ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 3039.

Ueber das Rotationsgesetz der Sonne und über die Periodicität der Sonnenflecke.

Von Dr. J. Wilsing.

Zu den interessantesten Resultaten, welche Carrington aus seinen Beobachtungen der Sonnenflecke herleitete, gehört das Rotationsgesetz derselben. Carrington fand, dass die Winkelgeschwindigkeit der Sonnenflecke bei ihrer Bewegung um eine gemeinsame Axe eine mit ihrer heliocentrischen Breite veränderliche Grösse ist, so dass die in der Nähe des Aequators gelegenen Flecke einen Umlauf in kürzerer Zeit vollenden, als die in höherer Breite befindlichen. Carrington stellte die aus seinen Beobachtungen berechneten Zahlen durch eine empirische Formel dar:

$\omega = a + b \sin \varphi^{1/4}$, wo ω die betreffende Winkelgeschwindigkeit, φ die heliocentrische Breite, a und b aus den Beobachtungen zu bestimmende Constante bezeichnen. Eine Begründung für die Wahl grade dieser Form findet sich nicht angegeben. Die Entdeckung Carrington's wurde durch andere Beobachter bestätigt. Spörer gab als Ausdruck für seine Beobachtungen gleichfalls eine empirische Formel: $\omega = a + b \cos \varphi$, während Faye die Wahl des Ausdrucks: $\omega = a + b \sin \varphi^2$ durch die Hypothese begründete, dass als Ursache der Veränderlichkeit der Winkelgeschwindigkeit verticale Strömungen zu betrachten seien, welche aus dem Innern des Sonnenkörpers nach der Oberfläche gerichtet sind, und deren Ausgangspunkt sich auf einer sphäroidisch gestalteten Fläche befindet. Für diese letztere Annahme, aus welcher sich das angeführte Rotationsgesetz ergibt, lässt sich indessen eine Begründung nicht leicht angeben. Die von Zöllner gleichfalls theoretisch abgeleitete Formel stützt sich auf die Voraussetzung, dass die Oberfläche der Sonne aus fester oder glühend flüssiger Materie besteht, über welche sich noch eine dünne flüssige Schicht von den Polen nach dem Aequator zu ergiesst. Diese Vorstellung ist mit den neueren Anschauungen über die Constitution der Sonne nicht in Uebereinstimmung zu bringen, so dass die Zöllner'sche Formel thatsächlich nur als ein für die rechnerische Darstellung brauchbarer Ausdruck betrachtet werden kann. Auf Voraussetzungen, welche denjenigen Faye's entgegengesetzt sind, beruht die von Young aufgestellte Erklärung. Das Rotationsgesetz wird als eine den Oberflächenschichten eigenthümliche Erscheinung betrachtet, welche ihre Entstehung dem Herabsinken abgekühlter Massen aus den oberen Schichten der Atmosphäre verdankt, wo dieselben eine grössere lineare Geschwindigkeit angenommen haben. Obgleich nicht bezweifelt werden kann, dass die Flecke aus relativ kühlen, specifisch dichteren und schwereren Substanzen bestehen und deshalb im Allgemeinen eine absteigende Bewegung haben, unterliegt doch die Berechnung

der Grösse der hierbei erzielten scheinbaren Beschleunigung einer beträchtlichen Unsicherheit, da die Bewegung gas- oder dampfförmiger Massen, wie es die Sonnenflecke sind, in der umgebenden Atmosphäre nicht mit genügender Annäherung nach den Gesetzen des freien Falls geschätzt werden kann. Auch liesse sich wenigstens bei Flecken langer Dauer eine continuirliche Aenderung ihrer Rotationsgeschwindigkeit erwarten, da sie den Widerstand der umgebenden atmosphärischen Schichten zu überwinden haben, welcher den vorhandenen Ueberschuss an Geschwindigkeit zu vernichten bestrebt ist.

