Contribuzione alla teoria delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti di una superficie di 3° ordine.

(*Memoria del prof. E. BERTINI, a Pavia.*)

Il presente lavoro è diviso nei paragrafi seguenti (*):

§ 1. Relazioni fra le coppie di triedri conjugati. — § 2. Enneaedri di 1^a e 2^a specie. — § 3. Relazioni fra le terne T . — § 4. Ordinamento e costruzione delle terne T . — § 5. Teoremi sugli enneaedri. — § 6. Triedri di 1^a, 2^a e 3^a specie. Altre proprietà degli enneaedri. — § 7. Poliedri. Pentaedro principale. — § 8. Ettaedro principale. — § 9. Poliedri che contengono almeno un triedro di 1^a specie. — § 10. Tetraedri. — § 11. Pentaedri. — § 12. Esaedri. — § 13. Ettaedri. Ottaedri. — § 14. Specchio riassuntivo dei poliedri.

Per brevità si chiama terna T il sistema di tre coppie di triedri conjugati, nelle quali giacciono tutte le 27 rette della superficie. Di queste terne T e delle coppie di triedri conjugati, i §§ 1, 3, 4 contengono alcune nuove proposizioni, le quali in seguito sono di aiuto in parecchi punti. Nel § 4 è esposta inoltre la costruzione delle 40 terne T . Benchè tale costruzione non abbia interesse per la parte rimanente del lavoro, tuttavia è parso opportuno di non ometterla per mostrare come le proprietà premesse e la arbitrarietà inerente alla notazione fossero sufficienti per quella costruzione. I §§ 2, 5 sono consacrati a dimostrare varie proprietà degli enneaedri. Alcune di queste proprietà e in particolare la distinzione degli enneaedri in due specie, come si avverte a suo luogo, sono dovute a CREMONA. Le dimostrazioni date in quei due para-

---

(*) La maggior parte dei nuovi risultati contenuti nei §§ 1, 2, ... 9, furono comunicati, senza dimostrazione, al R. Istituto Lombardo, nelle sedute del 15 maggio e 31 luglio 1884.

grafi non sono fondate sopra alcuna notazione delle 27 rette o dei 45 piani tritangenti (nemmeno su quella del n.° 11).

Nel § 6 si pone il concetto generale di triedro e si distinguono tre sorta di triedri: alle quali cose si collegano alcune nuove proprietà degli enneaedri.

I paragrafi seguenti 7, 8, ... 14 sono rivolti alla risoluzione di un problema, che sino ad oggi non fu oggetto di indagine. Quali e quanti sono i poliedri (di cui gli spigoli sono esterni alla superficie) che si possono formare coi 45 piani tritangenti? Si arriva alla risoluzione di questo problema col determinare dapprima i poliedri principali, ossia quelli non contenuti in altri poliedri. Di poliedri principali esistono quattro specie; cioè, oltre le due specie di enneaedri, una specie di ettaedri (§ 8) e una di pentaedri (§ 7): quella non considerata, credo, finora; questa incontrata da CREMONA per altro scopo (cfr. note al n.° 23). Nel § 8 che si riferisce agli ettaedri principali, e in quello soltanto, si ricorre, cercando però di mantenere la generalità della ricerca, alla notazione di SCHLAEFLI, per evitare una discussione che si presenta molto complicata. In appresso, noti i poliedri principali, si ricercano i poliedri in essi contenuti e così si trovano tutti i possibili tetraedri, pentaedri...; i quali sono poi raccolti in uno specchio con alcuni numeri relativi (§ 14). In questa seconda parte della ricerca s'incontra la difficoltà di riconoscere se poliedri contenuti in differenti poliedri principali e aventi certi caratteri comuni, sieno o no diversi. La risoluzione di tale difficoltà porta a concludere che un poliedro di una data specie è definito da quattro numeri: il numero dei piani che lo formano ed i tre numeri che indicano quanti triedri delle tre specie si possono formare coi piani stessi.

§ 1. Relazioni fra le coppie di triedri conjugati.

1. Indichi

$$C \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

una coppia qualsiasi di triedri conjugati, essendo $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, \dots$ le nove rette di essa e

$$\begin{aligned} a_i &\equiv a_{i1} a_{i2} a_{i3} \\ b_i &\equiv a_{1i} a_{2i} a_{3i} \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3,$$

i sei piani della medesima (*). Cerchiamo le coppie che hanno colla C elementi (piani o rette) comuni.

Si sa e si dimostra facilmente che una terna gobba (**) di rette individua una coppia di triedri conjugati, di cui le sei rette rimanenti sono le bisecanti della terna.

È noto altresì (***) che due piani, aventi una retta comune, appartengono a quattro coppie di triedri conjugati. Ora coi sei piani della coppia C si possono formare nove delle dette pajà di piani. Si hanno adunque 27 coppie di triedri conjugati che hanno colla C due piani comuni.

Si consideri adesso una coppia gobba di rette di C . È chiaro che essa compare in sei delle precedenti 27 coppie di triedri conjugati (per es., a_{21} , a_{12} entrano nelle tre coppie contenenti i piani a_1 , b_1 e nelle tre contenenti i piani a_2 , b_2). Ma una coppia gobba di rette fa parte di dieci terne gobbe di rette. Escludendo le sette terne gobbe, che individuano C e le sei coppie di triedri conjugati testè nominate, rimangono tre terne che danno tre coppie di triedri conjugati aventi a comune con C la considerata coppia gobba di rette (e, come è facile vedere, null'altro). Cosicchè, in totale, si hanno $18 \cdot 3 = 54$ coppie di triedri conjugati che hanno comune con C una coppia gobba di rette (soltanto).

I piani che non contengono alcuna delle nove rette della coppia C sono manifestamente

$$45 - 3 \cdot 9 - 6 = 12.$$

Uno α_1 di questi dodici piani e un piano α_1 di C danno origine ad una coppia C' di triedri conjugati. Il terzo piano che con α_1 , α_1 forma un triedro di C' deve essere degli stessi dodici piani; giacchè, altrimenti, conterrebbe almeno una retta di C , la quale, insieme ad una retta di α_1 , darebbe un nuovo piano (oltre α_1) comune a C , C' , onde α_1 dovrebbe contenere una retta di C . Quei dodici piani determinano adunque sei coppie di triedri conjugati che hanno con C a comune il solo piano α_1 . E si hanno quindi 36 coppie di triedri conjugati aventi con C un solo piano comune.

2. E qui si noti che, una retta appartenendo a 16 coppie gobbe e una coppia gobba a 10 terne gobbe, una retta entra in 80 terne gobbe e però in

---

(*) Qui e dappertutto in seguito, piani e rette sono (se nulla si avverta in contrario) piani tritangenti e rette di una superficie generale del 3° ordine.

(**) L'insieme di più rette dicesi *gobbo* se due qualunque di esse non s'incontrano.

(***) R. STURM, *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, Leipzig, 1867, pag. 64.

40 coppie di triedri conjugati (*). Le 39 coppie di triedri conjugati, che hanno con C una retta comune, si distribuiscono in tre gruppi di 12, 12, 15, aventi rispettivamente a comune con C una coppia gobba di rette, un piano, due piani. Il che è evidente per le cose dette nel n.º 1 e avvertendo che una retta di C appartiene a quattro coppie gobbe, a due piani, e a cinque coppie di piani (aventi una retta comune) contenuti in C .

Quindi non possono due coppie di triedri conjugati avere una sola retta comune.

Ne discende facilmente la proprietà nota che, esistono due coppie di triedri conjugati (e due soltanto) che, con una data coppia C , contengono tutte le 27 rette (**). In vero, escludendo le nove rette di C e i piani che passano per esse, rimangono 12 piani e 18 rette. Ciascuna di queste rette esiste in due dei 12 piani, giacchè incontra i tre piani di un triedro di C sopra tre rette di C , formanti una terna gobba, colle quali dà tre piani esclusi. Sia α_1 uno qualunque dei 12 piani e β_1, β_2 quelli di essi che passano per due rette di α_1 (oltre α_1). I piani β_1, β_2 individuano una coppia C' , di cui un triedro sarà formato dagli stessi piani β_1, β_2 e da un terzo piano che diremo β_3 e l'altro triedro conterrà α_1 . Nella coppia C' entrano, delle 18 rette suddette, tre di β_1 , tre di β_2 e la retta $\alpha_1\beta_3$. Segue, per l'ultima proprietà avvertita, che le coppie C, C' non hanno alcuna retta o piano comune: cioè C' contiene sei dei 12 piani e nove delle 18 rette. Prendasi ora un altro dei 12 piani, all'infuori dei sei di C' , e si avrà una nuova coppia che conterrà i sei piani e le nove rette rimanenti, poichè per una retta di C' passano due soli dei 12 piani e sono quelli della stessa coppia C' . Adunque, ecc.

3. Riunendo l'ultima proprietà a quelle del n.º 1, si ha il seguente teorema:

Rispetto ad una coppia di triedri conjugati, le altre 119 coppie si distribuiscono in quattro gruppi:

- 1.º Di 2 coppie, che nulla hanno a comune colla data (e fra loro);
- 2.º Di 27 coppie, ciascuna delle quali ha colla data due piani comuni (e cinque rette);
- 3.º Di 36 coppie, ciascuna delle quali ha colla data un piano comune (e tre rette);

(*) Ciò segue subito anche dall'osservare che $27 \cdot 40 = 120 \cdot 9$. Veggasi inoltre STURM, l. c.

(**) JACOB STEINER's, *Gesammelte Werke*, Berlin, 1882, tom. II, pag. 655. — STURM, l. c., pag. 63. — CREMONA-CURTZE, *Oberflächen*, § 261.

4.° Di 54 coppie, cadauna avente comune colla data una coppia gobba di rette (e nessun piano).

Il sistema di tre coppie di triedri conjugati che contengono insieme le 27 rette della superficie, si chiamerà d'ora innanzi una terna T .

§ 2. Enneaedri di 1° e 2° specie.

4. Sia

$$T' \equiv \left| \begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_1 & a_4 & b_4 & a_7 & b_7 \\ a_2 & b_2 & a_5 & b_5 & a_8 & b_8 \\ a_3 & b_3 & a_6 & b_6 & a_9 & b_9 \end{array} \right|$$

una terna di coppie di triedri conjugati, ove $a_1 a_2 a_3$ indica un triedro, $b_1 b_2 b_3$ il triedro ad esso conjugato, ecc. Ciascuno dei 27 piani esclusi dalla terna T' contiene una retta di ogni coppia di T' , perchè due rette di una stessa coppia, che s'incontrano, danno un piano della coppia. Presi ad arbitrio due piani (ad es.) a_1, a_4 di due coppie di T' , i tre piani che le rette dell'uno formano colle rette dell'altro, sono dei suddetti 27 piani e però contengono tre nuove rette appartenenti alla terza coppia di T' . Cioè il triedro, a cui i piani a_1, a_4 danno origine, è completato da un piano della terza coppia di T' , per es. (potendosi, nell'indicazione di T' , scambiare due colonne di una matrice) da uno dei piani a_7, a_8, a_9 . E, ciò essendo, il triedro individuato dai piani a_1, a_4 deve essere completato da uno degli stessi tre piani a_7, a_8, a_9 ; perchè, esistendo, ad es., i triedri $a_1 a_4 a_7, a_1 a_4 b_7$, si avrebbero due coppie di triedri conjugati con quattro (sole) rette comuni, cioè le tre rette di a_1 e la retta $a_7 b_7$, il che non può essere (n.° 3). La stessa considerazione prova che i triedri originati dalle coppie di piani $a_1, a_6; a_2, a_4; a_2, a_5; a_2, a_6; a_3, a_4; a_3, a_5; a_3, a_6$ sono completati da uno degli stessi tre piani a_7, a_8, a_9 . Se ne ricava immediatamente che il sistema dei nove piani

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_9 \quad (E_1)$$

gode della proprietà che, *assunti ad arbitrio due dei nove piani, il terzo piano che con essi completa il triedro è degli stessi nove piani*. Per conseguenza, *quei nove piani si possono distribuire in 12 triedri, ogni piano appartenendo a 4 triedri*: e inoltre, *i 12 triedri si spartiscono in 4 terne, ogni terna contenendo tutti i nove piani* (E_1) (*).

(*) CREMONA, *Sulle 27 rette di una superficie di 3° ordine*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Serie II, vol. 3°, pag. 216.

Per giungere facilmente ad una opportuna notazione di quei 12 triedri, si può avvertire altresì questa proprietà. *Se un piano a_i è comune a due triedri (dei 12 suddetti), i quattro piani residui di questi triedri non possono appartenere a due nuovi triedri che abbiano pure un piano comune a_j .* Perocchè, se ciò avvenisse, aggiungendo ai triedri qui considerati il triedro dato dai piani a_i, a_j , tre dei triedri, a cui appartiene a_i sarebbero formati degli stessi sette piani di tre dei triedri a cui appartiene a_j ; e quindi i due piani rimanenti dovrebbero formare un triedro tanto con a_i che con a_j , ciò che non può essere.

Potendosi nell'indicazione di T' scambiare due piani di una colonna, si può fissare che i triedri, a cui appartiene a_1 , sieno (oltre $a_1 a_2 a_3$) $a_1 a_4 a_7$, $a_1 a_5 a_9$, $a_1 a_6 a_8$. Allora il triedro, di cui fanno parte a_2, a_4 , non può essere completato che da a_8 o da a_9 e può ritenersi sia il triedro $a_2 a_4 a_9$ (scambiando, quando non fosse, a_8 con a_9 , a_6 con a_5). Ciò fatto, la notazione di tutti gli altri triedri è determinata. In vero il triedro dato da a_2, a_5 non può essere completato da a_9 manifestamente, e nemmeno da a_7 , giacchè, in questo caso, i due triedri $a_2 a_5 a_7$, $a_2 a_4 a_9$ avrebbero un piano comune e i quattro piani residui darebbero i due nuovi triedri $a_1 a_4 a_7$, $a_1 a_5 a_9$ pure con un piano comune. Si ha quindi il triedro $a_2 a_5 a_8$: e allora si ottiene necessariamente il triedro $a_2 a_6 a_8$, ecc. In tal modo i 12 triedri risultano dati e distribuiti nelle quattro terne, per le orizzontali, le verticali, i termini positivi e i negativi del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} \cdot (*)$$

5. Si osservi ora, continuando a considerare i nove piani (E_i) , che essi appartengono a quattro terne T (fra le quali T'). Infatti segue immediatamente dalla proprietà del n.° 3, che tre triedri che non hanno rette comuni (cioè contengono tutte le 27 rette) sono di una terna T e rispettivamente delle sue tre coppie, giacchè, per quella proprietà, due triedri, non appartenenti alla stessa terna T , hanno rette comuni. Può aggiungersi che le quattro terne T , a cui appartiene il sistema (E_i) , contengono tutti i 45 piani tritangenti; cioè i 36 nuovi piani, oltre i piani del sistema, che entrano in esse, sono tutti

(*) Le proprietà precedenti sono identiche a quelle dei flessi di una curva di 3° ordine, se si sostituisca rispettivamente a piano e triedro, flesso e retta dei flessi: cioè i nove piani (E_i) sono dati da una equazione hessiana.

distinti. Giacchè due coppie qualunque appartenenti rispettivamente a due di quelle quattro terne, per es. le coppie date dai triedri $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_4 a_7$, hanno a comune un piano a_1 e uno solo, le rette di a_2 , a_3 essendo distinte da quelle di a_4 , a_7 (*).

Se si considera invece il sistema dei nove piani che si ottengono da (E_1) col sostituire ad un triedro il suo conjugato, ad es., il sistema

$$b_1 b_2 b_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9, \quad (E_2)$$

(formato dalla 2^a, 3^a, 5^a colonna di T'), si hanno ancora nove piani contenenti tutte le 27 rette della superficie, ma qui non esistono altri triedri, all'infuori dei tre, $b_1 b_2 b_3$, $a_4 a_5 a_6$, $a_7 a_8 a_9$. Infatti uno dei piani a_4 , a_5 , a_6 e uno dei piani a_7 , a_8 , a_9 danno un triedro, che è completato da uno dei piani a_1 , a_2 , a_3 (n.° 4). Cioè il sistema (E_2) appartiene alla sola terna T' .

Adunque, se dicasi *enneaedro* il sistema di nove piani tritangenti nei quali giacciono tutte le 27 rette della superficie, si hanno due specie di enneaedri: *quelli di 1^a specie*, che si spezzano in 4 modi in tre triedri, ossia appartengono a quattro terne T e *quelli di 2^a specie* che si spezzano in un modo solo in tre triedri, cioè appartengono ad una sola terna T .

(*) Se si indica con $a_i^{(1)} a_m^{(2)} a_n^{(3)}$ il triedro conjugato ad $a_i a_m a_n$, ponendo ordinatamente $i = 1, i = 2, i = 3, i = 4$ per i triedri conjugati ai triedri dati dalle orizzontali, dalle verticali, dai termini positivi e dai negativi del determinante del n.° 4 e inoltre si rappresentano colle stesse lettere i primi membri delle equazioni dei piani dei triedri, moltiplicate per opportune costanti, l'equazione della superficie di 3° ordine si può scrivere nelle forme seguenti:

$$a_1 a_2 a_3 = a_1^{(1)} a_2^{(2)} a_3^{(3)},$$

$$a_4 a_5 a_6 = a_4^{(1)} a_5^{(1)} a_6^{(1)},$$

$$a_7 a_8 a_9 = a_7^{(1)} a_8^{(1)} a_9^{(1)},$$

$$a_1 a_4 a_7 = a_1^{(2)} a_4^{(2)} a_7^{(2)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_1 a_6 a_8 = a_1^{(4)} a_6^{(4)} a_8^{(4)},$$

$$a_2 a_4 a_9 = a_2^{(4)} a_4^{(4)} a_9^{(4)};$$

donde l'equazione data dal CREMONA (l. c., nei Rendiconti del R. Ist. Lomb., pag. 216)

$$(a_1 a_2 a_3 \dots a_9)^5 = \Pi,$$

essendo Π il prodotto dei 45 piani tritangenti; ecc.

