XIII. Ueber die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und der Länge einer Lichtwelle; von John Tovey.

(*Phil. Magazine, Ser. III Vol. VIII p. 7.*)

Professor Powell hat neuerlich in dem *Philosoph. Magazine* einen Abriss von Hrn. Cauchy's Undulationstheorie gegeben, in welchem er unter andern sagt: es scheine, als sey durch Cauchy's Untersuchungen eine Relation zwischen der Geschwindigkeit und der Länge einer Welle festgestellt, sobald die Molecüle so gelagert seyen, daß ihre gegenseitigen Abstände ein merkliches Verhältniß zur Wellenlänge haben. Seitdem ich dieses gelesen bin ich zu demselben Resultat gelangt, durch eine weniger complicirte Methode, welche ich hier vorlegen will. Ich thue dies mit einigem Mißtrauen, da ich außer dem eben erwähnten Abriss und Hrn. Prof. Airy's *Tracts* nichts über diesen Gegenstand gelesen habe.

Es seyen m, m', m'' u. s. w. die Massen der Aethertheilchen, und die rechtwinkligen Coordinaten

$$\begin{array}{l} \text{von } m \quad . . . \quad x \quad \quad y \quad \quad z \\ - \quad m' \quad . . . \quad x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z \\ - \quad m'' \quad . . . \quad x + \Delta x', y + \Delta y', z + \Delta z' \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

Ferner sey:

$$\begin{array}{l} r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \\ r' = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2} \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Gesetzt, die Theilchen haben alle gleiche Massen, und die Kraft von einem auf ein anderes sey eine Function ihres Abstandes, multiplicirt durch m ; auch werde auf jedes Theilchen nur durch die Anziehungen und Abstosungen der übrigen Theilchen eingewirkt. Die Cosinus der Winkel, welche r mit den positiven Richtungen von

x, y, z macht, sind $\frac{\Delta x}{r}, \frac{\Delta y}{r}, \frac{\Delta z}{r}$, und so haben wir nach den Grundsätzen der Statik, wenn das System im Gleichgewicht ist:

$$m \sum \frac{f(r)}{r} \Delta x = 0 : m \sum \frac{f(r)}{r} \Delta y = 0; m \sum \frac{f(r)}{r} \Delta z = 0 \dots (1)$$

Die Summen erstrecken sich auf alle Theilchen innerhalb der Anziehungs- oder Abstofsungssphäre des Theilchens m , welches ein jedes in dem System seyn kann.

Nun möge das Gleichgewicht des Systems gestört werden, so daß nach Ablauf der Zeit t das Theilchen m in den Richtungen von x, y, z die Verschiebungen ξ, η, ζ erfahre, und m' die: $\xi + \Delta \xi, \eta + \Delta \eta, \zeta + \Delta \zeta$; dabei mögen $\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta$ so klein seyn, daß man ihre Quadrate und Producte vernachlässigen kann. Dann ist der gegenseitige Abstand dieser Theilchen:

$$r + \Delta r = \sqrt{(\Delta x + \Delta \xi)^2 + (\Delta y + \Delta \eta)^2 + (\Delta z + \Delta \zeta)^2}$$

und:

$$\Delta r = \frac{\Delta x \Delta \xi + \Delta y \Delta \eta + \Delta z \Delta \zeta}{r}.$$

Die Cosinus der Winkel, welche $r + \Delta r$ mit x, y, z macht, werden seyn:

$$\frac{\Delta x + \Delta \xi}{r + \Delta r}, \frac{\Delta y + \Delta \eta}{r + \Delta r}, \frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r + \Delta r}$$

und, wenn man die Summen der Componenten der in den Richtungen x, y, z auf m wirkenden Kräfte X, Y, Z nennt, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} X &= m \sum \cdot \frac{f(r + \Delta r)}{r + \Delta r} (\Delta x + \Delta \xi) \\ Y &= m \sum \cdot \frac{f(r + \Delta r)}{r + \Delta r} (\Delta y + \Delta \eta) \\ Z &= m \sum \cdot \frac{f(r + \Delta r)}{r + \Delta r} (\Delta z + \Delta \zeta) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Nun ist:

