-1}$ assegnati ai valori delle $n - 1$ funzioni invarianti ϕ_k . Per brevità di linguaggio chiamerò il prodotto

$$(5) \quad \delta\sigma = \delta\phi_1 \cdot \delta\phi_2 \cdot \dots \cdot \delta\phi_{n-1}$$

la *sezione* (trasversale) d'un tale tubo.

Ciò premesso, consideriamo il problema seguente.

Un grande numero di sistemi indipendenti tra loro e perfettamente uguali, di cui ciascuno ubbidisce precisamente alle stesse leggi (1), o — in altre parole — un grande numero di esemplari del sistema (1) sia sparso attraverso tutta la regione di stati $(x_1, \dots, x_n)$, cosicchè un elemento

$$(6) \quad \delta\tau = \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \dots \cdot \delta x_n$$

ne contenga, all'istante t , il numero $G' \cdot \delta\tau$.

1) Cfr. le rispettive osservazioni, ibidem.

2) Scrivo δx_i ecc. in distinzione dai differenziali $dx_i = f_i dt$, ecc. che denotano le variazioni (nel tempo) dei valori di x , ecc. per un esemplare individuale durante il cambiamento del suo stato, cioè mentre che esso percorre la propria linea di stati.

Il numero degli esemplari sia tanto grande che si possa parlare di G' (colla stessa licenza come p. es. nella teoria cinetica dei gaz) come d'una funzione generalmente continua e derivabile sì rispetto alle x_i che rispetto al tempo t ; chiamiamola semplicemente la *densità* dei sistemi.

Date le leggi (1), comuni a tutti gli esemplari, e data la loro distribuzione in tutto lo spazio $(x_1, \dots, x_n)$ per un istante qualunque t_0 , ci domandiamo ora, come essi saranno distribuiti ad ogni altro tempo t' .

È appunto il concetto dei *tubi di stati* che ci permette di risolvere questo problema con una notevole facilità. Infatti, siccome nessuno degli esemplari abbandona il suo tubo per penetrare in un altro, possiamo trattare il problema separatamente per ogni tubo elementare, indipendentemente da tutto ciò che avviene negli altri.

Prendiamo dunque come elemento della regione di stati, invece del $\delta\tau'$ definito dalla (6), un elemento di lunghezza d'un tubo elementare, di sezione $\delta\sigma$.

Sia $l = l(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una funzione dello stato, continua e derivabile rispetto alle x_i , indipendente dalle $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$, cioè non un invariante, ma del resto arbitraria.

Consideriamo ora l come la misura della lunghezza d'una linea di stati o d'un tubo elementare, contata — per ogni linea o tubo — da un certo punto fisso, scelto arbitrariamente. Allora δl sarà l'elemento di lunghezza del considerato tubo elementare. Poniamo $\delta\tau = \delta\sigma \cdot \delta l$, cioè :

$$(7) \quad \delta\tau = \delta\sigma \cdot \delta l = \delta\phi_1 \dots \delta\phi_{n-1} \cdot \delta l.$$

Consideriamo ora questo elemento, e denotiamo il numero degli esemplari contenuti in esso, all'istante t , con $G \cdot \delta\tau$; G si potrebbe chiamare la *densità ridotta* dei sistemi.

Abbiamo del resto

$$(8) \quad G : G' = \frac{\partial(x_1 \dots x_n)}{\partial(\phi_1 \dots \phi_{n-1} l)},$$

1) Il nostro problema contiene, come caso molto speciale, il problema relativo ai sistemi *meccanici* trattato nell'opera di J. W. Gibbs: *Elementary Principles in Statistical Mechanics* (1902), cui lettura mi ha suggerito la presente ricerca; ne ripareremo ancora in seguito.

cosicchè si può passare facilmente dalla densità ridotta G alla densità G' . Possiamo però applicare le nostre considerazioni immediatamente a G stesso.