Una terna T contiene quattro enneaedri di 1^a specie e quattro di 2^a. Per es., la terna T' , oltre (E_1) , contiene gli enneaedri di 1^a specie

$$a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9,$$

$$b_1 b_2 b_3 a_4 a_5 a_6 b_7 b_8 b_9,$$

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 a_7 a_8 a_9;$$

poichè il triedro dato da a_1, b_4 (ad es.) deve essere completato da uno dei piani b_7, b_8, b_9 , non potendo esserlo da uno dei piani a_7, a_8, a_9 (cfr. n.° 4), ecc. E la stessa terna T' contiene, oltre (E_2) , gli enneaedri di 2^a specie

$$a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6 a_7 a_8 a_9,$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b_7 b_8 b_9,$$

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9,$$

che provengono dai precedenti sostituendo ad uno o a tre triedri i loro coniugati.

Per conseguenza nascono, dalle 40 terne T , $\frac{40 \cdot 4}{4} = 40$ enneaedri di 1^a specie e $40 \cdot 4 = 160$ enneaedri di 2^a specie (*).

6. *Questi enneaedri sono i soli che si possono formare coi 45 piani tri-tangenti.* In vero sia

$$x_1 x_2 \dots x_9$$

un enneaedro, cioè il sistema di nove piani che contengono le 27 rette e che non hanno quindi rette (della superficie) a comune. Un piano qualunque, x_1 (ad es.), deve appartenere almeno ad un triedro formato di piani dell'enneaedro. Poichè, se ciò non fosse, combinando x_1 cogli altri otto piani dell'enneaedro, si avrebbero otto triedri e quindi otto coppie con un piano comune x_1 , e con questo solo, per la considerazione che, quando due coppie di triedri hanno due piani comuni, ogni altro piano di una coppia ha una retta comune con ogni altro piano dell'altra coppia. Il che non può essere, rispetto ad una coppia esistendo (n.° 1) sei sole altre coppie che hanno colla medesima un (solo) dato piano comune. Ora, se i piani x_1, x_2, x_3 (ad es.) formano un triedro, i piani che non contengono rette di essi sono 12 e si distribuiscono in due coppie

(*) CREMONA, l. c. (nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo), pag. 215.

appartenenti alla terna T individuata dal triedro $x_1 x_2 x_3$ (n.° 2). Cioè gli altri sei piani $x_4 x_5 \dots x_9$ sono di quella terna: c. d. d. (*).

7. Dall'ultima considerazione del n.° 6 segue che due enneaedri (di 1^a o 2^a specie) aventi un triedro comune appartengono alla medesima terna T , quella individuata dal triedro: e viceversa, per le cose del n.° 5, che un triedro è comune a due enneaedri (della stessa specie) e a due soli appartenenti ad una medesima terna.

Dal n.° 5 si ha inoltre manifestamente che *i quattro enneaedri di una stessa specie, nascenti da una terna T , sono tali che due qualunque hanno un triedro comune e i due rimanenti hanno comune il triedro conjugato*: ossia, *i quattro enneaedri si possono decomporre ciascuno in tre triedri, per modo che i triedri dell'uno appartengano rispettivamente agli altri tre*. Questa proprietà vale non soltanto per gli enneaedri di 1^a specie, come fu osservato dal CREMONA (**), ma anche per quelli di 2^a specie. La differenza sta in ciò, che ogni enneaedro di 1^a specie appartiene a quattro di quelle quaderne, mentre ognuno di 2^a ad una sola. Onde si hanno 40 delle dette quaderne (tante, quante le terne T) sì degli enneaedri di 1^a specie, come degli enneaedri di 2^a.

§ 3. Relazioni fra le terne T .

8. Da una terna T' (di cui si conserva la notazione data nel n.° 4) nascono quattro enneaedri di 1^a specie, ognuno dei quali esiste in tre nuove terne; cosicchè, rispetto ad una terna T' , esistono 12 altre terne T , che hanno con

(*) Introducendo la notazione di SCHLAEFLI, gli enneaedri sono dei due tipi:

$a_i \quad b_k \quad c_{ik}$	$a_i \quad b_k \quad c_{ik}$
$a_k \quad b_i \quad c_{ki}$	$a_k \quad b_i \quad c_{ki}$
$a_l \quad b_i \quad c_{li}$	$a_l \quad b_m \quad c_{lm}$
$a_m \quad b_n \quad c_{mn}$	$a_m \quad b_n \quad c_{mn}$
$a_n \quad b_p \quad c_{np}$	$a_n \quad b_p \quad c_{np}$
$a_p \quad b_m \quad c_{pm}$	$a_p \quad b_i \quad c_{pi}$
$c_{im} \quad c_{kn} \quad c_{lp}$	$c_{il} \quad c_{mp} \quad c_{kn}$
$c_{in} \quad c_{kp} \quad c_{lm}$	$c_{in} \quad c_{pk} \quad c_{im}$
$c_{ip} \quad c_{km} \quad c_{in}$	$c_{ni} \quad c_{km} \quad c_{ip}$;

essendo $i k l m n p$ una permutazione qualunque dei numeri 1 2...6. Se ne hanno 80 del 1° tipo (fra i quali i 40 enneaedri di 1^a specie) e 120 del 2° tipo.

(**) CREMONA, l. c. (nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo), pag. 219.

quella un enneaedro di 1^a specie a comune. Cerchiamo in quale relazione stanno alla terna T' le rimanenti 27 terne; di cui una qualsiasi si dirà T'_1 . Si consideri una coppia di T' , per es., la

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (C')$$

Un suo piano a_1 qualsivoglia, appartenendo a due enneaedri di 1^a specie nascenti da T' (cioè ad $a_1 a_2 \dots a_9$, $a_1 a_2 a_3 b_4 \dots b_9$), entra in 6 delle 12 terne T escluse, cioè in sei coppie appartenenti a tali terne: e queste sei coppie non hanno con (C') altro piano comune, oltre a_1 (cfr. n.° 5). Adunque le 36 coppie (n.° 3) che hanno con (C') un (solo) piano comune sono delle 12 terne T escluse. Ossia una coppia di T' e una di T'_1 avranno a comune due piani o nessuno. Per fissare le idee, sia

$$\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad (C'')$$

una coppia di T'_1 . Se essa ha con (C') due piani comuni $a_1 \equiv c_1$, $b_1 \equiv d_1$, nessun piano deve avere a comune colle altre due coppie di T' , per es., colla

$$\begin{vmatrix} a_5 & b_5 \\ a_6 & b_6 \\ a_7 & b_7 \end{vmatrix}; \quad (C''')$$

giacchè, se fosse $a_5 \equiv c_2$, $b_5 \equiv d_2$, le due coppie (C') (C''') , della stessa terna T' , avrebbero a comune le rette $c_1 d_2 \equiv a_1 b_5$, $c_2 d_1 \equiv b_1 a_5$. Ma (C'') deve certamente avere due piani comuni con una delle tre coppie di T' , perchè, se i piani c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , d_3 non entrassero in T' , avrebbero ciascuno una retta comune con ogni coppia di T' (cfr. n.° 4), cioè almeno tre rette di (C'') apparterrebbero ad una tal coppia, il che non può essere (cfr. n.° 3).

Sicchè ogni coppia di T' è *associata* ad una coppia di T'_1 ; due coppie associate hanno due piani comuni; due coppie non associate non hanno alcun piano comune.

Può quindi T'_1 indicarsi, ad es., così:

$$T'_1 \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & \beta_2 \\ a_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_5 & \beta_5 \\ a_6 & \beta_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_7 & b_7 \\ a_8 & \beta_8 \\ a_9 & \beta_9 \end{vmatrix} :$$

essendo $\alpha_2, \alpha_3 \dots \beta_2, \beta_3 \dots$ piani distinti dai piani $a_2, a_3 \dots b_2, b_3 \dots$. Nelle due terne T', T'_1 , il triedro dato dai piani a_1, a_4 deve essere completato (cfr. n.° 4) da uno dei piani delle terze coppie delle due terne e per conseguenza da uno dei piani comuni a queste terze coppie, per es. da a_7 (in accordo colla notazione del n.° 4). Si ha quindi il triedro $a_1 a_4 a_7$ e parimenti i triedri $a_1 b_4 b_7$, $b_1 a_4 b_7$, $b_1 b_4 a_7$.

Adunque:

Rispetto ad una terna T , le altre 39 si dividono in due gruppi di 12 e 27. Ciascuna terna del 1° gruppo ha comune colla terna considerata un enneaedro di 1ª specie: e ciascuna del 2° gruppo ha colla stessa comuni sei piani che si possono distribuire in quattro triedri.

Per due terne che hanno comune un enneaedro di 1ª specie, ogni coppia dell'una ha un piano comune (e uno solo) con ogni coppia dell'altra. Per due terne aventi a comune sei piani, ogni coppia dell'una è associata ad una coppia dell'altra, due coppie associate avendo due piani comuni. Inoltre, in questo secondo caso, le tre rette d'intersezione delle tre paja di piani (due piani di un pajo essendo comuni a due coppie associate) esistono in uno stesso piano: cioè, mantenendo le indicazioni superiori, le tre rette $a_1 b_1, a_1 b_4, a_7 b_7$ a due a due s'incontrano. Perocchè, ad es., i due triedri $a_1 a_4 a_7, a_1 b_4 b_7$ appartengono a due coppie che hanno comuni cinque rette, le tre di a_1 e le $a_4 b_4, a_7 b_7$. Queste ultime (cfr. n.° 3) debbono adunque giacere in un piano.

9. Continuando a considerare il 2° caso surricordato, non possono tre paja di piani $a_1, b_1; a_4, b_4; a_7, b_7$ essere comuni a tre o più terne T (ogni pajo appartenendo a due coppie associate), perchè, ognuno de' quattro triedri che si possono formare con quei sei piani entrerebbe allora in più di due enneaedri (della stessa specie), il che non è possibile (n.° 7).

Ciò premesso, se a_1, b_1 sono due piani qualunque che hanno a comune una retta (della superficie), le quattro terne T', T'_1, T'_2, T'_3 , date dalle quattro coppie di triedri a cui appartengono a_1, b_1 , saranno, prese a due a due, nel 2° caso menzionato, cioè avranno sei piani comuni: ad es.:

$$\begin{array}{lll} T', & T'_1, & \text{i piani } a_1, b_1; a_4, b_4; a_7, b_7, \\ T'_2, & T'_3, & \text{" } a_1, b_1; a'_4, b'_4; a'_7, b'_7, \\ & & \dots \dots \dots \end{array}$$

Due qualunque di questi sei sistemi di sei piani non hanno a comune che a_1, b_1 . Poichè, se fosse $a_4 \equiv a'_4$ (ad es.), dall'esistenza del triedro $a_1 a_4 a_7$ e del triedro $a_1 a'_4 a'_7$ (o $a_1 a'_4 b'_7$) seguirebbe che deve essere $a_7 \equiv a'_7$ (o $a_7 \equiv b'_7$), ecc.; cioè si avrebbero più di due terne T colle stesse tre paja comuni.

§ 4. Ordinamento e costruzione delle terne T .

10. Sia

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 \quad (E_1)$$

un enneaedro di 1^a specie e sieno $T^I, T^{II}, T^{III}, T^{IV}$ le quattro terne T a cui appartiene. Rispetto ad una di esse T^I , consideriamo i due gruppi contenenti rispettivamente 12 e 27 terne T , di cui si disse nel n.° 8: al primo dei quali appartengono T^{II}, T^{III}, T^{IV} . Prendiamo per T^I l'indicazione del n.° 4 e per una terna del gruppo delle 27 l'indicazione del n.° 8. Poichè $a_1 a_4 a_7$ è un triedro, l'enneaedro

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$$

è di 1^a specie. Tale enneaedro, avendo con (E_1) un triedro comune, apparterrà (n.° 7) ad una delle terne T^{II}, T^{III}, T^{IV} . Adunque, mentre ognuna delle 12 terne ha con T^I un enneaedro comune, cadauna delle altre 27 ha un enneaedro comune con qualcuna delle T^{II}, T^{III}, T^{IV} .

Segue che le 40 terne T possono essere ordinate, partendo da un enneaedro di 1^a specie, nel modo seguente. *L'enneaedro è comune a quattro terne: ognuna di queste contiene tre nuovi enneaedri di 1^a specie e ciascuno di tali enneaedri appartiene a tre nuove terne. Si ottengono così le 40 ($= 4 + 4 \cdot 3 \cdot 3$) terne T .*

In relazione a tale ordinamento, essendo $T^I, T^{II}, T^{III}, T^{IV}$ le quattro terne in cui entra l'enneaedro (E_1) , indicheremo con T_{ij}^k ($k=I, II, III, IV$) una terna che ha comune con T^k uno stesso enneaedro [differente da (E_1)], convenendo che per le terne che hanno con T^k lo stesso enneaedro comune si tenga fisso l'indice i e si vari l'indice j (onde $i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$).

11. Coll'aiuto delle proprietà precedenti, si ottiene il seguente specchio delle 40 terne T (*):

(*) Per passare alla notazione JORDAN-CREMONA, basta porre (ad es.) le seguenti eguaglianze:

1 = c_1	10 = c_9	19 = d_7	28 = d_8	37 = e_6
2 = e_2	11 = a_8	20 = b_3	29 = b_8	38 = d_4
3 = b_6	12 = c_6	21 = b_5	30 = c_8	39 = b_7
4 = b_9	13 = a_2	22 = a_9	31 = e_4	40 = a_7
5 = e_1	14 = c_4	23 = e_8	32 = a_6	41 = b_1
6 = c_2	15 = a_5	24 = c_5	33 = e_3	42 = b_4
7 = d_2	16 = c_7	25 = d_3	34 = d_9	43 = e_9
8 = a_3	17 = c_3	26 = b_2	35 = a_4	44 = e_7
9 = d_1	18 = e_5	27 = d_5	36 = d_6	45 = a_1

[Cfr. CREMONA, l. c. (nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo), pag. 209].