$$f(r + \Delta r) = f(r) + \frac{df(r)}{dr} \Delta r \text{ und } \frac{1}{r + \Delta r} = \frac{1}{r} - \frac{\Delta r}{r^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(r+\Delta r)}{r+\Delta r}(\Delta x+\Delta \xi) &= \left\{ \frac{f(r)}{r} + \left(\frac{df(r)}{r dr} - \frac{f(r)}{r^2} \right) \Delta r \right\} (\Delta x+\Delta \xi) \\ &= \frac{f(r)}{r} \Delta x + \frac{f(r)}{r} \Delta \xi + \left(\frac{df(r)}{r^2 dr} - \frac{f(r)}{r^3} \right) (\Delta x \Delta \xi + \Delta y \Delta \eta + \Delta z \Delta \zeta) \Delta x \end{aligned}$$

wenn man für Δr seinen vorhin gefundenen Werth substituirt.

Schreiben wir nun $\varphi(r)$ für $\frac{f(r)}{r}$ und $\psi(r)$ für $\left(\frac{df(r)}{r^2 dr} - \frac{f(r)}{r^3} \right)$, und substituiren dies in der ersten der Gleichungen (2), so haben wir vermöge der ersten der Gleichungen (1):

$$X = m \Sigma [\varphi(r) \Delta \xi + \psi(r) \cdot (\Delta x \Delta \xi + \Delta y \Delta \eta + \Delta z \Delta \zeta) x].$$

Die zweite und dritte der Gleichungen (2) sind der ersten ähnlich; folglich, wenn wir sie auf dieselbe Weise umformen, und, gemäß den Grundsätzen der Dynamik, $\frac{d^2 \xi}{dt^2}$, $\frac{d^2 \eta}{dt^2}$, $\frac{d^2 \zeta}{dt^2}$ für X , Y , Z setzen, so haben wir:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = m \Sigma [\varphi(r) \Delta \xi + \psi(r) \cdot (\Delta x \Delta \xi + \Delta y \Delta \eta + \Delta z \Delta \zeta) \Delta x]$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = m \Sigma [\varphi(r) \Delta \eta + \psi(r) \cdot (\Delta x \Delta \xi + \Delta y \Delta \eta + \Delta z \Delta \zeta) \Delta y]$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = m \Sigma [\varphi(r) \Delta \zeta + \psi(r) \cdot (\Delta x \Delta \xi + \Delta y \Delta \eta + \Delta z \Delta \zeta) \Delta z]$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen (3) läßt sich für besondere Fälle eine Anzahl von Integralen auffinden. Nehmen wir an, die Vibrationen der Theilchen geschähen in geraden Linien, und sämmtlich in Einer Richtung. Dies ist der Fall des polarisirten Lichtes. Es liege x in der Richtung der Vibrationen, dann werden η und ζ Null seyn, und die erste der Gleichungen (3) wird geben:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = m \Sigma \cdot [\varphi(r) + \psi(r) \Delta x^2] \Delta \xi \dots (4)$$

Nun sey ξ eine Function von z und t ; dann können wir für $\Delta \xi$ setzen:

$$\frac{d\xi}{dz}\Delta z + \frac{d^2\xi}{dz^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{2} + \frac{d^3\xi}{dz^3} \cdot \frac{\Delta z^3}{2 \cdot 3} + \frac{d^4\xi}{dz^4} \cdot \frac{\Delta z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Substituiren wir diesen Werth von $\Delta\xi$ in der Gleichung (4) und nehmen an, die Theilchen seyen in ihrem Gleichgewichtszustande so angeordnet, dafs für jedes Theilchen auf der einen Seite von m , innerhalb dessen Wirkungssphäre, sich ein anderes auf der gegenüberstehenden Seite in gleichem Abstände befinde, so können wir die Summe Σ in zwei Theile theilen, einen, welcher die positiven Werthe von Δz einschließt, und den andern, der die negativen umfaßt; für jedes Glied in dem einen Theil werden wir dann ein gleiches mit derselben Potenz von Δz in dem andern haben. Allein in dem einen Theil werden alle Glieder, die ungerade Potenzen von Δz einschließen, positiv seyn, und in dem andern negativ. Folglich werden alle diese Glieder verschwinden, und da die übrigen Glieder alle positiv sind, wird die Summe des einen Theils gleich seyn der des andern. Folglich wird die Gleichung (4) werden:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = m\Sigma[\varphi(r) + \psi(r)\Delta x^2]\Delta z^2 \left(\frac{d^2\xi}{dz^2} + \frac{d^4\xi}{dz^4} \cdot \frac{4z^4}{3 \cdot 4} \right),$$

wo die Summe nur auf die positiven Werthe von Δz auszudehnen ist.

Nun schreibe man

$$s^2 \text{ für } m\Sigma[\varphi(r) + \psi(r)\Delta x^2]\Delta z^2$$

$$\text{und } s'^2 = m\Sigma[\varphi(r) + \psi(r)\Delta x^2]\Delta z^4$$

dann wird die letzte Gleichung werden:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = s^2 \frac{d^2\xi}{dz^2} + s'^2 \frac{d^4\xi}{dz^4} \cdot \dots \dots \dots (5)$$

Lassen wir in dieser Gleichung das letzte Glied fort, so wird sie ganz die für die Fortpflanzung des Schalls, und sie giebt dann keine Relation zwischen der Geschwindigkeit und Länge der Welle. Integriren wir aber diese Gleichung, wie sie ist, so erhalten wir eine Relation dieser Art, und diese Relation liefert eine *Theorie der Dispersion des Lichts*.

Da ξ eine Function von z und t ist, so kann es ausgedrückt werden durch eine Reihe von Gliedern wie $p \sin nt + q \cos nt$, worin p und q Functionen von z sind und n eine constante Gröfse ist ¹⁾. Setzen wir also:

$$\xi = p \sin nt + q \cos nt$$

und substituiren diesen Werth von ξ in der Gleichung (5), so wird dieselbe werden:

$$\begin{aligned} & \left(n^2 p + s^2 \frac{d^2 p}{dz^2} + \frac{s'^2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{d^4 p}{dz^4} \right) \sin nt \\ & + \left(n^2 q + s^2 \frac{d^2 q}{dz^2} + \frac{s'^2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{d^4 q}{dz^4} \right) \cos nt = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung muß wahr seyn für alle Werthe von t ; folglich muß seyn:

$$n^2 p + s^2 \frac{d^2 p}{dz^2} + \frac{s'^2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{d^4 p}{dz^4} = 0 \quad \dots \quad (6)$$

$$n^2 q + s^2 \frac{d^2 q}{dz^2} + \frac{s'^2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{d^4 q}{dz^4} = 0 \quad \dots \quad (7)$$

Da nun p eine Function von z ist, so kann es ausgedrückt werden durch eine Reihe von Gliedern, wie $a \sin kz + b \cos kz$, worin a, b, k constante Gröfsen sind. Substituiren wir also $a \sin kz + b \cos kz$ für p in der Gleichung (6), so wird dieselbe:

$$n^2 - s^2 k^2 + \frac{s'^2}{3 \cdot 4} k^4 = 0,$$

folglich:

$$\begin{aligned} \frac{n}{k} &= \sqrt{s^2 - \frac{s'^2}{3 \cdot 4} k^2} \\ &= s \left(1 - \frac{k^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{s'^2}{s^2} \right) \text{ nahe.} \end{aligned}$$

Da die Gleichungen (6) und (7) einander ähnlich sind, und da wir $a \sin kz + b \cos kz$ für p gesetzt haben, so müssen wir $a' \sin kz + b' \cos kz$ für q setzen, worin a' und b' zwei andere constante Gröfsen sind.