Ritornando adunque all'elemento δr del tubo elementare di stati avremo per l'incremento del numero di esemplari, per unità di tempo, da una parte l'espressione $\frac{\partial G}{\partial t} \delta r$, e dall'altra parte la differenza dei numeri degli esemplari che vi entrano e che ne escono, nello stesso tempo. Siccome ora questa immigrazione ed emigrazione avvengono solamente per le due sezioni trasversali terminali (e non per la superficie laterale del tubo) e siccome $\delta \sigma$ ha lo stesso valore per ambedue le sezioni [essendo costante, secondo la (5), lungo tutto il tubo], abbiamo — supponendo ancora che la funzione l cresca nel senso positivo ¹⁾ del tubo :

$$\frac{\partial G}{\partial t} \delta r = G \dot{l} \cdot \delta \sigma - \left[G \dot{l} + \frac{\partial}{\partial l} (G \dot{l}) \delta l \right] \delta \sigma ,$$

cioè, secondo la (7) :

$$(9) \quad \frac{\partial G}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial l} (G \dot{l}) ,$$

dove

$$(10) \quad \dot{l} = \frac{d l}{d t} = \sum_i^n \frac{\partial l}{\partial x_i} \frac{d x_i}{d t} = \sum f_i \frac{\partial l}{\partial x_i} .$$

Siccome $\frac{\partial (\phi_1, \dots \phi_{n-1})}{\partial (x_1, \dots x_n)}$ è diverso da 0, possiamo immaginare le $x_1, \dots x_n$ espresse in funzione di $\phi_1, \dots \phi_{n-1}, l$, cosicchè lungo il tubo $\dot{l}$ sarà una funzione di l solo, coi parametri ϕ_k :

$$(11) \quad \dot{l} = F (l) ,$$

e la densità G si potrà considerare come funzione degli invarianti ϕ_k e di l, t le quali entrano in (9) come variabili *indi-*

1) Cioè nel senso nel quale si muove ogni esemplare individuale.

pendenti tra loro, $\frac{\partial G}{\partial t}$ essendo la variazione « locale » della densità ¹⁾).

Abbiamo dunque nella (9), cioè in

$$(I) \quad \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l}(G\dot{l}) = 0, \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial G}{\partial t} + F(l) \frac{\partial G}{\partial l} + F'(l) G = 0$$

un'equazione differenziale parziale per G , lineare ed omogenea, colle variabili indipendenti l, t ; fatta la scelta della funzione l e supposti noti gli invarianti essenziali, i coefficienti nell'equazione (I) $F(l)$ ed $F'(l) = \frac{\partial F}{\partial l}$ sono note funzioni di l solo, lungo ogni tubo.

Essendo data quindi la distribuzione iniziale, cioè

$$(12) \quad G = G_0(l), \quad \text{per} \quad t = t_0,$$

per tutta l'estensione d'un tubo elementare, l'equazione (I) determinerà la densità G in ogni punto del medesimo per ogni tempo t . La quistione poi relativa al modo della dipendenza di G dalle $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$, sarebbe priva di ogni senso, giacchè (per ripeterlo ancora) gli avvenimenti nei vari tubi sono completamente indipendenti tra loro, o — in altre parole — la « statistica » d'ogni tubo è indipendente da quella di tutti gli altri.

La soluzione del problema suesposto è quindi contenuta tutta nell'equazione (I); e ciò indipendentemente dalla circostanza se si conoscano realmente o no gli invarianti ϕ_k , giacchè non si tratta di integrare le leggi differenziali comuni a tutta la schiera di sistemi, ma bensì di fare la loro « statistica ».

Per l'*equilibrio statistico* abbiamo $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$, cioè $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$, e quindi secondo l'equazione (I): $G\dot{l} = C$, cioè secondo la (II):

$$(II) \quad G = \frac{C}{F(l)},$$

1) Il determinante in (8) e quindi il rapporto $G : G'$ diventa lungo ogni tubo una funzione di l solo.

dove C è una quantità arbitraria, *costante* lungo il tubo considerato, alla quale poi, passando da questo ad altri tubi, possiamo attribuire dei valori perfettamente arbitrari. Possiamo del resto esprimere la costante C per mezzo del numero totale dei sistemi contenuti nel tubo, il quale a sua volta è completamente arbitrario; infatti, chiamando questo numero $\overline{n} \delta \sigma$, abbiamo $\overline{n} \cdot \delta \sigma = \int G \delta \tau = \delta \sigma \cdot \int G \delta l$, e quindi secondo la (II):

$$(13) \quad C = \overline{n} : \int \frac{\delta l}{F(l)},$$

dove l' integrale si estende a tutta la lunghezza del tubo.