$T^I \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_4 & b_4 & a_7 & b_7 \\ a_2 & b_2 & a_5 & b_5 & a_8 & b_8 \\ a_3 & b_3 & a_6 & b_6 & a_9 & b_9 \end{vmatrix}$	$T^{II} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & a_2 & c_2 & a_3 & c_3 \\ a_4 & c_4 & a_5 & c_5 & a_6 & c_6 \\ a_7 & c_7 & a_8 & c_8 & a_9 & c_9 \end{vmatrix}$	$T^{III} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & a_2 & d_2 & a_3 & d_3 \\ a_5 & d_5 & a_6 & d_6 & a_4 & d_4 \\ a_9 & d_9 & a_7 & d_7 & a_8 & d_8 \end{vmatrix}$	$T^{IV} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & e_1 & a_2 & e_2 & a \\ a_6 & e_6 & a_4 & e_4 & a \\ a_5 & e_5 & a_9 & e_9 & a \end{vmatrix}$
$T_{11}^I \equiv \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & a_2 & c_2 & a_3 & c_3 \\ b_4 & d_1 & b_5 & d_2 & b_6 & d_3 \\ b_7 & e_1 & b_8 & e_2 & b_9 & e_3 \end{vmatrix}$	$T_{11}^{II} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_4 & b_4 & a_7 & b_7 \\ c_2 & d_5 & c_6 & d_3 & c_5 & d_2 \\ c_3 & e_8 & c_8 & e_2 & c_9 & e_3 \end{vmatrix}$	$T_{11}^{III} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_5 & b_4 & a_9 & b_7 \\ d_2 & c_7 & d_4 & c_2 & d_6 & c_3 \\ d_3 & e_6 & d_7 & e_3 & d_5 & e_2 \end{vmatrix}$	$T_{11}^{IV} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_3 & a_6 & b_4 & a \\ e_2 & c_4 & e_5 & c_3 & e \\ e_3 & d_9 & e_9 & d_2 & e \end{vmatrix}$
$T_{12}^I \equiv \begin{vmatrix} a_1 & c_4 & a_2 & c_5 & a_3 & c_6 \\ b_5 & d_5 & b_6 & d_6 & b_4 & d_4 \\ b_9 & e_6 & b_7 & e_4 & b_8 & e_5 \end{vmatrix}$	$T_{12}^{II} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_4 & b_5 & a_7 & b_9 \\ c_5 & d_9 & c_2 & d_4 & c_3 & d_6 \\ c_6 & e_1 & c_9 & e_4 & c_8 & e_5 \end{vmatrix}$	$T_{12}^{III} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_3 & a_5 & b_5 & a_9 & b_9 \\ d_4 & c_1 & d_2 & c_5 & d_3 & c_6 \\ d_6 & e_8 & d_8 & e_5 & d_7 & e_4 \end{vmatrix}$	$T_{12}^{IV} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_6 & b_5 & a \\ e_4 & c_7 & e_2 & c_6 & e \\ e_5 & d_1 & e_7 & d_6 & e \end{vmatrix}$
$T_{13}^I \equiv \begin{vmatrix} a_1 & c_7 & a_2 & c_8 & a_3 & c_9 \\ b_6 & d_9 & b_4 & d_7 & b_5 & d_5 \\ b_8 & e_8 & b_9 & e_9 & b_7 & e_7 \end{vmatrix}$	$T_{13}^{II} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_3 & a_4 & b_6 & a_7 & b_8 \\ c_8 & d_1 & c_3 & d_8 & c_2 & d_7 \\ c_9 & e_6 & c_5 & e_9 & c_6 & e_7 \end{vmatrix}$	$T_{13}^{III} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_5 & b_6 & a_9 & b_8 \\ d_7 & c_4 & d_3 & c_8 & d_2 & c_9 \\ d_8 & e_1 & d_6 & e_7 & d_4 & e_9 \end{vmatrix}$	$T_{13}^{IV} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_6 & b_6 & a \\ e_7 & c_1 & e_3 & c_9 & e \\ e_9 & d_5 & e_4 & d_7 & e \end{vmatrix}$
$T_{21}^I \equiv \begin{vmatrix} a_4 & c_1 & a_5 & c_3 & a_6 & c_6 \\ b_1 & d_8 & b_3 & d_5 & b_2 & d_2 \\ b_7 & e_4 & b_9 & e_3 & b_8 & e_8 \end{vmatrix}$	$T_{21}^{II} \equiv \begin{vmatrix} a_2 & b_3 & a_5 & b_4 & a_8 & b_9 \\ c_7 & d_2 & c_1 & d_9 & c_3 & d_8 \\ c_9 & e_4 & c_6 & e_7 & c_4 & e_8 \end{vmatrix}$	$T_{21}^{III} \equiv \begin{vmatrix} a_2 & b_1 & a_6 & b_4 & a_7 & b_9 \\ d_8 & c_5 & d_1 & c_9 & d_3 & c_7 \\ d_9 & e_2 & d_4 & e_8 & d_5 & e_7 \end{vmatrix}$	$T_{21}^{IV} \equiv \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & a_4 & b_4 & a \\ e_7 & c_2 & e_1 & c_7 & e \\ e_8 & d_6 & e_5 & d_8 & e \end{vmatrix}$
$T_{22}^I \equiv \begin{vmatrix} a_4 & c_4 & a_5 & c_2 & a_6 & c_9 \\ b_2 & d_3 & b_1 & d_9 & b_3 & d_6 \\ b_9 & e_9 & b_8 & e_5 & b_7 & e_1 \end{vmatrix}$	$T_{22}^{II} \equiv \begin{vmatrix} a_2 & b_1 & a_5 & b_5 & a_8 & b_8 \\ c_1 & d_6 & c_4 & d_1 & c_6 & d_3 \\ c_8 & e_9 & c_9 & e_8 & c_7 & e_1 \end{vmatrix}$	$T_{22}^{III} \equiv \begin{vmatrix} a_3 & b_2 & a_6 & b_5 & a_7 & b_8 \\ d_1 & c_8 & d_5 & c_3 & d_4 & c_1 \\ d_3 & e_4 & d_8 & e_1 & d_9 & e_3 \end{vmatrix}$	$T_{22}^{IV} \equiv \begin{vmatrix} a_2 & b_3 & a_4 & b_5 & a \\ e_1 & c_5 & e_6 & c_1 & e \\ e_3 & d_7 & e_7 & d_3 & e \end{vmatrix}$
$T_{23}^I \equiv \begin{vmatrix} a_4 & c_7 & a_5 & c_5 & a_6 & c_3 \\ b_3 & d_4 & b_2 & d_1 & b_1 & d_7 \\ b_8 & e_2 & b_7 & e_7 & b_9 & e_6 \end{vmatrix}$	$T_{23}^{II} \equiv \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & a_5 & b_6 & a_8 & b_7 \\ e_4 & d_7 & c_3 & d_5 & c_1 & d_4 \\ c_6 & e_2 & c_7 & e_5 & c_9 & e_6 \end{vmatrix}$	$T_{23}^{III} \equiv \begin{vmatrix} a_2 & b_3 & a_6 & b_6 & a_7 & b_7 \\ d_5 & c_2 & d_3 & c_6 & d_1 & c_4 \\ d_4 & e_9 & d_9 & e_6 & d_8 & e_5 \end{vmatrix}$	$T_{23}^{IV} \equiv \begin{vmatrix} a_2 & b_1 & a_4 & b_6 & a \\ e_5 & c_8 & e_3 & c_4 & e \\ e_6 & d_2 & e_8 & d_4 & e \end{vmatrix}$
$T_{31}^I \equiv \begin{vmatrix} a_7 & c_1 & a_8 & c_5 & a_9 & c_9 \\ b_1 & d_7 & b_2 & d_3 & b_3 & d_5 \\ b_4 & e_5 & b_6 & e_8 & b_5 & e_2 \end{vmatrix}$	$T_{31}^{II} \equiv \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & a_6 & b_5 & a_9 & b_7 \\ c_7 & d_3 & c_2 & d_7 & c_1 & d_9 \\ c_8 & e_5 & c_4 & e_8 & c_5 & e_9 \end{vmatrix}$	$T_{31}^{III} \equiv \begin{vmatrix} a_3 & b_1 & a_4 & b_5 & a_8 & b_7 \\ d_7 & c_6 & d_2 & c_7 & d_1 & c_8 \\ d_9 & e_3 & d_5 & e_9 & d_6 & e_8 \end{vmatrix}$	$T_{31}^{IV} \equiv \begin{vmatrix} a_3 & b_2 & a_5 & b_5 & a \\ e_3 & c_3 & e_2 & c_8 & e \\ e_9 & d_4 & e_6 & d_9 & e \end{vmatrix}$
$T_{32}^I \equiv \begin{vmatrix} a_7 & c_4 & a_8 & c_8 & a_9 & c_3 \\ b_2 & d_2 & b_3 & d_4 & b_1 & d_9 \\ b_5 & e_7 & b_4 & e_1 & b_6 & e_4 \end{vmatrix}$	$T_{32}^{II} \equiv \begin{vmatrix} a_3 & b_1 & a_6 & b_6 & a_9 & b_9 \\ c_1 & d_4 & c_5 & d_2 & c_4 & d_1 \\ c_2 & e_7 & c_7 & e_1 & c_8 & e_2 \end{vmatrix}$	$T_{32}^{III} \equiv \begin{vmatrix} a_3 & b_2 & a_4 & b_6 & a_8 & b_9 \\ d_1 & c_9 & d_6 & c_1 & d_5 & c_2 \\ d_2 & e_5 & d_9 & e_2 & d_7 & e_1 \end{vmatrix}$	$T_{32}^{IV} \equiv \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & a_5 & b_6 & a \\ e_1 & c_6 & e_4 & c_2 & e \\ e_2 & d_5 & e_8 & d_1 & e \end{vmatrix}$
$T_{33}^I \equiv \begin{vmatrix} a_7 & c_7 & a_8 & c_2 & a_9 & c_6 \\ b_3 & d_6 & b_1 & d_8 & b_2 & d_1 \\ b_6 & e_3 & b_5 & e_6 & b_4 & e_9 \end{vmatrix}$	$T_{33}^{II} \equiv \begin{vmatrix} a_3 & b_2 & a_6 & b_4 & a_9 & b_8 \\ c_4 & d_8 & c_1 & d_6 & c_2 & d_5 \\ c_5 & e_3 & c_8 & e_6 & c_7 & e_4 \end{vmatrix}$	$T_{33}^{III} \equiv \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & a_4 & b_4 & a_8 & b_6 \\ d_5 & c_3 & d_1 & c_4 & d_2 & c_5 \\ d_6 & e_7 & d_7 & e_4 & d_9 & e_6 \end{vmatrix}$	$T_{33}^{IV} \equiv \begin{vmatrix} a_3 & b_1 & a_5 & b_4 & a \\ e_4 & c_9 & e_1 & c_5 & e \\ e_6 & d_3 & e_9 & d_5 & e \end{vmatrix}$

Le terne T^I , T^{II} , T^{III} , T^{IV} , nelle quali entra l'enneaedro

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9,$$

si scrivono immediatamente tenendo presente il determinante del n.° 4 e aggiungendo i nuovi simboli $b_1, \dots, b_9, c_1, \dots, c_9, d_1, \dots, d_9, e_1, \dots, e_9$, che, coi precedenti $a_1, \dots, a_9$, rappresentano tutti i 45 piani tritangenti (cfr. n.° 5). È evidente che la successione di questi trentasei nuovi simboli non è interamente fissata, potendosi scambiare, in modo affatto arbitrario, quelli che figurano in una stessa colonna delle T^k ($k = I, II, III, IV$).

Si consideri l'enneaedro (di 1^a specie) $a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9$. Per l'arbitrarietà ora avvertita, si può ritenere che sieno triedri $a_1 b_4 b_7$, $a_1 b_5 b_9$, $a_1 b_6 b_8$ e allora che sia un triedro anche $a_2 b_4 b_7$, poichè, se si avesse invece $a_2 b_4 b_8$, si scambierebbe b_8 con b_9 , b_8 con b_5 . Quindi, per il ragionamento fatto nel n.° 4, i 12 triedri dell'enneaedro suddetto sono dati dalle orizzontali, dalle verticali, dai termini positivi e dai negativi del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_4 & b_7 \\ a_2 & b_5 & b_8 \\ a_3 & b_6 & b_9 \end{vmatrix}.$$

Ciò permette di scrivere la 1^a, 3^a, 5^a colonna delle T^I_{11} , T^I_{12} , T^I_{13} aventi quell'enneaedro comune con T^I . Per ottenere le altre colonne delle nominate tre terne, osservisi che esse (all'infuori dell'enneaedro considerato) nulla hanno a comune fra loro (n.° 5), mentre ciascuna avrà con ciascuna delle T^{II} , T^{III} , T^{IV} sei piani comuni (n.° 8), giacchè (ad es.) T^I_{11} e T^{II} contengono amendue a_1 e non b_4, b_7 . Approfittando quindi della sunnotata arbitrarietà, si possono scrivere le colonne mancanti: cioè (ad es.) T^I_{11} deve contenere nella seconda colonna (pel confronto con T^{II}) uno dei simboli c_1, c_4, c_7 : si è posto c_1 , e allora T^I_{12} deve contenere, pure nella seconda colonna, una delle c_4, c_7 : posto c_4 , nella seconda colonna di T^I_{13} deve trovarsi c_7 , ecc.

Proponiamoci ora di scrivere T^{II}_{11} , T^{II}_{12} , T^{II}_{13} , aventi a comune con T^{II} l'enneaedro $a_1 a_4 a_7 c_2 c_5 c_8 c_3 c_6 c_9$. I tre simboli a_1, a_4, a_7 si troveranno distribuiti nelle tre coppie di ciascuna di quelle terne: e, siccome dal confronto di T^I_{11} , T^I_{12} , T^I_{13} con T^{II} segue (n.° 8) rispettivamente che $a_1 c_2 c_3$, $a_1 c_5 c_6$, $a_1 c_8 c_9$ sono tre triedri, si hanno subito le prime colonne di quelle tre terne. Inoltre, dovendo ognuna delle stesse terne avere con T^I sei piani comuni (giacchè le terne colle quali T^I ha enneaedri comuni sono le T^{II} , T^{III} , T^{IV} , T^I_{ij}) ed essendo ancora arbitraria la successione dei simboli b_1, b_2, b_3 , finora non adoperati, possiamo fissare che b_1 sia in T^{II}_{11} , b_2 in T^{II}_{12} , b_3 in T^{II}_{13} .

Ciò fatto, osservisi che T''_{11} deve avere (n.° 8) un enneaedro a comune con T^I_{11} (a_1, c_2, c_3 essendo distribuiti nelle tre coppie di quella terna) e questo enneaedro deve essere $a_1 b_4 b_7 c_2 d_2 c_3 d_3 e_3$. Adunque la quarta e sesta colonna di T''_{11} conterranno i simboli $b_4, b_7, d_2, d_3, e_2, e_3$. Ora T''_{11} deve avere sei piani comuni non solo con T_1 , ma altresì con T''' , T^{IV} (n.° 8): cioè la quarta colonna di quella terna deve essere formata di tre simboli presi rispettivamente dalle tre colonne quarta, sesta e quarta di T^I , T''' , T^{IV} : e però la detta quarta colonna deve essere necessariamente $b_4 d_3 e_2$. Analogamente si trova la sesta colonna di T''_{11} , cioè $b_7 d_2 e_3$. Nella terza e quinta colonna di T''_{11} debbono esserci c_5, c_6, c_8, c_9 (essendo $a_1 a_4 a_7 c_2 c_5 c_8 c_6 c_9$ l'enneaedro comune a T''_{11} , T''): ma T''_{11} deve avere tanto con T^I_{12} che con T^I_{13} sei piani comuni, e ciò dà immediatamente le nominate colonne. Similmente si ottengono le ultime quattro colonne di T''_{12} , T''_{13} .

Per completare la seconda colonna di T''_{11} , si noti che, dovendo avere questa terna sei piani comuni con T''' , T^{IV} , T^I_{12} , T^I_{13} , in detta colonna debbono entrare tre simboli tali che uno (e uno solo) appartenga ad ognuna delle quattro colonne

$$\begin{array}{cccc} d_1 & e_1 & c_4 & c_7 \\ d_5 & e_6 & d_8 & d_9 \\ d_9 & e_8 & e_6 & e_8. \end{array}$$

Ciò darebbe due soluzioni: l'una $b_4 d_8 e_8$, l'altra $b_4 d_9 e_6$. Quest'ultima è da escludere, perchè conduce ad un assurdo. In vero, ammettendola, si ottiene l'enneaedro $b_4 d_9 e_6 b_4 d_3 e_2 b_7 d_2 e_3$, che ha coll'altro $b_1 b_2 b_3 a_4 a_5 a_6 b_7 b_8 b_9$ (nascente da T^I) il triedro comune $a_4 b_1 b_7$. Questi due enneaedri debbono adunque appartenere ad una stessa terna τ (n.° 7); della quale un triedro di una coppia è appunto $a_4 b_1 b_7$ e, per le due coppie rimanenti, due triedri contengono $a_5, a_6, b_2, b_3, b_8, b_9$ e i due conjugati contengono $c_6, c_8, d_2, d_9, e_3, e_6$. Il paragone di τ con T''' e T^I_{13} mostra che b_8, a_5 devono trovarsi con d_9 in una stessa coppia di τ e appartenere ad un triedro. Il quale non può essere altro che $a_5 b_8 b_2$ (considerando la terna T^I e osservando che, per questa terna e per la T^I_{13} , $b_3 a_4 b_8$ è un triedro). Infine, confrontando τ con T'' , T^{IV} , si trova che a_5 deve essere nella stessa coppia con c_8, e_3 , cioè che il triedro conjugato ad $a_5 b_8 b_2$ è $d_9 e_3 c_8$. Adunque due coppie di τ sono

$$\left| \begin{array}{cc} a_5 & c_8 \\ b_2 & d_9 \\ b_8 & e_3 \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} a_6 & c_6 \\ b_3 & d_2 \\ b_9 & e_6 \end{array} \right|.$$

Il che è assurdo, come risulta facilmente dal confronto di τ con T'_{11} (n.º 8). La seconda colonna di T''_{11} è adunque $b_1 d_5 e_8$.

Delle due soluzioni $b_2 d_9 e_1$, $b_2 d_1 e_8$, che pure si presentano per la seconda colonna di T''_{12} , si elimina ora facilmente la seconda $b_2 d_1 e_8$, per l'osservazione che T''_{11} , T''_{12} non possono avere (n.º 5) altri piani comuni, all'infuori di quelli dell'enneaedro $a_1 a_4 a_7 c_2 c_5 c_8 c_3 c_6 c_9$. E parimenti si trova la seconda colonna $b_3 d_1 e_6$ di T''_{13} .

Dopo ciò, la determinazione delle altre terne si fa senza difficoltà. Per es., considerando T'''_{11} (che ha comune con T''' , T'''_{12} , T'''_{13} lo stesso enneaedro $a_1 a_5 a_9 d_2 d_6 d_7 d_3 d_4 d_8$), se ne ottengono la prima e le ultime quattro colonne, come per T''_{11} . Per trovare la seconda colonna si paragoni T'''_{11} con T' , T'' , T''_{12} , T''_{13} , T''_{12} , T''_{13} , [con ciascuna delle quali, oltre a_1 , deve avere comune (n.º 8) altri cinque piani]: e ne segue che dei tre simboli di quella colonna uno (e uno solo) deve figurare in ciascuna delle colonne:

$$\begin{array}{cccccc} b_1 & c_1 & e_1 & c_4 & c_7 & b_2 & b_3 \\ b_2 & c_4 & e_6 & d_5 & d_9 & d_9 & d_1 \\ b_3 & c_7 & e_8 & e_6 & e_8 & e_1 & e_6; \end{array}$$

ciò che dà l'unica soluzione $b_2 c_7 e_6$. Similmente si ottengono T'''_{12} , T'''_{13} , T''_{11} , T''_{12} , T''_{13} .