1) Poisson, *Traité de Mécanique*, 2me Edit. §. 514.

Folglich kann ξ ausgedrückt werden durch eine Reihe von Gliedern, wie:

$$(a \sin kz + b \cos kz) \sin nt + (a' \sin kz + b' \cos kz) \cos nt.$$

Mit Bezug auf irgend einen besonderen Werth von z geht dieses Glied durch alle seine Werthe, während t durch $\frac{2\pi}{n}$ wächst; und in Bezug auf irgend einen besonderen Werth von t geht es durch alle seine Werthe, während z durch $\frac{2\pi}{k}$ wächst; folglich stellt es eine Lichtwelle vor, welche sich in der Richtung z bewegt mit der Geschwindigkeit $\frac{n}{k}$, deren Werth, wie vorhin gefunden, gleich ist:

$$s \left(1 - \frac{k^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{s'^2}{s^2} \right).$$

Professor Powell's Ausdruck für diese Gröfse ist:

$$H \left\{ \frac{\sin \left(\frac{\pi r n}{\lambda} \right)}{\frac{\pi r n}{\lambda}} \right\}$$

welcher sehr nahe gleich ist mit:

$$H \left\{ 1 - \frac{\pi^2 r^2 n^2}{2 \cdot 3 \cdot \lambda^2} \right\}$$

Da Hr. P. statt der Summe s^2 und s'^2 nur ein Glied betrachtet, und da r , n , λ in seiner Bezeichnung dieselben sind wie Δz und $\frac{2\pi}{k}$ in unserer, so sind die beiden Ausdrücke in der That einander gleich.

Untersucht man die Zusammensetzung der Gröfsen $\frac{s'^2}{s^2}$, so sieht man, dafs die Relation zwischen der Länge und der Geschwindigkeit der Welle nicht blofs abhängt von dem Verhältnifs der gegenseitigen Abstände der Theilchen zur Wellenlänge, sondern auch von dem Radius ihrer Wirkungssphäre.

Nach diesem Grundsatz können wir, glaube ich (wie

Fresnel vermuthet zu haben scheint) ¹⁾, die Dispersion des Lichts erklären, ohne anzunehmen, daß die Wellen sich in dem freien ätherischen Medium mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, eine Annahme, welcher unüberwindliche Einwürfe entgegen zu stehen scheinen ²⁾).

In meiner nächsten Mittheilung hoffe ich zeigen zu können, daß wenn die Vibrationen der Aethertheilchen nach drei rechtwinkligen Richtungen zerlegt werden, von denen zwei senkrecht auf, und die eine in der Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts liegt, sich die Vibrationen in jeder dieser Richtungen einzeln berechnen lassen, und daß man auf diese Weise einen genügenden Grund angeben kann, warum die Vibrationen in Richtung der Fortpflanzung unmerklich sind (*Airy's Trait.* §. 101) ³⁾).

XIV. *Ueber die Lage der Axen optischer Elasticität in Krystallen des hemi-primatischen Systems; von W. H. Miller.*

Lehrer am St. John's College und Professor der Mineralogie in Cambridge.

(Aus dem *Transact. of the Cambridge Philosoph. Soc. Vol. V pt. III.* In einem besonderen Abzuge vom Hrn. Verfasser übersandt.)

1) Fresnel hat bewiesen, daß, was für eine regelmäßige Anordnung das Mittel, welches durch seine Elasticität die optischen Eigenschaften eines Krystalls hervorbringt, auch besitzen mag, es doch immer drei auf

1) *Airy's Tracts*, p. 285 Note.

2) Ebendasselbst.

3) Siehe auch Fresnel, diese *Annal.* Bd. XXIII S. 404. P.