La distribuzione nello stato d' equilibrio statistico è quindi completamente determinata dal numero totale dei sistemi contenuti nel tubo.

Ogni altra distribuzione non rimane in equilibrio ma subisce, col tempo, delle variazioni soggette all' equazione (I). Di questa equazione possiamo anche scrivere immediatamente l' integrale completo.

Infatti, siccome l, t appariscono in essa come variabili indipendenti tra loro, e siccome $\dot{l} = F(l)$, abbiamo, moltiplicandola con $\dot{l}$:

$$(14) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + F(l) \cdot \frac{\partial H}{\partial l} = 0,$$

dove

$$(15) \quad H = G\dot{l} = G F(l),$$

e introducendo al posto di l come variabile indipendente :

$$(16) \quad s = k \int \frac{\delta l}{F(l)},$$

dove k è una costante qualunque, cosicchè $\frac{\delta s}{\delta l} = \frac{k}{F(l)}$, avremo

$$(17) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + k \frac{\partial H}{\partial s} = 0.$$

Essendo ora l' integrale più generale di questa equazione

$$(18) \quad H = H(s - k t),$$

cioè: H uguale ad una funzione arbitraria dell'argomento $s - kt$, abbiamo dunque come *soluzione completa dell'equazione* (I)

$$(III) \quad G = \frac{H(s - kt)}{F(l)} = \frac{1}{F(l)} H \left(\int \frac{\delta l}{F(l)} - t \right).$$

La forma della funzione H si determinerà dalla distribuzione iniziale, equazione (12) ¹⁾.

L'interpretazione di (III) è ovvia. Tracciando una curva, cui le ascisse sono s e le ordinate rappresentano $G F$ ossia $G l$ per un istante qualunque del tempo, questa curva si muoverà lungo s , cioè nel senso positivo della linea di stati, colla « velocità » costante k , come *rigida*, cioè *senza attenuazione e senza deformazione*, precisamente come un'onda elettromagnetica piana in un isolatore perfetto.

E tutto ciò vale separatamente e indipendentemente per le curve rappresentatrici della distribuzione di $G l$ lungo ogni tubo elementare di stati. D'onde si vede per es. che una distribuzione degli esemplari che non si trovi in equilibrio statistico dimostra tutt'altro che una tendenza verso un tale equilibrio.

Tutto ciò si vede del resto anche senza ricorrere all'integrale (III), e cioè scrivendo l'equazione (I), moltiplicata con $\dot{l} = \frac{dl}{dt}$, nella forma:

$$(I') \quad \frac{\partial}{\partial t}(G l) + \frac{dl}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial l}(G l) = \frac{d}{dt}(G l) = 0$$

e ricordando che $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dl}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial l}$ esprime la variazione d'una quantità trasportata dai sistemi individuali.

1) Notiamo che, essendo $F(l) = \dot{l} = \frac{dl}{dt}$, si ha, *seguendo un esemplare indivi-*

duale nelle sue vicende $\int \frac{dl}{F(l)} - t = \int dt - t = \text{cost}$; però, nelle formole del testo

l non si riferisce ad un sistema individuale, ma determina (assieme colle $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$) un punto qualunque *fisso* nella regione di stati, e come tale è indipendente di t .

Caso speciale. — Se le funzioni f_i che entrano nelle leggi differenziali (1) dei sistemi soddisfano alla condizione

$$(19) \quad \sum_i^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 ,$$

le cose si semplificano ancora notevolmente.