Vogliasi ancora determinare T'_{21} che, insieme a T'_{22} , T'_{23} , ha comune con T' l'enneaedro $b_1 b_2 b_3 a_4 a_5 a_6 b_7 b_8 b_9$. Pel confronto di T' con T'^k_{ij} ($k = \text{II, III, IV}$; $j = 1, 2, 3$), si hanno i triedri $a_4 b_1 b_7$, $a_4 b_2 b_9$, $a_4 b_3 b_8$, $a_5 b_2 b_7$, $a_5 b_3 b_9$, ...: onde si ottengono la prima, terza e quinta colonna di T'_{21} (e di T'_{22} , T'_{23}). Poi, paragonando T'_{21} con T'' , T''' , T''_{12} , nelle quali c'è a_4 e con T'_{11} , T'_{12} , T'_{13} , nelle quali trovansi b_7 , si hanno le sei colonne

$$\begin{array}{cccccc} c_1 & d_3 & e_2 & c_9 & c_5 & c_1 \\ c_4 & d_4 & e_4 & d_8 & d_6 & d_1 \\ c_8 & d_8 & e_9 & e_7 & e_4 & e_1; \end{array}$$

dalle quali nasce l'unica soluzione $c_1 d_8 e_4$ per la seconda colonna di T'_{21} . In modo analogo si trovano le altre due colonne.

Manifestamente il procedimento ora seguito vale per le terne rimanenti.

§ 5. Teoremi sugli enneaedri.

12. Sia T^1 una terna qualsivoglia, e sieno

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 \quad (E_1)$$

$$a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 \quad (E'_1)$$

due enneaedri di 1ª specie nascenti da essa; onde i piani a_1, a_2, a_3 comuni ai due enneaedri formano una colonna (triedro di una coppia) di T^1 . Un'altra terna T'' , a cui appartenga (E_1) , e un'altra T'_{11} , a cui appartenga (E'_1) , non possono avere un enneaedro a comune. Perocchè i tre piani a_1, a_2, a_3 si distribuiscono nelle tre coppie tanto di T'' quanto di T'_{11} (n.º 8) e gli altri piani delle colonne (triedri) nelle quali entrano a_1, a_2, a_3 sono differenti, sono cioè per T'' i piani $a_4, a_5, \dots a_9$ e per T'_{11} $b_4, b_5, \dots b_9$. Adunque, le nuove 12 terne, nelle quali entrano i quattro enneaedri di 1ª specie di T^1 , contengono nuovi 36 enneaedri di 1ª specie, differenti da quelli (cfr. n.º 5) e fra loro. In altre parole, gli enneaedri di 1ª specie possono essere ordinati, a partire da una terna, nello stesso modo come le terne, a partire da un enneaedro (n.º 10). Cioè, la terna contiene quattro enneaedri: ognuno di questi appartiene a tre nuove terne e ciascuna di tali terne contiene tre nuovi enneaedri: e così si hanno i 40 ($= 4 + 4 \cdot 3 \cdot 3$) enneaedri di 1ª specie. Ad es., adottando le indicazioni dei n.º 10, 11, tutti gli enneaedri di 1ª specie sono dati da uno qualunque di questi quattro gruppi di terne ($k=1, II, III, IV$; $i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$)

$$(T^k, T^i_{ij}), \quad (T^k, T^{II}_{ij}), \quad (T^k, T^{III}_{ij}), \quad (T^k, T^{IV}_{ij}).$$

13. Due enneaedri di 1ª specie, appartenenti ad una medesima terna, nascono l'uno dall'altro sostituendo a due triedri i loro conjugati (n.º 5). Per conseguenza, in virtù della proprietà precedente (n.º 12), da un enneaedro di 1ª specie provengono tutti gli altri, sostituendo successivamente a due triedri i loro conjugati. Con la stessa sostituzione si ottiene poi da un enneaedro di 2ª specie un altro pure di 2ª specie; mentre da un enneaedro di 1ª (o 2ª) specie nasce un enneaedro di 2ª (o 1ª) specie, sostituendo ad uno o a tutti tre i triedri i loro conjugati (n.º 5).

Si conclude facilmente che, da un enneaedro qualsivoglia (di 1ª o 2ª specie) nascono gli altri 199, facendo successivamente l'operazione di sostituire ad un triedro il suo conjugato; due enneaedri essendo della stessa specie o di specie diversa, secondochè il numero delle dette sostituzioni è pari o dispari.

14. *Rispetto ad un enneaedro di 1^a specie, gli altri 39 si dividono in due classi; l'una di 12, l'altra di 27 enneaedri. L'enneaedro considerato ha un triedro comune con ciascuno del 1^o gruppo e un piano comune con ciascuno del 2^o.*

Infatti se

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 \quad (E_1)$$

è un enneaedro qualsiasi di 1^a specie e si adottano le denominazioni del n.º 10, ciascuno dei dodici enneaedri esistenti [oltre (E_1)] in $T^I, T^{II}, T^{III}, T^{IV}$, contiene manifestamente (n.º 5) un triedro di (E_1) . Questi 12 enneaedri si dividono in 4 gruppi, composto ciascuno di tre enneaedri (nascenti da una delle quattro terne suddette) e corrispondenti ad una decomposizione di (E_1) in tre triedri, i tre enneaedri del gruppo contenendo rispettivamente questi tre triedri. Inoltre un piano di (E_1) entra in quattro suoi triedri e però fa parte di quattro enneaedri appartenenti a gruppi differenti.

Gli altri 27 enneaedri nascono da uno qualunque dei quattro gruppi di nove terne $T^I_{ij}, T^{II}_{ij}, T^{III}_{ij}, T^{IV}_{ij}$ (n.º 12). Che ciascuno di questi enneaedri abbia con (E_1) uno e un solo piano comune, segue dall'osservazione generale che, *quando due terne hanno un enneaedro comune, ogni altro enneaedro dell'una ha un piano e uno solo comune con ogni altro enneaedro dell'altra.* In vero se

$$a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 \quad (E'_1)$$

è l'enneaedro comune a due terne T^I, T^I_{ii} ed (E_1) è un altro enneaedro di T^I , i soli tre piani a_1, a_2, a_3 di (E_1) , comuni ad (E'_1) , giacciono in T^I_{ii} , giacchè le due terne hanno comuni (n.º 5) i soli piani di (E'_1) . E quei tre piani a_1, a_2, a_3 sono distribuiti nelle tre coppie e situati in tre colonne (triedri delle coppie) della terna T^I_{ii} , le quali sono completate dai piani $b_4, b_5, \dots, b_9$ (n.º 8). Talchè un enneaedro di 1^a specie diverso da (E'_1) e appartenente alla detta terna T^I_{ii} , contenendo una sola di quelle tre colonne (n.º 5), ha comune con (E_1) un piano ed uno solo.

E manifestamente, poichè ogni piano di (E_1) entra in tre delle nove terne T^k_{ij} (k essendo I o II o III o IV), i 27 enneaedri della 2^a classe si distribuiscono in nove gruppi, ciascun gruppo essendo costituito da tre enneaedri aventi con (E_1) uno stesso piano comune. Questi nove gruppi si possono poi riunire a tre a tre in 12 terne, i tre gruppi di una terna corrispondendo ai tre piani di un triedro di (E_1) .

Un piano a_i di (E_1) appartiene a quattro enneaedri della 1^a classe esistenti in $T^I, T^{II}, T^{III}, T^{IV}$ (nelle quali terne hanno comune con (E_1) la colonna in

cui entra a_i) e che diremo $E_1^I, E_1^{II}, E_1^{III}, E_1^{IV}$; e a tre della 2ª classe che nascono, ad es., dalle terne $T_{11}^I, T_{12}^I, T_{13}^I$ aventi a comune con T^I l'enneaedro E_1^I e che diremo E_{11}, E_{12}, E_{13} . Questi tre enneaedri debbono trovarsi anche nelle terne T_{ij}^{II} (n.º 12) e precisamente in quelle tre $T_{11}^{II}, T_{12}^{II}, T_{13}^{II}$ che contengono a_1 , cioè hanno a comune con T^{II} l'enneaedro E_1^{II} e parimenti nelle $T_{11}^{III}, T_{12}^{III}, T_{13}^{III}$ e nelle $T_{11}^{IV}, T_{12}^{IV}, T_{13}^{IV}$ che hanno rispettivamente con T^{III}, T^{IV} comuni gli enneaedri E_1^{III}, E_1^{IV} . Per l'osservazione generale fatta superiormente, due dei quattro enneaedri $E_1^I, E_1^{II}, E_1^{III}, E_1^{IV}$ e similmente due dei quattro enneaedri $(E_i), E_{11}, E_{12}, E_{13}$ hanno un solo piano comune: invece ogni enneaedro della prima quaderna ha comune con ognuno della seconda un triedro, giacchè i due enneaedri appartengono ad una medesima terna [cioè $(E_i), E_1^k$ alla i^k ; E_{1i}, E_1^k alla T_{1i}^k]. Adunque, *uno stesso piano è comune ad otto enneaedri di 1ª specie (*)*, distribuiti in due quaderne: due enneaedri di una stessa quaderna non hanno altro piano comune; ma ciascun enneaedro di una quaderna ha comuni con ciascun enneaedro dell'altra due nuovi piani, che con quello formano un triedro. Il numero di queste coppie di quaderne conjugate è eguale al numero dei piani, cioè 45.

Per le notazioni del n.º 11, gli otto enneaedri che hanno a comune a_1 sono

$$(E_1) \equiv a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$$

$$E_{11} \equiv a_1 b_4 b_7 c_2 d_2 e_2 c_3 d_3 e_3$$

$$E_{12} \equiv a_1 b_5 b_9 c_5 d_5 e_4 c_6 d_4 e_5$$

$$E_{13} \equiv a_1 b_6 b_8 c_8 d_7 e_9 c_9 d_8 e_7$$

$$E_1^I \equiv a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9$$

$$E_1^{II} \equiv a_1 a_4 a_7 c_2 c_5 c_8 c_3 c_6 c_9$$

$$E_1^{III} \equiv a_1 a_5 a_9 d_2 d_6 d_7 d_3 d_4 d_8$$

$$E_1^{IV} \equiv a_1 a_6 a_8 e_2 e_4 e_9 e_3 e_5 e_7.$$

Le proprietà contenute in questo numero sono dovute a CREMONA (**).

15. Sia

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 \quad (E_2)$$

(*) Ciò segue anche dalla relazione $8.45 = 9.40$: ovvero dall'osservare che un piano appartiene a 16 triedri e però a 16 terne T , e inoltre che ognuna di queste terne contiene due degli enneaedri considerati ed ogni enneaedro appartiene a 4 delle 16 terne.

(**) l. c. (nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo), pag. 219.

un enneaedro di 2^a specie, T' la terna a cui appartiene ed

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$$

l'enneaedro di 1^a specie che si ottiene, sostituendo ai tre triedri di (E_2) i loro conjugati e che quindi esiste nella stessa terna T' . Introducendo nuovamente le denominazioni del n.º 10, si riconosce facilmente, con considerazioni analoghe alle precedenti, che gli altri tre enneaedri di 2^a specie nascenti da T' hanno con (E_2) un triedro comune, mentre i quattro enneaedri di 2^a specie esistenti rispettivamente in T'' , T''' , T'''' non hanno con (E_2) alcun piano comune; che quest'ultima proprietà ha luogo altresì per un enneaedro di 2^a specie di ciascuna delle terne T'_{ij} ; che gli altri tre enneaedri di 2^a specie provenienti da ognuna di tali terne hanno con (E_2) quattro piani comuni; e infine che da ciascuna delle terne T''_{ij} , T'''_{ij} , T''''_{ij} derivano tre enneaedri di 2^a specie aventi con (E_2) un piano comune e uno con un triedro comune. Cosicchè, *rispetto ad un enneaedro di 2^a specie, gli altri 159 si distribuiscono in quattro gruppi di 21, 81, 30 e 27 con nessuno, uno, tre (costituenti un triedro) e quattro piani rispettivamente comuni coll'enneaedro considerato (*)*.

E parimenti si dimostra che, *rispetto ad un enneaedro di 1^a specie, i 160 enneaedri di 2^a specie si dividono in tre gruppi di 40, 108 e 12 aventi ordinatamente nessuno, due e sei piani (formanti due triedri) comuni coll'enneaedro stesso: e che, rispetto ad un enneaedro di 2^a specie, i 40 enneaedri di 1^a specie si spartiscono in tre gruppi di 10, 27 e 3 aventi ordinatamente nessuno, due e sei piani (costituenti due triedri) comuni coll'enneaedro di 2^a specie*.

Delle due ultime proprietà una è manifesta conseguenza dell'altra. Giacchè se y è il numero degli enneaedri di 1^a specie che hanno a comune con uno di 2^a un dato numero di piani (0 o 2 o 6) ed x il numero degli enneaedri di 2^a specie che hanno a comune con uno di 1^a lo stesso numero di piani, deve esistere la relazione

$$40 \cdot x = 160 \cdot y,$$

cioè

$$x = 4y.$$

(*) Nell'ultimo caso, i quattro triedri che si possono formare coi quattro piani sono di 1^a specie (n.º 16): il che risulta dall'osservare che (n.º 18) i quattro piani comuni a due enneaedri appartengono due ad un triedro e due ad un altro triedro dei tre ne' quali si spezza ciascuno dei due enneaedri. Ad es. due tali enneaedri sono (n.º 11)

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9, \quad a_1 b_4 b_7 a_2 b_5 b_8 c_3 d_3 e_3.$$

§ 6. Triedri di 1ª, 2ª e 3ª specie. Altre proprietà degli enneaedri.

16. I triedri considerati precedentemente sono sistemi di tre piani tritangenti che contengono nove rette della superficie esistenti in altri tre piani tritangenti. Ma è utile considerare tali sistemi di tre piani tritangenti, pei quali non abbia luogo l'ultima condizione. Si dica ancora *triedro* il sistema di tre piani tritangenti nei quali giacciono nove rette (distinte) della superficie e si chiami piano *conjugato* al triedro un piano che contenga una retta di ciascuno dei tre piani del triedro. Si hanno allora tre specie di triedri:

- 1.º *Triedri di 1ª specie*, quelli che non ammettono piani conjugati;
- 2.º *Triedri di 2ª specie*, quelli che ammettono un solo piano conjugato;
- 3.º *Triedri di 3ª specie*, o *Triedri di STEINER*, o, come si è fatto fin qui, semplicemente *Triedri* (in senso stretto), quelli che hanno due e però (*) tre piani conjugati (costituenti un altro triedro della stessa specie).

I triedri di 3ª specie, come si sa, sono 240, distribuiti in 120 coppie di triedri conjugati.

Per ottenere il numero dei triedri di 1ª e 2ª specie, si ricordi che coi 45 piani tritangenti si possono formare 720 coppie (una coppia di piani contenendo sei rette della superficie). Sieno a_1, a_2 i piani di una tal coppia e a_3 il piano che con essi forma un triedro di 3ª specie. Escludendo i 6 piani di questo triedro e del triedro ad esso conjugato, e i 27 che passano ulteriormente per le sue nove rette, rimangono 12 piani, ognuno de' quali costituisce, con a_1, a_2 , un triedro di 1ª specie. Invece si ha un triedro di 2ª specie, aggiungendo ad a_1, a_2 , uno dei nove piani che passano per le tre rette di a_3 (all'infuori di a_3 e dei piani del triedro conjugato ad $a_1 a_2 a_3$). Adunque il numero dei triedri di 1ª specie è $2880 \left(= \frac{720 \cdot 12}{3} \right)$ e quello dei triedri di 2ª specie è $2160 \left(= \frac{720 \cdot 9}{3} \right)$.

17. Il sistema delle tre pajà di piani (**)

$$a_1, b_1; \quad a_4, b_4; \quad a_7, b_7; \quad (\Sigma)$$

comuni a due terne T , fornisce quattro triedri di 2ª specie

$$b_1 b_4 b_7, \quad b_1 a_4 a_7, \quad a_1 b_4 a_7, \quad a_1 a_4 b_7, \quad (S)$$

(*) Cfr., ad es., CREMONA-CURTZE, l. c., n.º 260.

(**) Si dice *paja* o *coppia*, secondochè i due piani tritangenti hanno o no comune una retta della superficie.

e quattro di 3^a specie

$$a_1 a_4 a_7, \quad a_1 b_4 b_7, \quad b_1 a_4 b_7, \quad b_1 b_4 a_7; \quad (S')$$

i quali otto triedri hanno uno stesso piano conjugato, quello delle rette $a_1 b_1$, $a_4 b_4$, $a_7 b_7$ (n.° 8).

Ora un pajo di piani a_1 , b_1 appartiene a sei sistemi (Σ), ne' quali i piani rimanenti sono tutti differenti (n.° 9). Questi 24 piani sono per conseguenza i piani che non contengono rette del pajo $a_1 b_1$, giacchè il numero di tali piani è appunto $45 - 2 - 4 \cdot 4 - 3 = 24$. Dato un pajo di piani a_1 , b_1 e uno qualunque a_4 dei detti 24 piani, si ottiene il sistema (Σ), a cui i tre piani appartengono, costruendo tre dei quattro triedri (S'). Adunque, *se i piani a_1 , b_1 si segano in una retta della superficie e se a_4 è un altro piano qualsivoglia che non contenga rette di a_1 , a_2 , l'esistenza di uno qualunque dei quattro triedri di 3^a specie (S') è conseguenza di quella degli altri tre.*

Questa proprietà può mettersi sotto un altro aspetto. Sia dato un triedro di 2^a specie $b_1 b_4 b_7$ e si costruiscano tre dei triedri (S'); si ottengono tre nuovi piani a_1 , a_4 , a_7 che, con quelli del triedro dato, formano tre paja di piani. Assunto un pajo $a_1 b_1$ e uno a_4 dei quattro piani b_1 , b_4 , a_4 , a_7 , si ottiene un sistema (Σ), che, in virtù de' tre triedri costruiti, deve contenere i piani rimanenti b_4 , b_7 , a_7 . Per conseguenza (ponendo $b_1 = a$, $b_4 = b$, $b_7 = c$, $a_1 = a'$, $a_4 = b'$, $b_7 = c'$) si ha il teorema:

Se abc è un triedro di 2^a specie, e se dei quattro triedri abc' , $ab'c$, $a'bc$, $a'b'c'$ tre sono di 3^a specie, anche il quarto è di 3^a specie.

In particolare, se abc è di 2^a specie e sono di 2^a specie abc' , $ab'c$, $a'bc$, è pure di 3^a specie $a'b'c'$. In questo senso si può dire che ad un triedro di 2^a specie abc corrisponde uno di terza $a'b'c'$. In un sistema (Σ) esistono quattro coppie di tali triedri corrispondenti; cioè i triedri (S) sono ordinatamente corrispondenti ai triedri (S').

Un triedro di 3^a specie corrisponde a nove triedri di 2^a, determinati dai nove piani che passano per le tre rette di uno dei tre piani del triedro di 3^a specie (all'infuori del piano stesso e di quelli del triedro conjugato). La qual cosa risulta altresì dalla relazione $9 \cdot 240 = 2160$ (n.° 16).

Due piani di una coppia di una terna T , i quali non si segano in una retta della superficie, cioè giacciono in una stessa colonna di T , formano con un piano qualsiasi delle altre due coppie, un triedro di 1^a specie, giacchè questo piano non ha alcuna retta comune col terzo piano della suddetta colonna. Un triedro di 2^a specie, il quale appartenga ad una terna T , deve adunque avere

i suoi tre piani distribuiti nelle tre coppie di T . E poichè, come vedemmo testè, un triedro di 2ª specie, appartiene ad un solo sistema (Σ), si può concludere (n.º 9) che *un triedro di 2ª specie appartiene a due sole terne T e però a due soli enneaedri, che sono di 2ª specie* (*).

18. Degli 84 triedri contenuti in un enneaedro di 1ª specie, 12 sono di 3ª specie. *I rimanenti 72 triedri sono tutti di 1ª specie.* Giacchè, considerando i tre piani di un triedro di 3ª specie dell'enneaedro, uno qualsivoglia degli altri sei piani dell'enneaedro stesso, non contenendo alcuna retta di quei tre piani, forma necessariamente con due di essi un triedro di 1ª specie.

Degli 84 triedri contenuti in un enneaedro di 2ª specie, 3 sono di 3ª specie. *I rimanenti 81 sono 54 di 1ª specie e 27 di 2ª.* Cioè i triedri che contengono due piani di un triedro di 3ª specie sono di 1ª specie e si dimostra come dianzi: mentre i triedri che contengono tre piani appartenenti rispettivamente ai tre triedri di 3ª specie sono di 2ª specie. In vero, se $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9$ è l'enneaedro considerato e

$$T \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_5 & b_5 \\ a_6 & b_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_7 & b_7 \\ a_8 & b_8 \\ a_9 & b_9 \end{vmatrix}$$

la terna a cui esso appartiene, cioè $b_1 b_2 b_3$, $b_4 b_5 b_6$, $b_7 b_8 b_9$ i triedri di 3ª specie e $a_1 a_2 a_3$, $a_4 a_5 a_6$, $a_7 a_8 a_9$ i loro conjugati; due piani b_1 , b_4 formano un triedro di 3ª specie con uno a_7 dei piani a_7 , a_8 , a_9 . Ciascuno dei piani b_7 , b_8 , b_9 contiene una retta di a_7 e quindi i tre triedri $b_1 b_4 b_7$, $b_1 b_4 b_8$, $b_1 b_4 b_9$ sono di 2ª specie ed hanno rispettivamente per piani conjugati i tre piani del triedro conjugato a $b_1 b_4 a_7$.

I 27 triedri di 2ª specie del suddetto enneaedro hanno adunque per piani conjugati i piani dei nove triedri conjugati a nove dei 12 triedri di 3ª specie dell'enneaedro di 1ª specie $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 a_7 a_8 a_9$ (o di $b_1 b_2 b_3 a_4 a_5 a_6 b_7 b_8 b_9$, o anche di $a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9$); escludendo cioè i triedri $b_1 b_2 b_3$, $b_4 b_5 b_6$, $a_7 a_8 a_9$, i cui conjugati sono $a_1 a_2 a_3$, $a_4 a_5 a_6$, $b_7 b_8 b_9$. Ne risulta, ricordando una proprietà del n.º 5, che, *i 45 piani tritangenti sono dati dai piani di un enneaedro qualsivoglia (di 1ª o 2ª specie) e dai piani conjugati ai triedri (di 2ª e 3ª specie) contenuti in esso.*

(*) Il che concorda colla relazione (n.º 16, 18)

$$2160 = \frac{160 \cdot 27}{2}.$$

19. Vedemmo che un triedro di 3^a specie appartiene a quattro enneaedri, due di 1^a e due di 2^a specie (n.° 5) e che un triedro di 2^a specie appartiene a due enneaedri di 2^a specie (n.° 17).

Un triedro di 1^a specie appartiene a quattro enneaedri, uno di 1^a specie e tre di 2^a. Sia infatti $a_1 a_4 a_8$ un triedro di 1^a specie: e sia a_3 il piano che forma con a_4, a_8 un triedro di 3^a specie e a_2 quello che forma pure un triedro di 3^a specie con a_1, a_3 . Dicsi T' la terna T individuata dal triedro $a_1 a_2 a_3$. Poichè i due triedri di 3^a specie $a_3 a_4 a_8, a_1 a_2 a_3$ hanno comune a_3 , e a_1 non ha retta (della superficie) comune nè con a_4 nè con a_8 , lo stesso deve avvenire di a_2 , perchè le due coppie a cui danno origine quei due triedri hanno comuni le sole tre rette di a_3 (cfr. n.° 3). Cioè i piani a_4, a_8 appartengono alle due coppie di T' , diverse da quella in cui entra $a_1 a_2 a_3$ e appartengono a coppie differenti per essere $a_3 a_4 a_8$ un triedro di 3^a specie (cfr. n.° 4). Dopo ciò, la costruzione di T' non presenta alcuna difficoltà (n.° 4): e sia (ad es.)

$$T' \equiv \begin{vmatrix} a_1 & . & a_4 & . & a_7 & . \\ a_2 & . & a_5 & . & a_8 & . \\ a_3 & . & a_6 & . & a_9 & . \end{vmatrix}.$$

Questa terna T' è l'unica terna T a cui appartiene un triedro di 1^a specie $a_1 a_4 a_8$, se i tre piani del triedro debbono appartenere uno ad uno alle tre coppie della terna, giacchè il piano a_3 che forma con a_4, a_8 un triedro di 1^a specie deve appartenere alla colonna in cui trovasi a_1 [altrimenti $a_1 a_4 a_8$ sarebbe di 2^a specie (cfr. n.° 18)]. Ma il triedro $a_1 a_4 a_8$ appartiene ad altre tre terne T'' , T''' , T'''' , che si ottengono ponendo due piani del triedro dato in una stessa coppia (e in una stessa colonna) e tenendo di nuovo presente il n.° 4: le quali tre terne hanno comuni con T' lo stesso enneaedro di 1^a specie

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9.$$

Prendendo per indicazione delle medesime quella data dallo specchio del n.° 11, abbiamo adunque, come asserimmo, oltre il suddetto enneaedro di 1^a specie, i tre enneaedri di 2^a specie

$$a_1 a_4 a_7 a_2 a_5 a_8 c_3 c_6 c_9,$$

$$a_1 a_5 a_9 a_3 a_4 a_8 d_2 d_6 d_7,$$

$$a_1 a_6 a_8 a_2 a_4 a_9 e_3 e_5 e_7,$$

col triedro comune $a_1 a_4 a_8$.

Una conferma della precedente proprietà si ha nelle relazioni (cfr. n.° 16, 18)

$$2880 = 72 \cdot 40 = \frac{54 \cdot 160}{3}.$$

20. Sia $a_1 a_4 a_8$ un triedro di 1ª specie e

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$$

l'enneaedro di 1ª specie individuato da esso (n.º 19). I triedri di 3ª specie dati dalle coppie di piani $a_1 a_4$, $a_1 a_8$, $a_4 a_8$ debbono essere completate da piani dell'enneaedro (n.º 4), e sieno, ad es.,

$$a_1 a_4 a_7, \quad a_1 a_8 a_6, \quad a_4 a_8 a_3. \quad (M)$$

Il triedro $a_3 a_6 a_7$ deve essere di 1ª specie, perchè, se fosse di 3ª specie, i quattro piani a_4 , a_8 , a_6 , a_7 (ad es.) appartenerebbero ai due triedri di 3ª specie $a_1 a_4 a_7$, $a_1 a_6 a_8$ con un piano comune a_1 e anche ai due triedri di 3ª specie $a_3 a_4 a_8$, $a_3 a_6 a_7$, pure con un piano comune a_3 , ciò che non può essere (n.º 4). Ripetasi ora per il triedro di 1ª specie $a_3 a_6 a_7$ ciò che si fece per $a_1 a_4 a_8$: cioè si considerino i triedri di 3ª specie dati dalle coppie di piani $a_3 a_6$, $a_3 a_7$, $a_6 a_7$. Questi triedri, per l'esistenza dei due ultimi triedri (M), non possono essere completati dai piani a_1 , a_4 , a_8 e però debbono esserlo dai piani a_2 , a_5 , a_9 . Sieno tali triedri di 3ª specie

$$a_3 a_6 a_9, \quad a_3 a_7 a_5, \quad a_6 a_7 a_2. \quad (N)$$

Questi e i triedri (M) forniscono tre dei quattro triedri che hanno a comune rispettivamente a_3 , a_6 , a_7 : onde nasce (n.º 4) l'esistenza di questi altri triedri di 3ª specie

$$a_3 a_1 a_2, \quad a_6 a_5 a_4, \quad a_7 a_8 a_9 \quad (P)$$

e allora (n.º 4) anche dei seguenti

$$a_2 a_5 a_8, \quad a_2 a_9 a_4, \quad a_5 a_9 a_1. \quad (Q)$$

Gli ultimi mostrano che, facendo per il triedro di 1ª specie $a_2 a_5 a_9$ la costruzione fatta per $a_1 a_4 a_8$, $a_3 a_6 a_7$, si ritorna al triedro $a_1 a_4 a_8$. Abbiamo adunque questa proprietà (ponendo $a_1 = a$, $a_4 = b$, $a_8 = c$, $a_3 = a'$, $a_6 = b'$, $a_7 = c'$, $a_2 = a''$, $a_5 = b''$, $a_9 = c''$ (*):

(*) Onde il determinante (n.º 4)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}$$

che dà i 12 triedri (M), (N), (P), (Q), diventa

$$\begin{vmatrix} a & a'' & a' \\ b & b'' & b' \\ c' & c & c'' \end{vmatrix}.$$

Se abc è un triedro di 1^a specie e sono abc' , $ab'c$, $a'bc$, $a'b'c''$, $a'b''c'$, $a''b'c'$ di 3^a specie, i due triedri $a'b'c'$, $a''b''c''$ sono di 1^a specie e $a''b''c$, $a''b'c''$, $ab''c''$ di 3^a. Inoltre sono di 3^a specie i triedri $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$ (*).

Tali tre triedri di 1^a specie abc , $a'b'c'$, $a''b''c''$, uno qualunque dei quali dà origine al successivo colla costruzione dei triedri di 3^a specie dati dai suoi tre piani presi a due a due, si dirà che formano un *ciclo*.

I nove piani di un ciclo costituiscono un enneaedro di 1^a specie. Coi 2880 triedri di 1^a specie si formano 960 cicli. Ogni enneaedro di 1^a specie contiene 24 cicli.

Si ha qui un nuovo concetto degli enneaedri di 1^a specie che, insieme alla proprietà del n.º 13, potrebbe essere il punto di partenza di una trattazione degli enneaedri indipendente dalla considerazione delle terne T .

§ 7. Poliedri. Pentaedro principale.

21. Nelle cose che seguono si chiama *poliedro* il sistema di più piani tri-tangenti, due qualunque dei quali si segano in una retta esterna alla superficie; *ordine* di un poliedro il numero dei piani che lo formano (onde in un poliedro di ordine n giacciono $3n$ rette della superficie); e *poliedro principale* un poliedro che non è contenuto in poliedri d'ordine superiore all'ordine di esso.

Quali poliedri principali esistono, oltre gli enneaedri di 1^a e 2^a specie? Si osservi anzitutto che ogni poliedro contenente un triedro di 3^a specie è necessariamente contenuto in un enneaedro. Ciò segue immediatamente dall'ultima considerazione del n.º 6. Inoltre se un poliedro (di ordine $n > 3$) contiene un triedro di 3^a specie, contiene necessariamente anche triedri di 1^a specie; giacchè, se $abcd...$ è un poliedro ed abc è di 3^a specie, abd , bcd , acd , ... debbono essere di 1^a specie, d non contenendo alcuna delle nove rette di abc .

Adunque, per la risoluzione del suddetto problema, basterà considerare:

- A) I poliedri che contengono almeno un triedro di 2^a specie;
- B) I poliedri che contengono almeno un triedro di 1^a specie.

22. Prendiamo dapprima ad esaminare il caso A). Cioè abbiasi un poliedro contenente almeno un triedro di 2^a specie abc . Sia $a'b'c'$ il triedro di

(*) Questa proprietà vale e si dimostra identicamente per i nove flessi di una curva di 3^o ordine. Basta sostituire a piano, flesso; a triedro di 3^a specie, terna di flessi in linea retta; e a triedro di 1^a specie, terna di flessi non giacenti in linea retta (cfr. Nota al n.º 4).

3^a specie corrispondente ad abc (cioè, secondo il n.° 17, sieno abc' , $ab'c$, $a'b'c$ triedri di 3^a specie) ed α il piano conjugato ad abc , il qual piano è pure uno dei tre piani conjugati al triedro $a'b'c'$. Gli altri due piani conjugati a questo triedro dicansi d , e .

Ora cerchiamo i piani che non contengono rette di abc . Oltre a , b , c , sono da escludere il piano α e i sei piani (all'infuori di α) dei triedri conjugati ad abc' , $ab'c$, $a'b'c$. Poi per ciascuna delle due rette di a (e similmente di b e c), non esistenti su α , passano due nuovi piani, mentre per la retta $a\alpha$ passano tre nuovi piani. Sicchè restano

$$45 - 3 - 1 - 6 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 14$$

piani che non contengono rette di a , b , c . Ed è facile indicare questi 14 piani: sono i due piani d , e e i dodici piani che passano per le sei rette di d , e (oltre d , e , a' , b' , c' e i piani conjugati ai triedri abc' , $ab'c$, $a'b'c$) e che indicheremo con f , f' , g , g' , h , h' , m , m' , n , n' , p , p' .

Si facciano tre casi, cioè:

- 1.° Si aggiungano ad abc amendue i piani d , e ;
- 2.° Si aggiunga ad abc un solo dei piani d , e ;
- 3.° Non si aggiunga ad abc alcuno dei piani d , e .

23. Nel 1° caso si ha un pentaedro $abcde$, che è un poliedro principale, i dodici piani f , f' ... avendo rette comuni con d , e . I dieci triedri contenuti in questo pentaedro sono tutti di 2^a specie. Infatti abd (e parimenti abe , acd , ace , bcd , bce) è di 2^a specie, perchè abc' è di 3^a specie e d , essendo conjugato ad $a'b'c'$, passa per una retta di c' : e il triedro ade (e nello stesso modo bde , cde) è pure di 2^a specie, perchè il triedro αde , conjugato ad $a'b'c'$, è di 3^a specie ed a contiene una retta di α , piano conjugato ai triedri abc' , $ab'c$.

Viceversa: un poliedro principale $abcd...$, di cui ogni triedro è di 2^a specie, deve essere un pentaedro. Poichè, considerando un suo triedro (di 2^a specie) abc e ponendo le stesse denominazioni di dianzi, il piano conjugato al triedro di 2^a specie abd sarà pure conjugato al triedro di 3^a specie abc' e quindi d passerà per una retta di c' ; e analogamente d passerà per una retta b' e per una di a' : cioè il piano d sarà uno dei piani conjugati al triedro $a'b'c'$ (all'infuori di α): e però, ecc.

Il numero di questi pentaedri principali è $\frac{2160}{10} = 216$, ognuno essendo individuato da un triedro di 2^a specie e in ognuno essendo dieci tali triedri.