Infatti, servendoci della densità propria G' e delle variabili primitive $x_1, \dots, x_n$, ed applicando all'elemento $\delta \tau = \delta x_1 \dots \delta x_n$ lo stesso ragionamento che abbiamo adoperato per un elemento di tubo, otteniamo nel caso generale

$$\frac{\partial G'}{\partial t} + \sum_i^n \frac{\partial}{\partial x_i} (G' f_i) = 0 ,$$

ossia

$$(1'') \quad \frac{dG'}{dt} + G' \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 ,$$

e quindi, essend' soddisfatta la condizione speciale (19):

$$(20) \quad \frac{dG'}{dt} = \frac{\partial G'}{\partial t} + \sum f_i \frac{\partial G'}{\partial x_i} = 0 .$$

Introducendo, come sopra, le variabili $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}, l$ abbiamo

$$\frac{\partial G'}{\partial x_i} = \frac{\partial G'}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial G'}{\partial \phi_{n-1}} \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial x_i} + \frac{\partial G'}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial x_i}$$

e siccome

$$\sum_i \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} f_i = \frac{d\phi_k}{dt} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) ,$$

abbiamo

$$\sum_i^n f_i \frac{\partial G'}{\partial x_i} = \frac{\partial G'}{\partial l} \sum \frac{\partial l}{\partial x_i} f_i = i \frac{\partial G'}{\partial l} .$$

cosicchè l'equazione (20) diverrà:

$$(21) \quad \frac{dG'}{dt} = \frac{\partial G'}{\partial t} + i \frac{\partial G'}{\partial l} = 0 ,$$

ciò che era da prevedersi.

Introducendo, come sopra, la variabile s [cfr. (16)], si avrà come integrale completo

$$(22) \quad G' = G' (s - k t)$$

In questo caso la curva rappresentatrice della *densità* G' *stessa rimarrà conservata o rigida* ¹⁾ muovendosi lungo il considerato tubo di stati.

Per l'*equilibrio* statistico otteniamo dalla (21)

$$\frac{\partial G'}{\partial t} = 0 ,$$

cioè la densità G' *costante* lungo il tubo; G' diventa allora semplicemente un invariante, cioè una funzione arbitraria delle funzioni ϕ_{n-1} sole. Il valore numerico della costante G' può essere scelto arbitrariamente ed indipendentemente per ogni tubo elementare; si può esprimerlo senz'altro per il numero totale degli esemplari contenuti in ogni tubo che a sua volta è perfettamente arbitrario.

Un esempio del presente caso speciale, nel quale cioè è soddisfatta la condizione (19), abbiamo nei sistemi *meccanici* conservativi (riferiti alle equazioni canoniche), la « Statistica » dei quali costituisce appunto l'argomento dell'opera di J. W. Gibbs, citata sopra ²⁾. Alle nostre variabili x_i corrispondono allora le coordinate generalizzate q_i e gli impulsi p_i ; ϵ essendo l'energia totale d'ogni esemplare, si ha

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \epsilon}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial \epsilon}{\partial q_i},$$

cosicchè infatti la (19) è soddisfatta, essendo già per ogni coppia di $\dot{q}_i, \dot{p}_i$ (collo stesso indice)

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 0 ;$$

1) Mentre che nel caso generale lo era quella di $G\dot{L}$.

2) Gibbs considera del resto sistemi perturbati (secondo il nostro significato della parola), ma suppone le perturbazioni uguali per tutti gli esemplari.

se m è il numero dei gradi di libertà, abbiamo $n = 2m$. Ciò che Gibbs chiama « l'equazione fondamentale della meccanica statistica » è contenuto nell'equazione (20). La maggior parte della sua opera è consacrata all'*equilibrio* statistico. L'energia ϵ essendo un invariante, una distribuzione secondo una funzione qualunque di ϵ si manterrà nell'*equilibrio* statistico ;

come tale funzione Gibbs prende l'esponenziale $e^{\frac{\psi - \epsilon}{\Theta}}$, dove Ψ , Θ sono costanti.

Notiamo che prendendo per la distribuzione degli esemplari una funzione qualunque di ϵ solo, si attribuisce la medesima densità non solo ad un tubo elementare ma bensì ad uno strato a $2m - 1$ dimensioni (non infinitesimali).

Astenendomi, in questo luogo, da osservazioni speciali d'indole polemica e lasciando da parte la quistione d'*equilibrio*, osserverò soltanto che dalla presente ricerca sorgono dubbi non lievi rispetto all'asserzione di Gibbs, secondo la quale una distribuzione che non si trovi in *equilibrio* statistico « dopo un tempo più o meno lungo potrà arrivare e generalmente anche arriverà ad uno stato che, prescindendo da piccole differenze di fasi, sarà quello dell'*equilibrio* statistico », -- e rispetto ai tentativi di dimostrare un tale teorema (cfr. Cap. XII e XIII, loc. cit.).

Infatti, abbiamo visto che la curva rappresentatrice d'una distribuzione *qualunque* (G') di esemplari lungo un tubo si sposta col tempo lungo questo tubo, e senza mostrare qualsiasi tendenza verso un *equilibrio*, cioè verso una distribuzione omogenea, *conserva anzi fedelmente tutti i suoi caratteri iniziali* ; e ciò che avviene negli altri tubi non esercita su di essa la menoma influenza.

Esempi illustrativi. — Per schiarire i nostri ragionamenti astratti e la costruzione dell'integrale completo dell'equazione (I), rispettivamente (21), consideriamo ancora due semplici esempi nei quali si conoscono concretamente gli invarianti essenziali.

A). Un corpo di massa m sia attaccato ad una molla spirale, di cui l'altro termine è fisso e di cui l'inerzia è trascurabile; la tensione (positiva o negativa) sia proporzionale alla dilatazione (o rispettivamente contrazione). Denotando con c^2 il coefficiente elastico diviso per m , con x_1 la dilatazione moltiplicata con c e con x_2 la velocità istantanea di m , abbiamo le equazioni differenziali:

$$(23) \quad \frac{dx_1}{dt} = f_1 = c x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2 = -c x_1,$$

cosicchè è soddisfatta la condizione (19). Considerando ora una schiera di tali sistemi (tutti collo stesso valore numerico della costante c), avremo per la densità G l'equazione (21). L'unico invariante essenziale è in questo caso

$$(24) \quad \phi = x_1^2 + x_2^2, \quad \text{poniamo } = R^2,$$

cioè proporzionale all'energia d'ogni esemplare.

Le linee di stati sono quindi, nel piano euclideo colle coordinate ortogonali x_1, x_2 , *circoli* concentrici tracciati intorno al punto $O (x_1 = x_2 = 0)$, coi raggi $R = \sqrt{\phi}$. Il loro senso positivo è dall'asse positivo Ox_2 verso quello Ox_1 .

Introduciamo ora invece di x_1, x_2 le variabili ϕ, l , prendendo per l p. es. l'angolo θ contato positivamente dall'asse Ox_2 verso quello Ox_1 , cioè:

$$(25) \quad l = \theta = \text{arctg} \frac{x_1}{x_2},$$

e quindi, secondo la (24):

$$(26) \quad x_1 = \sqrt{\phi} \cdot \sin \theta, \quad x_2 = \sqrt{\phi} \cos \theta.$$

Abbiamo allora, sì dalla prima che dalla seconda delle (23):

$$(27) \quad \dot{l} = \frac{d\theta}{dt} = c,$$

cosicchè la (21) diventa

$$(28) \quad \frac{\partial G'}{\partial t} + c \frac{\partial G'}{\partial \theta} = 0,$$

e (c essendo una costante) si ha senz'altro l'integrale più generale

$$(29) \quad G' = G'(\theta - ct),$$

o del resto anche, denotando con s la lunghezza $R\theta$ dell'arco circolare contato da Ox_2 :

$$(29a) \quad G' = G'(s - cR \cdot t) = G'(s - c\sqrt{\phi} t).$$

La curva rappresentatrice della densità si muove dunque lungo il rispettivo circolo (linea di stati) colla velocità $c\sqrt{\phi}$, o gira intorno ad O colla velocità angolare c , conservando la sua forma e dimensioni; dopo ogni intervallo di tempo uguale a $2\pi/c$ la distribuzione di tutti gli esemplari ritorna al suo stato primitivo,

Notiamo ancora che in questo caso il determinante funzionale (8) diventa una *costante* (numericamente $= \frac{1}{2}$ per tutte le linee di stati), cosicchè l'equazione (I) vale anche per G' , e siccome $\dot{l} = c$, $\frac{\partial \dot{l}}{\partial l} = 0$, essa si riduce immediatamente alla (21).