Dato un pentaedro principale, si hanno 15 rette, quelle giacenti nei cinque piani di esso e 15 piani, cioè questi cinque piani e i dieci conjugati ai dieci triedri del pentaedro. Ognuno dei 15 piani contiene tre delle 15 rette; onde per ciascuna delle 15 rette passano tre dei 15 piani: il che risulta anche dall'osservare che un piano del pentaedro appartiene a sei dei dieci triedri in esso contenuti. Adunque, per una nota proprietà (*), le 12 rette rimanenti costituiscono una bissestupla.

Reciprocamente: le 15 rette che si ottengono, togliendo dalle 27 rette le 12 di una bissestupla, esistono in sei pentaedri principali, cioè possono essere in sei modi considerate come intersezione della superficie e di cinque piani (**). I 15 piani contenenti le 15 rette sono i 5 piani di un pentaedro e i 10 piani conjugati ai dieci triedri di esso.

Sicchè i 216 pentaedri principali si distribuiscono in 36 gruppi corrispondenti alle 36 bissestuple.

24. Discende dalle cose precedenti che un tetraedro, i cui quattro triedri sono di 2^a specie, è contenuto in un pentaedro principale. Adunque il numero di quei tetraedri è $216 \cdot 5 = 1080$.

§ 8. Ettaedro principale.

25. Si esami ora il 2° caso (n.° 22): cioè (n.° 23) si consideri un poliedro il quale contenga un tetraedro appartenente ad un pentaedro principale, tale cioè che i suoi quattro triedri sieno di 2^a specie. Per agevolare la discussione adoperiamo la notazione di SCHLAEFLI. Il triedro formato dai piani

$$a \equiv c_{14} c_{26} c_{35},$$

$$b \equiv c_{15} c_{24} c_{36},$$

$$c \equiv c_{16} c_{23} c_{45},$$

è di 2^a specie e può concepirsi che sia uno qualsivoglia di 2^a specie, intendendo che i numeri 1, 2, ... 6 rappresentino sei simboli $i_1, i_2, \dots i_6$ e questi una permutazione qualunque dei numeri precedenti (con che si hanno i 60 triedri di 2^a specie contenuti nel sistema che nasce dall'escludere le 12 rette di una bissestupla) e inoltre che sia arbitraria la bissestupla di riferimento.

(*) Cfr. CREMONA, *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal* (Memorie della R. Accad. dei Lincei, Serie III, vol. 1^o), n.° 41 e s. g. l.

(**) CREMONA, l. c., n.° 11.

Si ottengono immediatamente i piani

$$\alpha \equiv c_{35} c_{24} c_{16},$$

$$\alpha' \equiv c_{46} c_{35} c_{12},$$

$$\beta' \equiv c_{56} c_{13} c_{24},$$

$$\gamma' \equiv c_{25} c_{34} c_{16},$$

e i quattordici piani che non contengono rette di abc ,

$$\begin{array}{l|ll} d \equiv c_{46} c_{13} c_{25} & f \equiv a_4 b_6 c_{46}, & f' \equiv a_6 b_4 c_{46}, \\ & g \equiv a_1 b_3 c_{13}, & g' \equiv a_3 b_1 c_{13}, \\ & h \equiv a_2 b_5 c_{25}, & h' \equiv a_5 b_2 c_{25}, \\ \\ e \equiv c_{12} c_{56} c_{34} & m \equiv a_4 b_2 c_{12}, & m' \equiv a_2 b_4 c_{12}, \\ & n \equiv a_5 b_6 c_{56}, & n' \equiv a_6 b_5 c_{56}, \\ & p \equiv a_3 b_4 c_{34}, & p' \equiv a_4 b_3 c_{34}. \end{array}$$

Si considerino adunque i poliedri a cui appartiene il tetraedro $abcd$ (ad es.). In tali poliedri non entra e (caso già considerato nel n.° 23), nè entrano f, f', g, g', h, h' , i quali piani hanno ciascuno comune una retta con d : e possono evidentemente figurarvi tre soli dei sei piani m, m', n, n', p, p' . Onde si hanno otto poliedri principali, che sono ettaedri. Questi otto ettaedri sono (*)

$$\begin{array}{ll} c \cdot abd \cdot nmp, & c \cdot abd \cdot n'm'p', \\ b \cdot acd \cdot pm'n, & b \cdot acd \cdot p'm'n', \\ a \cdot cbd \cdot n'pm, & a \cdot cbd \cdot np'm', \\ d \cdot abc \cdot mnp', & d \cdot abc \cdot m'n'p, \end{array}$$

e non sono essenzialmente diversi, giacchè dai quattro di sinistra si passa ai quattro di destra collo scambio delle a_i, b_i ; e si passa dal primo al secondo, terzo e quarto di sinistra, scambiando rispettivamente

$$\begin{array}{llll} 1, & 2; & 3, & 5; & 4, & 6: \\ 1, & 3; & 2, & 4; & 5, & 6: \\ 1, & 5; & 2, & 6; & 3, & 4. \end{array}$$

(*) La divisione di ciascun ettaedro in un piano e due terne è in relazione colla seguente proprietà (n.° 26), essendo corrispondenti nelle due terne due piani che vi occupano lo stesso posto.

26. Preso, ad es., l'ettedro

$$c \cdot abd \cdot nmp,$$

si trova che, dei 35 triedri che esso contiene, 17 sono di 2^a specie e 18 di 1^a. I 17 triedri di 2^a specie sono: i quattro triedri del tetraedro $cabd$, i quattro triedri del tetraedro $cnmp$, i triedri can , cbm , cdp , i triedri amp , bnp , dnm , mad , nbd , pab .

Si ha adunque (posto $z=c$, $x_1=a$, $y_1=n$, $x_2=b$, $y_2=m$, $x_3=d$, $y_3=p$) la seguente proprietà: — *I sette piani di un ettedro principale si distribuiscono (in un modo solo) in due terne $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$ e in un piano z . Le due terne sono due triedri di 2^a specie. Il piano z dà origine a triedri di 2^a specie con due piani qualunque di ciascuna terna e con ciascun piano x_i dell'una accompagnato ad un piano y_i , corrispondente, dell'altra. Altri triedri di 2^a specie sono dati da un piano di una terna coi due non corrispondenti dell'altra ($x_1y_2y_3$, $x_2y_1y_3$, ... $x_2x_3y_1$, ...). Si hanno così 17 ($= 2 + 2 \cdot 3 + 3 + 2 \cdot 3$) triedri di 2^a specie. I rimanenti 18 ($= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2$) triedri (zx_1y_2 , zx_1y_3 , ...: $x_1y_1y_2$, $x_1y_1y_3$, ... $y_1x_1x_3$, ...) sono di 1^a specie.*

Un ettedro principale può scindersi in due modi e in due soltanto ($zx_1x_2x_3 \cdot y_1y_2y_3$; $zy_1y_2y_3 \cdot x_1x_2x_3$) in un triedro di 2^a specie e in un tetraedro di cui i quattro triedri sono pure di 2^a specie. Laonde (n.° 25) *un ettedro principale corrisponde a 2 pentaedri principali ed ogni pentaedro principale a 40 ettedri principali*: un ettedro nascendo da un corrispondente pentaedro col sopprimerne una faccia e sostituirla con tre altre, che partano rispettivamente dalle tre rette della faccia medesima.

Ogni poliedro principale che contiene un tetraedro, di cui i quattro triedri sono di 2^a specie, è necessariamente un ettedro. Questa proprietà segue immediatamente dal n.° 25.

Un ettedro principale può scomporsi in tre modi e in tre soltanto ($x_1x_2y_1y_2 \cdot zx_3y_3$; $x_1x_3y_1y_3 \cdot zx_2y_2$; $x_2x_3y_2y_3 \cdot zx_1y_1$) in un triedro di 2^a specie e in un tetraedro di cui i quattro triedri sono di 1^a specie (*).

Siccome in ogni ettedro principale esistono due tetraedri, i cui quattro triedri sono di 2^a specie e ogni tale tetraedro dà origine (n.° 25) a otto ettedri principali, il numero totale di questi è (n.° 24) $\frac{8 \cdot 1080}{2} = 4320$.

27. Prendasi di nuovo l'ettedro del n.° 26

$$c \cdot abd \cdot nmp:$$

(*) Non viceversa ogni ettedro che contiene un cosifatto tetraedro è principale (cfr. n.° 32).

essendo

$$c \equiv c_{16} c_{23} c_{45},$$

$$a \equiv c_{14} c_{26} c_{35},$$

$$b \equiv c_{15} c_{24} c_{36},$$

$$d \equiv c_{16} c_{13} c_{25},$$

$$n \equiv a_5 b_6 c_6,$$

$$m \equiv a_1 b_2 c_{12},$$

$$p \equiv a_3 b_4 c_{34}.$$

Levando dalle 27 rette le 21 in esso contenute, le sei rette residue $a_2, a_4, a_6; b_1, b_3, b_5$ giacciono sopra un iperboloide, ossia formano *due terne complementari* [ergänzende Tripel (*)].

Reciprocamente, si abbiano le due terne complementari $a_2, a_4, a_6; b_1, b_3, b_5$ (che si possono ritenere affatto arbitrarie, ripetendo una considerazione fatta nel n.° 25). Le 21 rette rimanenti si distribuiscono (in un modo solo) in una bissestupla

$$\left. \begin{array}{l} a_1 a_3 a_5 c_{46} c_{62} c_{24} \\ c_{35} c_{51} c_{13} b_2 b_4 b_6 \end{array} \right\} \quad (B)$$

e in una coppia di triedri conjugati (di 3ª specie)

$$\left| \begin{array}{ccc} c_{16} & c_{23} & c_{45} \\ c_{34} & c_{56} & c_{12} \\ c_{25} & c_{14} & c_{36} \end{array} \right|. \quad (C)$$

Inoltre, esclusi i piani che contengono alcuna (una o due) delle sei rette $a_2, a_4, a_6, b_1, b_3, b_5$, rimangono 24 piani che si distribuiscono pure in due gruppi; di 6, che sono quelli della coppia (C), e di 18, che passano a due a due per le rette di questa coppia e a tre a tre per le rette della bissestupla (B). Un piano $c_{16} c_{23} c_{45}$, della coppia (C) è piano z (n.° 26) di due ettaedri principali, che sono completati dai 12 piani del secondo gruppo, che passano per le rette di (C) esterne al piano considerato; cioè dell'ettaedro suindicato $c \cdot a b d \cdot n m p$

(*) STURM, *Ueber die 27 Geraden der cubischen Fläche* (Math. Ann., tom. XXIII), pag. 290.

e dell'ettedro $\gamma \cdot \alpha \beta \delta \cdot \nu \mu \pi$, essendo

$$\gamma \equiv c_{16} c_{23} c_{45},$$

$$\alpha \equiv c_{12} c_{35} c_{46},$$

$$\beta \equiv c_{56} c_{13} c_{42},$$

$$\delta \equiv c_{34} c_{26} c_{15},$$

$$\nu \equiv a_3 b_6 c_{36},$$

$$\mu \equiv a_1 b_4 c_{14},$$

$$\pi \equiv a_5 b_2 c_{52}.$$

Adunque, escluse le sei rette di due terne complementari, nel sistema rimanente di 21 rette (e 24 piani) esistono 12 ettedri principali, cioè quelle 21 rette si possono pensare, in 12 modi diversi, come l'intersezione completa della superficie di 3° ordine e di 7 piani. I 12 ettedri si dividono in sei paia: due ettedri di un paio hanno lo stesso piano z : e i sei piani z sono quelli di una coppia di triedri coniugati (*). Inoltre è evidente che ciascuno dei 12 ettedri dà i 24 piani del sistema nei proprii 7 piani e nei 17 coniugati ai 17 triedri di 2ª specie in esso contenuti: la qual proprietà ha luogo altresì per gli enneaedri e per il pentaedro principale (n.º 18, 23).

Quindi i 4320 ettedri principali si distribuiscono in 360 gruppi corrispondenti alle 360 coppie di terne complementari.

28. Discutiamo infine il 3° caso (n.º 22), nel quale non si aggiunge ad abc alcuno dei piani d , e . Conservate le notazioni precedenti (n.º 25), supponiamo dapprima che si prendano tre dei piani m , m' , n , n' , p , p' . Otto casi sono possibili, cioè si hanno otto poliedri principali

$$\begin{array}{ll} abc m n p h, & abc m' n' p' h', \\ abc m' n p g, & abc m n' p' g', \\ abc m n' p f, & abc m' n p' f', \\ abc m n p' h f' g', & abc m' n' p h' f g. \end{array}$$

Dei quali i primi sei sono degli ettedri principali già considerati (n.º 26), perchè contengono rispettivamente i tetraedri $c n m p$, $c n' m' p'$, $b n m' p$, $b n' m p'$,

---

(*) Altre proprietà del sistema di 21 rette, qui considerato, per ciò che riguarda la configurazione delle rette e particolarmente gli *esagoni* e *doppi-esagoni* (*Sechseit*, *Doppel-sechseit*) che si possono formare colle rette stesse, trovansi nel § 3 del citato lavoro di STURM (Math. Ann., tom. XXIII).

$an'mp$, $an'm'p'$, in ognuno dei quali entrano quattro triedri di 2^a specie, come risulta dall'osservare gli otto ettaedri del n.° 25: e gli ultimi due poliedri sono enneaedri [di 2^a specie, perchè contengono triedri abc ,... di 2^a specie (cfr. n.° 18)].

Le stesse considerazioni valgono, prendendo tre dei sei piani f, f', g, g', h, h' .

Quindi rimangono a studiare i casi in cui si escludano due dei piani f, f', g, g', h, h' , aventi una retta comune (cioè f, f' , o g, g' , o h, h') e insieme due dei piani m, m', n, n', p, p' che abbiano pure una retta comune (cioè m, m' , o n, n' , o p, p').

Ma, per escludere i piani f, f' , occorre aggiungere una delle due coppie $np, n'p'$ e per conseguenza escludere i piani m, m' . Parimenti, escludendo g, g' , deve escludersi n, n' ed escludendo h, h' , deve escludersi p, p' . Però i tre casi che così si presentano non sono sostanzialmente differenti, dal primo caso nascendo il secondo e dal secondo il terzo col fare ordinatamente gli scambi

$$3, 4; \quad 1, 6; \quad 2, 5:$$

$$1, 2; \quad 3, 5; \quad 4, 6.$$

Onde basta considerare il primo caso, nel quale si hanno i due poliedri principali

$$abcghnp, \quad abcg'h'n'p'.$$

Ora, come si verifica facilmente, i quattro triedri di ciascuno dei tetraedri $abh'p, acgn, abh'p', acg'n'$ sono di 2^a specie e per conseguenza (n.° 25) i due suddetti poliedri sono degli ettaedri principali studiati precedentemente (n.° 26).

Si conclude che nel 3° caso (n.° 22) non si ha alcun nuovo poliedro principale.

§ 9. Poliedri che contengono almeno un triedro di 1^a specie.

29. E, come adesso mostreremo, non si ha alcun nuovo poliedro principale neppure nel caso B) del n.° 21: ossia i poliedri principali che contengono almeno un triedro di 1^a specie sono di quelli già considerati (cioè enneaedri o pentaedri principali o ettaedri principali).

Sia abc un triedro di 1^a specie e $a'b'c', a''b''c''$ gli altri due triedri di 1^a specie che con esso formano un cielo (n.° 20). Per costruire poliedri contenenti abc , dobbiamo escludere, oltre a, b, c , i nove piani dei triedri congiunti ai triedri

(di 3 specie) abc' , $ab'c$, $a'bc$ e i rimanenti piani che passano per le rette di a , b , c (due piani per ciascuna retta): cosicchè restano

$$45 - 3 - 9 - 3 \cdot 6 = 15$$

piani. Questi piani sono a' , b' , c' , a'' , b'' , c'' e i nove piani dei triedri conjugati ai triedri (di 3^a specie) $a'b'c''$, $b'c'a''$, $c'a'b''$, giacchè tali piani contengono le rette di a' , b' , c'' , b' ... e però non quelle di a , b , c . Indichiamo i detti nove piani con α , β , γ , α' , β' , γ' , α'' , β'' , γ'' , e precisamente

$$\begin{array}{lll} \text{con } \alpha\beta\gamma & \text{il triedro conjugato ad } a'b'c'', \\ \text{" } \alpha'\beta'\gamma' & \text{" } & \text{" } b'c'a'', \\ \text{" } \alpha''\beta''\gamma'' & \text{" } & \text{" } c'a'b''. \end{array}$$

Anzitutto si avverta che esistono i quattro enneaedri

$$abc a' b' c' a'' b'' c'', \quad (E_1)$$

$$abc' \alpha \beta \gamma a'' b'' c, \quad (E_2)$$

$$bca' \alpha' \beta' \gamma' b'' c'' a, \quad (E'_2)$$

$$cab' \alpha'' \beta'' \gamma'' c'' a'' b; \quad (E''_2)$$

il primo dei quali è di 1^a specie (n.º 20) e gli altri tre sono di 2^a specie (n.º 13).

Poi si osservi che le tre rette di a' appartengono ordinatamente ad α , β , γ e parimenti ad α'' , β'' , γ'' . Onde questi tre piani avranno con quei tre rispettivamente una retta comune. Potendosi scambiare i simboli α , β , γ e così α' , β' , γ' , come pure α'' , β'' , γ'' , si può fissare che le tre rette di a' sieno

$$\alpha\alpha'', \quad \beta\beta'', \quad \gamma\gamma'':$$

e similmente che le tre rette di c' sieno

$$\alpha'\alpha'', \quad \beta'\beta'', \quad \gamma'\gamma''.$$

Le tre rette di b' debbono essere ordinatamente di intersezione dei piani α , β , γ coi piani α' , β' , γ' . Ma non può α incontrare α' in una retta della superficie, poichè, per la notazione ora posta, α , α' hanno ciascuno con α'' una tale retta comune, e queste due rette, appartenendo ad a' , c' , sono distinte. Si può stabilire che α incontri β' in una retta della superficie; perchè, se incontrasse invece γ' , basterebbe, come è permesso, fare gli scambi β , γ ; β' , γ' ; β'' , γ'' . Ma allora il piano β , che non può avere retta della superficie a comune con β' , per la ragione di dianzi, nemmeno può averla con α' , giacchè, se ciò acca-

desse, i residui piani γ, γ' dovrebbero incontrarsi in una retta della superficie, ciò che, per la stessa ragione, non può essere. Dunque le tre rette di b' sono

$$\alpha\beta', \quad \beta\gamma', \quad \gamma\alpha'.$$

Raccogliendo, si hanno quindi le seguenti rette della superficie (essendo $a\alpha\alpha''$ retta comune ai piani a, α, α'' ; ecc.):

$$\left. \begin{array}{lll} a'\alpha\alpha'', & a'\beta\beta', & a'\gamma\gamma'', \\ c'\alpha'\alpha'', & c'\beta'\beta'', & c'\gamma'\gamma'', \\ b'\alpha\beta', & b'\beta\gamma', & b'\gamma\alpha', \\ c''\alpha, & c''\beta, & c''\gamma, \\ a''\alpha', & a''\beta', & a''\gamma', \\ b''\alpha'', & b''\beta'', & b''\gamma''. \end{array} \right\} \quad (H)$$

Distinguiamo i poliedri contenenti abc , cioè che si ottengono coll'aggiungere ad abc piani scelti fra i quindici $a', b', c', a'', b'', c'', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, in tre classi:

1.^a Classe. — Aggiungasi ad abc almeno due dei piani $a', b', c', a'', b'', c''$. Si hanno i seguenti quattro casi (poichè $abca'a'c'...$ si tratterebbe come $abca'b'...$; ecc.):

$$\begin{aligned} abca'b'... , \\ abca'a''... , \\ abca''b''... , \\ abca'b''... . \end{aligned}$$

Nel primo e secondo, esistendo le rette (H) , non si può aggiungere alcuno dei piani $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ e però si hanno poliedri contenuti nell'enneaedro (E_1) . Nel terzo caso sono disponibili $a', b', c', c'', \alpha, \beta, \gamma$: ma devonsi escludere a', b' che danno nuovamente il secondo caso ($abca'a''...$; $abcb'b''...$). Dei piani rimanenti se si aggiunge c' , non si aggiungerà c'' per non ricadere nello stesso secondo caso, ma si potranno aggiungere α, β, γ e si otterrà un poliedro contenuto nell'enneaedro (E_2) . Che se escludasi c' , potrà aggiungersi c'' e allora non α, β, γ ; ovvero potranno aggiungersi α, β, γ e allora non c'' : cioè si otterrà un poliedro contenuto in (E_1) o (E_2) . Finalmente nel quarto caso ponno aggiungersi $b', c', a'', c'', \alpha', \beta', \gamma'$: ma devono escludersi b', c', a', c'' ,

perchè si ritorna al primo, secondo e terzo caso già esaminati; e, aggiungendo α', β', γ' , si ottiene un poliedro contenuto in (E'_2) .

2.^a Classe. — Aggiungasi ad abc uno solo dei piani $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$. Si hanno due casi essenzialmente distinti:

$$abca' \dots, \\ abca'' \dots;$$

ove s'intende che i piani da aggiungere sono dei nove $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$. Ma, per le (H) , nel primo caso ponno aggiungersi soltanto α', β', γ' e nel secondo soltanto $\alpha, \beta, \gamma, \alpha'', \beta'', \gamma''$: e si ottengono poliedri già discussi (n.° 22), perchè contenenti triedri di 2.^a specie. Cioè sono di 2.^a specie (nel primo caso),

$$\begin{array}{lll} aa'\alpha', & aa'\beta', & aa'\gamma', \\ ab\alpha', & ab\beta', & ab\gamma', \\ ac\alpha', & ac\beta', & ac\gamma', \end{array}$$

e (nel secondo caso),

$$\begin{array}{lll} aa''\alpha, & aa''\beta, & aa''\gamma, \\ aa''\alpha'', & aa''\beta'', & aa''\gamma'', \\ ac\alpha, & ac\beta, & ac\gamma, \\ bc\alpha, & bc\beta, & bc\gamma, \\ ab\alpha'', & ab\beta'', & ab\gamma'', \\ bc\alpha'', & bc\beta'', & bc\gamma''. \end{array}$$

I precedenti triedri provengono infatti dagli enneaedri di 2.^a specie (E_2) , (E'_2) , (E''_2) prendendo in ogni enneaedro tre piani appartenenti rispettivamente ai tre triedri di 3.^a specie di esso (n.° 18).

3.^a Classe. — Aggiungasi ad abc nessuno dei piani $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ e però soltanto dei piani $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$. Per l'esistenza dei triedri di 2.^a specie ora indicati, anche qui si hanno poliedri già studiati.

30. Si ha adunque il teorema:

I poliedri principali sono l'enneaedro di 1.^a specie, l'enneaedro di 2.^a specie, l'ettaedro e il pentaedro (principali) considerati nei §§ 7, 8. Cioè: qualunque poliedro che si può formare coi 45 piani tritangenti è uno dei quattro precedenti o è contenuto in essi.

§ 10. Tetraedri.

31. Ci proponiamo ora, coll'ajuto del precedente teorema, di procedere alla determinazione di tutti i possibili poliedri. A tal fine introdurremo la notazione $(t_1, t_2, t_3)^n$ per indicare un poliedro di ordine n , i cui triedri sono t_1 di 1ª specie, t_2 di 2ª e t_3 di 3ª (cfr. n.º 40): onde sarà

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

E, cominciando dai tetraedri, consideriamo dapprima quelli nascenti da un enneaedro di 1ª specie

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9, \quad (E_1)$$

di cui i triedri di 3ª specie sieno dati dal determinante (n.º 4)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} \quad (*) \quad (D)$$

Si hanno due specie essenzialmente distinte, $(4, 0, 0)^4$, $(3, 0, 1)^4$. Poichè se si prenda un triedro di 1ª specie $a_1 a_4 a_8$ e si considerino i due altri triedri di 1ª specie $a_3 a_6 a_7$, $a_2 a_5 a_9$ che con quello formano un ciclo, è evidente (n.º 20) che i tre tetraedri $a_1 a_4 a_8 a_2$, $a_1 a_4 a_8 a_5$, $a_1 a_4 a_8 a_9$ contengono ciascuno quattro triedri di 1ª specie e sono i soli esistenti nell'enneaedro e aventi a comune il triedro $a_1 a_4 a_8$, i quali godono di tale proprietà. Dall'enneaedro nascono quindi (n.º 18) $54 = \frac{72 \cdot 3}{4}$ tetraedri $(4, 0, 0)^4$ e però, non potendo due enneaedri di 1ª specie avere a comune un tetraedro (cfr. n.º 14), il numero totale di quei tetraedri è $2160 = 54 \cdot 40$. Che se un tetraedro $a_1 a_2 a_3 a_i$, proveniente dall'enneaedro, contiene un triedro di 3ª specie $a_1 a_2 a_3$, gli altri tre triedri sono di 1ª specie (n.º 18), cioè si ha un tetraedro $(3, 0, 1)^4$. Di questi, in ogni enne-

(*) A questo determinante, per la determinazione dei sunnominati triedri, si possono sostituire altri cinque, per es.,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_5 & a_6 & a_4 \\ a_9 & a_7 & a_8 \end{vmatrix};$$

ecc.

aedro, esistono $72 = 12 \cdot 6$ e però il loro numero totale è $2880 = 72 \cdot 40$: il che segue altresì dal notare che un triedro di 3^a specie è comune a due enneaedri di 1^a specie (n.° 7) e quindi entra in 12 tetraedri $(3, 0, 1)^4$.

Sia ora

$$b_1 b_2 b_3 \cdot b_4 b_5 b_6 \cdot b_7 b_8 b_9 \quad (E_2)$$

un enneaedro di 2^a specie, le tre terne in cui è diviso essendo i suoi tre triedri di 3^a specie. Si hanno tre specie di tetraedri dei tipi

$$b_1 b_2 b_3 b_4,$$

$$b_1 b_2 b_4 b_5,$$

$$b_1 b_2 b_4 b_7.$$

Il primo e il secondo (n.° 18) sono rispettivamente tetraedri $(3, 0, 1)^4$, $(4, 0, 0)^4$. Il terzo è un tetraedro $(2, 2, 0)$. Il numero di questi ultimi contenuti nell'enneaedro è manifestamente $81 = 3 \cdot 9 \cdot 3$ e per conseguenza il loro numero totale è $12960 = 81 \cdot 160$; poichè due enneaedri di 2^a specie possono avere soltanto a comune un tetraedro $(4, 0, 0)^4$ (cfr. Nota al n.° 15).

Infine dall'ettaedro principale (n.° 26)

$$z \cdot x_1 x_2 x_3 \cdot y_1 y_2 y_3, \quad (P)$$

si hanno tetraedri di questi tipi

$$z x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_3 y_1,$$

$$z x_1 x_2 y_1, \quad x_1 x_2 y_1 y_3,$$

$$z x_1 x_2 y_3, \quad x_1 x_2 y_1 y_2;$$

dei quali il primo a sinistra è un tetraedro $(0, 4, 0)^4$, di quelli (i soli) pure contenuti in un pentaedro principale e dei quali già trovammo il numero totale (n.° 24); l'ultimo a destra è un tetraedro $(4, 0, 0)^4$ e i rimanenti sono tetraedri $(2, 2, 0)^4$.

Che i tetraedri $(4, 0, 0)^4$ contenuti nell'enneaedro di 1^a specie siano di quelli esistenti in un enneaedro di 2^a specie e in un ettaedro principale e che la stessa cosa si verifichi per i tetraedri $(3, 0, 1)^4$ che si trovano nelle due specie di enneaedri e per i tetraedri $(2, 2, 0)^4$ che stanno nell'enneaedro di 2^a specie e nell'ettaedro principale, risulta dal teorema seguente.

32. *Un tetraedro di cui i quattro triedri sono di 1^a specie, ovvero tre di 1^a specie e uno di 3^a, giace in un enneaedro di 1^a specie e in uno di 2^a specie. Un tetraedro di cui due triedri sono di 1^a specie e due di 2^a, giace in un en-*

neaedro di 2ª specie. Giacchè, se abc è un triedro di 1ª specie e si riprendono le considerazioni e le notazioni del § 9, si possono aggiungere ad abc , quindici soli piani $a', b', c', a'', b'', c'', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$; onde si ottengono 15 tetraedri a cui appartiene abc . Dei quali, i tetraedri

$$abca'', \quad abcb'', \quad abcc'',$$

contenenti ciascuno quattro triedri di 1ª specie (n.º 18), esistono nell'enneaedro di 1ª specie (E_1) e rispettivamente negli enneaedri di 2ª specie (E_2), (E'_2), (E''_2): i tetraedri

$$abcc', \quad abca', \quad abcb',$$

aventi ognuno tre triedri di 1ª specie e uno di 3ª, stanno pure in (E_1) e ordinatamente in (E_2), (E'_2), (E''_2): e infine i tetraedri

$$\begin{aligned} abc\alpha, & \quad abc\beta, & \quad abc\gamma, \\ abc\alpha', & \quad abc\beta', & \quad abc\gamma', \\ abc\alpha'', & \quad abc\beta'', & \quad abc\gamma'', \end{aligned}$$

cadauno con due triedri di 1ª specie e due di 2ª, giacciono rispettivamente nei detti enneaedri (E_2), (E'_2), (E''_2): c. d. d.

§ 11. Pentaedri.

33. Per ottenere i poliedri di ordine $n > 4$ contenuti in un enneaedro di 1ª specie, è utile osservare che *esisterà in essi almeno un triedro di 3ª specie.* Poichè, considerando uno dei cicli di triedri di 3ª specie $a_1a_4a_8, a_3a_6a_7, a_2a_5a_9$ contenuti nell'enneaedro (n.º 20), se non si aggiunge ad $a_1a_4a_8$ alcuno dei piani a_3, a_6, a_7 , dovranno aggiungersi almeno due dei piani a_2, a_5, a_9 , e però ecc.

Quindi, mantenendo per un enneaedro di 1ª specie le notazioni (E_1), (D) del § 10, si hanno i due tipi di pentaedri

$$a_1a_2a_3a_4a_7$$

$$a_1a_2a_3a_4a_5$$

(secondochè il quinto piano a_7 dà col quarto a_4 un triedro di 3ª specie completato dai piani a_1, a_2, a_3 , oppur no), che sono rispettivamente $(8, 0, 2)^5$, $(9, 0, 1)^5$. Il numero dei primi è $2160 = (6 \cdot 9) \cdot 40$ e quello dei secondi è $2880 = (6 \cdot 12) \cdot 40$.

Da un enneaedro di 2^a specie (E_2) (§ 10), si ottengono questi tipi

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5,$$

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_7,$$

$$b_1 b_2 b_4 b_5 b_7;$$

il primo dei quali è $(9, 0, 1)^5$ ed è di quelli trovati dianzi, giacchè nasce anche dall'enneaedro di 1^a specie, che (n.° 13) proviene da (E_2) col sostituire a $b_7 b_8 b_9$ il triedro conjugato. Il secondo e il terzo sono $(6, 3, 1)^5$, $(6, 4, 0)^5$. Si hanno $4320 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 160$ poliedri $(6, 3, 1)^5$ e $12960 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 160$ poliedri $(6, 4, 0)^5$.

Da un ettaedro (P) derivano i tipi

$$z x_1 x_2 x_3 y_1,$$

$$z x_1 x_2 y_1 y_2,$$

$$z x_1 x_2 y_1 y_3,$$

$$x_1 x_2 x_3 y_1 y_2.$$

Il secondo e il quarto sono pentaedri $(6, 4, 0)^5$. Il primo è un pentaedro $(4, 6, 0)^5$ e il terzo $(5, 5, 0)^5$.

In un pentaedro $(4, 6, 0)^5$ c'è (n.° 26) un tetraedro (e uno solo) $z x_1 x_2 x_3$, di cui ogni triedro è di 2^a specie. E da un cosifatto tetraedro nascono sei pentaedri di quella specie [cfr. n.° 25 (*)]. Adunque (n.° 24) il numero dei pentaedri $(4, 6, 0)^5$ è $6480 = 1080 \cdot 6$. Donde risulta che *da un tetraedro* $(2, 2, 0)^4$ *si ricavano due (e due soli) pentaedri* $(4, 6, 0)^5$, giacchè in un tal pentaedro, esistono quattro di quei tetraedri ($z x_1 x_2 y_1$, $z x_1 x_3 y_1$, $z x_2 x_3 y_1$, $x_1 x_2 x_3 y_1$) e si ha appunto (n.° 31) $\frac{12960 \cdot 2}{4} = 6480$. Determineremo fra poco (n.° 35) il numero dei pentaedri $(5, 5, 0)^5$. Intanto qui osserviamo che *i cinque tetraedri contenuti in un tale pentaedro sono tutti* $(2, 2, 0)^4$.

I pentaedri $(6, 4, 0)^5$ provenienti dall'ettaedro principale sono di quelli che provengono dall'enneaedro di 2^a specie, in virtù del teorema seguente.

(*) Prese le indicazioni di questo numero, i sei pentaedri sono

$$\begin{array}{lll} a b c d n, & a b c d m, & a b c d p, \\ a b c d n', & a b c d m', & a b c d p'. \end{array}$$

34. Un pentaedro, i cui 10 triedri sono 6 di 1ª specie e 4 di 2ª specie, esiste in un enneaedro di 2ª specie.

In vero i pentaedri, colla detta proprietà, contengono per il numero precedente, un tetraedro i cui quattro triedri sono di 1ª specie (cioè $b_1b_2b_4b_5b_7$, il tetraedro $b_1b_2b_4b_5$ e $zx_1x_2y_1y_2$, $x_1x_2x_3y_1y_2$, il tetraedro $x_1x_2y_1y_2$). Ora, ripigliando le notazioni del § 9, i soli tetraedri a cui dà origine un triedro di 1ª specie abc , aventi gli altri tre triedri pure di 1ª specie, sono (n.º 32)

$$abca'', \quad abcb'', \quad abcc''.$$

Ma, esistendo l'enneaedro (E_1), non si hanno (cfr. n.º 33) pentaedri della specie voluta coll'aggiungere a' , b' , c' : mentre aggiungendo gli altri piani α , β , γ , α' , β' , γ' , α'' , β'' , γ'' , si ottengono, tenendo presenti le rette (H), i soli pentaedri

$$\begin{array}{lll} abca''\alpha, & abcb''\alpha, & abcc''\alpha', \\ abca''\beta, & abcb''\beta, & abcc''\beta', \\ abca''\gamma, & abcb''\gamma, & abcc''\gamma', \\ abca''\alpha'', & abcb''\alpha', & abcc''\alpha'', \\ abca''\beta'', & abcb''\beta', & abcc''\beta'', \\ abca''\gamma'', & abcb''\gamma', & abcc''\gamma'': \end{array}$$

i quali sono contenuti negli enneaedri di 2ª specie (E_2), (E'_2), (E''_2): c. d. d.