B). Ogni esemplare della schiera sia un corpo rigido in rotazione intorno ad un suo punto fisso, senza forze esterne. I momenti principali d'inerzia A_1, A_2, A_3 siano uguali (o almeno proporzionali) per tutti gli esemplari.

Allora, denotando con x_1, x_2, x_3 le componenti della velocità di rotazione rispetto agli assi principali d'ogni esemplare, abbiamo le equazioni differenziali

$$(30) \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{A_2 - A_3}{A_1} x_2 x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{A_3 - A_1}{A_2} x_3 x_1, \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{A_1 - A_2}{A_3} x_1 x_2,$$

cosicchè anche in questo caso la condizione (19) è soddisfatta.

I due invarianti essenziali sono ora

$$(31) \quad \begin{cases} \phi_1 = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 \\ \phi_2 = A_1^2 x_1^2 + A_2^2 x_2^2 + A_3^2 x_3^2. \end{cases}$$

Le linee di stati sono le intersezioni di questi due elissoidi (nello spazio euclideo x_1, x_2, x_3). Come l prendiamo p. es. la velocità angolare risultante, la quale, supponendo A_1, A_2, A_3 diversi tra loro, è una funzione dello stato indipendente da ϕ_1, ϕ_2 ; poniamo cioè:

$$(32) \quad l^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Dalle (31), (32) otteniamo facilmente

$$(33) \quad x_i^2 = C_i l^2 + \psi_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

dove:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{A_3 - A_2}{D} A_2 A_3, \text{ ecc.}; \quad \psi_1 = \frac{A_3 - A_2}{D} [\phi_2 - \phi_1 (A_2 + A_3)], \text{ ecc.}; \\ D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

Le C_i sono dunque tre costanti « assolute » e le ψ_i sono invarianti (cioè tre funzioni lineari di ϕ_1, ϕ_2 , e quindi naturalmente non indipendenti tra loro), cioè costanti lungo ogni linea di stati.

Dalle equazioni differenziali (30) e dalle (32), (33) otteniamo ora

$$(35) \quad \dot{l} = C \frac{x_1 x_2 x_3}{l} = \frac{C}{l} \sqrt{(C_1 l^2 + \psi_1)(C_2 l^2 + \psi_2)(C_3 l^2 + \psi_3)} = F(l)$$

dove

$$(36) \quad C = \frac{1}{A_1} (A_2 - A_3) + \frac{1}{A_2} (A_3 - A_1) + \frac{1}{A_3} (A_1 - A_2).$$

L'integrale più generale dell'equazione (21) diventa quindi:

$$(37) \quad G' = G' (s - C t),$$

dove

$$(38) \quad s = C \int \frac{\delta l}{F(l)} = \frac{1}{2} \int \frac{\delta(l^2)}{V(C_1 l^2 + \psi_1)(C_2 l^2 + \psi_2)(C_3 l^2 + \psi_3)}$$

e dove l'integrale si estende lungo la considerata linea di stati, cominciando da un suo punto fisso qualunque. Le curve rappresentatrici della densità si muovono dunque come enti rigidi lungo le linee di stati colla « velocità » $\frac{ds}{dt} = C$, cioè costante e numericamente uguale per tutte le linee.

Per il determinante (8) e quindi pel rapporto $G : G'$ si ha in questo caso, dalle (33), (34):

$$(39) \quad G : G' = c : \dot{l},$$

dove c è una costante « assoluta »; si ottiene quindi la (21) immediatamente dall'equazione più generale (I).

Se due dei momenti d'inerzia diventano uguali tra loro, p. es. $A_1 = A_2$, e se le componenti x_3 , le quali in tal caso sono costanti, hanno lo stesso valore per tutti gli esemplari, allora si ricade precisamente sulle equazioni dell'esempio precedente.

Roma, Gennaio 1906.