35. E, continuando nelle stesse notazioni, si osservi che un tetraedro $(2, 2, 0)^4$, ad es. il tetraedro (n.º 32) $abc\alpha$, appartiene a nove (soli) pentaedri

$$\begin{array}{lllll} abca\beta, & abca\gamma, & abca\alpha', & abca\alpha'', & abca\alpha'', \\ abca\alpha', & abca\gamma', & abca\beta'', & abca\gamma'': \end{array}$$

come è chiaro, osservando le rette (H). Di questi i primi cinque sono contenuti nell'enneaedro (E_2); mentre i quattro rimanenti non sono contenuti in alcun enneaedro. In vero il tetraedro $abc\alpha$ appartiene al solo enneaedro di 2ª specie (E_2) (Nota al n.º 15) e il triedro abc al solo enneaedro di 1ª specie (E_1) (n.º 19): nei quali due enneaedri non esistono i detti quattro pentaedri. Se ne trae (n.º 33, 34) che questi quattro pentaedri sono quelli contenuti soltanto nell'ettedro principale, cioè $(4, 6, 0)^5$, $(5, 5, 0)^5$ e precisamente due dei primi (n.º 33) e quindi due dei secondi. Adunque, ogni tetraedro $(2, 2, 0)^4$ è co-

mune a due pentaedri $(5, 5, 0)^5$ e però, in un tal pentaedro esistendo (n.° 33) cinque tetraedri $(2, 2, 0)^4$, il numero dei pentaedri $(5, 5, 0)^5$ è (n.° 31)
 $5184 = \frac{12960 \cdot 2}{5}.$

§ 12. Esaedri.

36. Dall'enneaedro di 1^a specie (E_1) (§ 10) si hanno i due tipi di poliedri (cfr. n.° 33):

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6,$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_7:$$

il primo dei quali è $(18, 0, 2)^6$ e l'altro $(17, 0, 3)^6$. Ogni triedro di 3^a specie di (E_1) entra in 2 di quelli e 18 di questi; e però in (E_1) esistono $12 = \frac{12 \cdot 2}{2}$ dei primi e $72 = \frac{12 \cdot 18}{3}$ dei secondi. Per conseguenza il numero degli esaedri $(18, 0, 2)^6$ è $480 = 12 \cdot 40$ e quello degli esaedri $(17, 0, 3)^6$ è $2880 = 72 \cdot 40$.

Dall'enneaedro di 2^a specie (E_2) (§ 10) nascono i tre tipi

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6,$$

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_7,$$

$$b_1 b_2 b_4 b_5 b_7 b_8,$$

che sono ordinatamente $(18, 0, 2)^6$, $(13, 6, 1)^6$, $(12, 8, 0)^6$. Che i pentaedri $(18, 0, 2)^6$ che qui si ottengono, sieno di quelli che esistono in un enneaedro di 1^a specie, segue subito dall'osservare che l'esaedro $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$ esiste nell'enneaedro di 1^a specie dedotto da (E_2) col sostituire al triedro (di 3^a specie) $b_7 b_8 b_9$ il suo conjugato (n.° 13). Il numero degli esaedri $(12, 8, 0)^6$ è $4320 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 160$: e quello degli esaedri $(13, 6, 1)^6$ è $8640 = (2 \cdot 3 \cdot 9) \cdot 160$.

Dall'ettaedro principale (P) (§ 10) si hanno i tipi

$$z x_1 x_2 x_3 y_1 y_2,$$

$$x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3:$$

il primo è $(10, 10, 0)^6$ e il secondo $(12, 8, 0)^6$. Il poliedro $(10, 10, 0)^6$, contiene un (solo) tetraedro $z x_1 x_2 x_3$, di cui i quattro triedri sono di 2^a specie (n.° 26): ma da un tetraedro di tal sorta provengono 12 di quei poliedri, come

si ricava dalle cose del n.° 25 (*): quindi il numero degli esaedri $(10, 10, 0)^e$ è (n.° 24) $12960 = 1080 \cdot 12$. Questo essendo pure (n.° 33) il numero dei pentaedri $(6, 4, 0)^5$ ed esistendo in un esaedro $(10, 10, 0)^e$ due di tali pentaedri $(zx_1x_2y_1y_2, x_1x_2x_3y_1y_2)$, si ha che *un pentaedro $(6, 4, 0)^5$ appartiene a due esaedri $(10, 10, 0)^e$* .

Il pentaedro $(12, 8, 0)^e$ che proviene da un ettaedro principale è di quelli che si trovano in un enneaedro di 2ª specie, per la seguente proprietà.

37. *Un esaedro di cui i 20 triedri sono 12 di 1ª specie e 8 di 2ª esiste in un enneaedro di 2ª specie.*

In vero ciascun esaedro avente la detta proprietà contiene sei pentaedri $(6, 4, 0)^5$: cioè (n.° 36) $b_1b_2b_4b_5b_7b_8$ i pentaedri $b_1b_2b_4b_5b_7, b_1b_2b_4b_5b_8, \dots$ e $x_1x_2x_3y_1y_2y_3$ i pentaedri $x_1x_2x_3y_1y_2, x_1x_2x_3y_1y_3, \dots$

Ora da un pentaedro $(6, 4, 0)^5$, ad es. dal pentaedro $abca''\alpha$ (n.° 34), ritornando nuovamente alle indicazioni del § 9 e ricordando le rette (H), nascono sei (soli) esaedri

$$\begin{aligned} abca''\alpha b'', & \quad abca''\alpha c', \\ abca''\alpha \beta, & \quad abca''\alpha \gamma, \\ abca''\alpha \beta'', & \quad abca''\alpha \gamma''. \end{aligned}$$

Di questi i primi quattro sono contenuti nell'enneaedro di 2ª specie (E_2) (§ 9) e sono i due primi $(13, 6, 1)^e$ e i due secondi ciascuno con 12 triedri di 1ª specie e 8 di 2ª. I due rimanenti $abca''\alpha \beta'', abca''\alpha \gamma''$ debbono essere $(10, 10, 0)^e$; il che risulta, o dall'osservare che non sono contenuti in alcun enneaedro (cfr. n.° 35), o da una proprietà dell'esaedro $(10, 10, 0)^e$ avvertita alla fine del n.° 36. Adunque dei sei esaedri suddetti soltanto $abca''\alpha \beta, abca''\alpha \gamma$ contengono 12 triedri di 1ª specie e 8 di 2ª ed esistono in (E_2) (§ 9): c. d. d.

(*) Dal tetraedro $cabd$ nascono i 12 esaedri

$$\begin{aligned} cabdmn, & \quad cabdm p, & cabdn p, & cabdm'n, & cabdm p', & cabdn p', \\ cabdm'n', & cabdm'p', & cabdn'p', & cabdm n', & cabdm'p, & cabdn'p. \end{aligned}$$

E qui si avverta che un esaedro $cabdmn$ entra in 2 ettaedri

$$c.abd.nmp, \quad d.abc.nmp'$$

e in ciascuno figura collo stesso tipo. Invece il pentaedro $cabmn$, che fa parte dell'esaedro $cabdmn$, entra negli stessi due ettaedri, ma vi figura con tipo diverso. Ciò spiega l'apparente contraddizione dell'essere, nello specchio del § 14, $j=1$ per il pentaedro $(6, 4, 0)^5$ nel tipo $zx_1x_2y_1y_2$ e $j=2$ per l'esaedro $zx_1x_2x_3y_1y_2$.

§ 13. Ettaedri. Ottaedri.

38. È facile vedere che un enneaedro di 1^a specie (E_1) (§ 10) dà origine al solo tipo di ettaedri

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$$

(contenente due triedri di 3^a specie $a_1 a_2 a_3$, $a_4 a_5 a_6$ che non hanno alcun piano comune), e che in un enneaedro di 2^a specie (E_2) (§ 10) esistono i due tipi

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7,$$

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_7 b_8.$$

Questi tre ettaedri sono ordinatamente $(30, 0, 5)^7$, $(24, 9, 2)^7$, $(22, 12, 1)^7$: ed è

$$1440 = (3 \cdot 12) \cdot 40 \quad \text{il numero degli ettaedri } (30, 0, 5)^7,$$

$$1440 = 9 \cdot 160 \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad (24, 9, 2)^7,$$

$$4320 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 160 \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad (22, 12, 1)^7.$$

39. Infine dagli stessi due enneaedri menzionati nel numero precedente provengono ottaedri dei due tipi

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8,$$

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8;$$

che sono $(48, 0, 8)^8$, $(36, 18, 2)^8$. Il numero dei primi è $360 = 9 \cdot 40$ e quello dei secondi $1440 = 9 \cdot 160$.

§ 14. Specchio riassuntivo dei poliedri.

40. Dai §§ 10, 11, 12, 13 (in particolare dai teoremi dei n.º 32, 34, 37) discende la notevole proprietà: — *Un poliedro è pienamente definito dai numeri n , t_1 , t_2 , t_3 (n.º 31) (*)* —. Cioè: *la specie di un poliedro è data dalla conoscenza dell'ordine, del numero dei triedri di 1^a specie, del numero di quelli di 2^a e del numero di quelli di 3^a*. In altre parole: *i poliedri, pei quali quei quattro numeri sono gli stessi, godono delle medesime proprietà*.

41. Chiudiamo questo lavoro col riassumere nello specchio seguente i risultati precedentemente ottenuti sui poliedri. Tutti i possibili poliedri si distri-

---

(*) Tre qualunque dei quali, per la relazione $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, determinano il quarto.

buiscono in 27 specie [prescindendo dai sistemi di due piani (coppie o diedri), che formano una specie sola] e sono 3 di triedri, 4 di tetraedri, 7 di pentaedri, 5 di esaedri, 4 di ettaedri, 2 di ottaedri e 2 di enneaedri.

Nello specchio si trova anche l'indicazione dei tipi. Ma tale indicazione non ha valore in senso assoluto, i varî tipi di una stessa specie essendo poliedri identici (n.° 40). I tipi di un poliedro sono gli aspetti o i modi, ne' quali esso entra nei differenti poliedri principali e in uno stesso poliedro principale. E, per l'indicazione dei tipi, s'intendono rappresentati l'enneaedro di 1^a specie dalle notazioni (E_1), (D), quello di 2^a specie da (E_2), l'ettaedro principale da (P) (§ 10) e il pentaedro principale dalla notazione

$$c_1 c_2 c_3 c_4 c_5.$$

Ad es., il pentaedro (6, 4, 0)⁵ entra sotto l'aspetto o tipo $b_1 b_2 b_4 b_5 b_7$ nell'enneaedro di 2^a specie e nei due aspetti o tipi diversi $z x_1 x_2 y_1 y_2$, $x_1 x_2 x_3 y_1 y_2$ nell'ettaedro principale.

Di fronte ad ogni tipo sono posti due numeri; uno i dà il numero dei poliedri in quel tipo che esistono nel poliedro principale a cui il tipo stesso si riferisce, l'altro j il numero di tali poliedri principali ai quali appartiene un poliedro in quel tipo.

Così, tenendo l'esempio precedente, cioè considerando pentaedri (6, 4, 0)⁵, si ha che ne esistono 81 del tipo $b_1 b_2 b_4 b_5 b_7$ nell'enneaedro di 2^a specie e 1 di quel tipo entra in un solo tale enneaedro: che ne esistono 3 del tipo $z x_1 x_2 y_1 y_2$ in un ettaedro principale e nuovamente 1 dello stesso tipo entra in un solo tale ettaedro: e infine che ne esistono 6 del tipo $x_1 x_2 x_3 y_1 y_2$ in un ettaedro principale e 1 fa parte di due tali ettaedri.

Il numero i si trova facilmente. Il numero j si calcola, osservando che, se N è il numero dei poliedri di una specie, il numero $j \frac{N}{i}$ deve essere eguale a 40 (numero degli enneaedri di 1^a specie) se il tipo di quei poliedri, che si considera, appartiene all'enneaedro di 1^a specie; ovvero a 160, o a 4320, o a 216, se il detto tipo appartiene invece all'enneaedro di 2^a specie o all'ettaedro principale o al pentaedro principale.

La somma dei numeri i e la somma dei numeri j di tutti i tipi di un poliedro di una data specie che entrano in un poliedro principale, sono rispettivamente il numero totale dei poliedri di quella specie che entrano nel poliedro principale considerato e il numero totale di tali poliedri principali ai quali appartiene un poliedro della stessa specie.

Ad es., (640)⁵ entra 9 (= 3 + 6) volte in un ettaedro principale e appartiene a 3 (= 1 + 2) ettaedri principali.

PO- LIEDRI	SPECIE	NU- MERO	TIPO (rispetto ai poliedri principali)	<i>i</i>	<i>j</i>	PO- LIEDRI	SPECIE	NU- MERO	TIPO (rispetto ai poliedri principali)	<i>i</i>	<i>j</i>				
Triedri	(1, 0, 0) ³	2880	$\left\{ \begin{array}{l} a_1 a_2 a_4 \\ b_1 b_2 b_4 \\ x_1 x_2 y_1 \\ z x_1 y_2 \end{array} \right.$	72	1	Pentaedri	(9, 0, 1) ⁵	2880	$\left\{ \begin{array}{l} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \end{array} \right.$	72	1				
				54	3		(8, 0, 2) ⁵	2160		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_7$	18	1			
				12	18		(6, 3, 1) ⁵	4320		$b_1 b_2 b_3 b_4 b_7$	54	1			
				6	9		(6, 4, 0) ⁵	12960		$b_1 b_2 b_3 b_4 b_7$	27	1			
				$\left\{ \begin{array}{l} b_1 b_4 b_7 \\ x_1 x_2 x_3 \end{array} \right.$	27					2	$\left\{ \begin{array}{l} b_1 b_2 b_4 b_5 b_7 \\ z x_1 x_2 y_1 y_2 \end{array} \right.$	81	1		
				$x_1 x_2 x_3$	2					4	$z x_1 x_2 y_1 y_2$	3	1		
	(0, 1, 0) ³	2160	$\left\{ \begin{array}{l} z x_1 x_2 \\ z x_1 y_1 \\ x_1 y_2 y_3 \end{array} \right.$	6	12		(5, 5, 0) ⁵	5184	$z x_1 x_2 y_1 y_3$	6	2				
				3	6		(4, 6, 0) ⁵	6480	$z x_1 x_2 x_3 y_1$	6	5				
				6	12		(0, 10, 0) ⁵	216	$c_1 c_2 c_3 c_4 c_5$	6	4				
				$c_1 c_2 c_3$	10		1	Ensaedri	(18, 0, 2) ⁶	480	$\left\{ \begin{array}{l} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \end{array} \right.$	12	1		
				$\left\{ \begin{array}{l} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{array} \right.$	12		2								
					3		2								
Tetraedri	(4, 0, 0) ⁴	2160	$\left\{ \begin{array}{l} a_1 a_2 a_4 a_5 \\ b_1 b_2 b_4 b_5 \\ x_1 x_2 y_1 y_2 \end{array} \right.$	54	1	(17, 0, 3) ⁶	2880	$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_7$	72	1					
				27	2				(13, 6, 1) ⁶	8640	$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_7$	54	1		
				3	6				(12, 8, 0) ⁶	4320	$\left\{ \begin{array}{l} b_1 b_2 b_4 b_5 b_7 b_8 \\ x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3 \end{array} \right.$	27	1		
	(3, 0, 1) ⁴	2880	$\left\{ \begin{array}{l} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \\ b_1 b_2 b_4 b_7 \end{array} \right.$	72	1	(10, 10, 0) ⁶	12960	$z x_1 x_2 x_3 y_1 y_2$	1	1					
				18	1				$z x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3$	6	2				
				$\left\{ \begin{array}{l} b_1 b_2 b_4 b_7 \\ z x_1 x_2 y_1 \end{array} \right.$	81				1	Ennaedri	(30, 0, 5) ⁷	1440	$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$	36	1
	$z x_1 x_2 y_1$	12	4	(24, 9, 2) ⁷	1440	$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7$	9	1							
	$\left\{ \begin{array}{l} z x_1 x_2 y_3 \\ x_1 x_2 x_3 y_1 \end{array} \right.$	6	2	(22, 12, 1) ⁷	4320	$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_7 b_8$	27	1							
	(2, 2, 0) ⁴	12960	$\left\{ \begin{array}{l} z x_1 x_2 y_3 \\ x_1 x_2 x_3 y_1 \\ x_1 x_2 y_1 y_3 \end{array} \right.$	6	2	(18, 17, 0) ⁷	4320	$z x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3$	—	—					
				$x_1 x_2 x_3 y_1$	6				2	Ottaedri	(48, 0, 8) ⁸	360	$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$	9	1
				$x_1 x_2 y_1 y_3$	6				2					(36, 18, 2) ⁸	1440
	(0, 4, 0) ⁴	1080	$\left\{ \begin{array}{l} z x_1 x_2 x_3 \\ c_1 c_2 c_3 c_4 \end{array} \right.$	2	8	Enneaedri	(72, 0, 12) ⁹	40	$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$					—	—
$c_1 c_2 c_3 c_4$				5	1					(54, 27, 3) ⁹	160	$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9$	—	—	

Pavia, 1884.

FINE DEL TOMO XII.^o (SERIE II.^a)