In neuester Zeit hat Belopolsky interessante Versuche mitgetheilt, (A. N. 2954) welche er mit rotirenden und mit Flüssigkeit gefüllten Glaskugeln angestellt hat. Hierbei zeigte sich, dass unter gewissen Bedingungen im Innern der Flüssigkeit symmetrische Kreisströmungen entstehen, welche am Aequator vom Centrum nach der Oberfläche, an der Oberfläche vom Aequator nach den Polen und an den Polen wiederum nach dem Centrum der Kugel gerichtet sind. Die Werthe der Winkelgeschwindigkeit, welche die Flüssigkeit an der Oberfläche in verschiedenem Abstände von den Polen annimmt, zeigen eine ähnliche Vertheilung, wie die Winkelgeschwindigkeiten an der Sonnenoberfläche. Trotzdem bieten die Bedingungen, welchen die Flüssigkeitsbewegung in einem festen Behältniss unter der Einwirkung der Schwerkraft und der inneren Reibung unterliegt, keine genügenden Analogien, um eine Vergleichung beider Erscheinungen zu gestatten. Dirichlet und Riemann haben allerdings einen speciellen Fall der hier vorliegenden Aufgabe behandelt, die Gestaltänderungen und Bewegungen in einer ursprünglich ellipsoidisch gestalteten Flüssigkeitsmasse zu bestimmen, wenn als wirkende Kräfte nur die gegenseitige Massenanziehung eingeführt wird, aber die von ihnen gefundenen Lösungen führen zu Bewegungen, bei welchen die Umlaufzeit der Oberflächentheile gleich ist. Sie können daher nicht zur Erklärung der Bewegungen an der Sonnenoberfläche herangezogen werden.

In den folgenden Ausführungen soll nun der Versuch gemacht werden, zu zeigen, dass sich das Rotationsgesetz unter gewissen Voraussetzungen als eine den äusseren Schichten eigenthümliche Bewegung auffassen lässt, welche den Rest einer ursprünglich vorhandenen Strömung bildet. Zu diesem Zwecke ist die Zeit zu ermitteln, welche zur Ausgleichung der zu einer bestimmten Epoche als bestehend angenommenen Geschwindigkeitsunterschiede erforderlich ist. Ergiebt sich, dass im Vergleich zu diesem Zeitraum der

Epochenunterschied der vorhandenen Beobachtungen verschwindend klein ist, so wird man die gedachte Anschauung als eine zulässige betrachten dürfen.

Der Centrankörper der Sonne, über dessen Aggregatzustand nichts Näheres festgesetzt werden soll, unterliege nur der Bedingung, dass alle Theile mit gleicher Winkelgeschwindigkeit rotiren sollen.

Die ihn umgebende Hülle besitze eine Rotationsbewegung um dieselbe Axe, doch soll ihre Umdrehungsgeschwindigkeit im Allgemeinen verschieden sein und nur an der Oberfläche des Centrankörpers den diesem zugehörigen Werth annehmen. Finden nun Geschwindigkeitsänderungen nur nach Maassgabe der inneren Reibung statt, indem verticale Strömungen zunächst ausgeschlossen werden, tritt in Folge dessen allmählich eine Ausgleichung der Strömungsunterschiede in der Atmosphäre ein, so kann man nach dem zeitlichen Verlauf der Bewegungsänderung für einen bestimmten Punkt der Atmosphäre fragen. Eine verwandte Aufgabe hat Zöppritsch in seinem Aufsätze »Hydrodynamische Probleme in Beziehung zur Theorie der Meeresströmungen« (Pogg. Annalen N. F. Bd. 3) behandelt. Er zeigt, welche Bewegungen eine unbegrenzte, anfänglich ruhende, ebene Flüssigkeitsschicht unter dem Einfluss beständiger, nur auf die Oberfläche wirkender Kräfte annimmt, vorausgesetzt, dass in der Flüssigkeit innere Reibung stattfindet. Zöppritsch gelangt hierbei bezüglich des zeitlichen Verlaufs der Bewegung für eine bestimmte Flüssigkeitsschicht zu Resultaten, welche den unten abgeleiteten analog sind.

Zunächst soll nun die Aufgabe der Geschwindigkeitsbestimmung für den Fall gelöst werden, dass sich eine Kugel in einer incompressiblen Flüssigkeit von constanter Dichtigkeit befindet. Dann ist zu zeigen, wie eine Erweiterung des gefundenen Resultats möglich ist.

Der Anfangspunkt des Coordinatensystems möge in den Mittelpunkt der Kugel fallen und die Rotation um die Z Axe erfolgen. Jedes Theilchen beschreibe eine Kreisbahn mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche nur vom Radiusvector r und der z Coordinate abhängt, so dass also alle auf demselben Parallelkreise gelegenen Punkte auch dieselbe Umlaufzeit haben. Wenn die Unterschiede der Winkelgeschwindigkeiten gegen ihren Mittelwerth als Grössen zweiter Ordnung angesehen werden, so darf man sich auf die Untersuchung der Bewegung unter der Voraussetzung geringer Geschwindigkeiten beschränken. Die gefundenen Lösungen behalten ihre Gültigkeit mit genügender Näherung auch für eine grössere mittlere Winkelgeschwindigkeit, wenn die Vertheilung des Drucks eine entsprechende Aenderung erfährt. Es sind also Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen zu suchen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k}{\mu} \Delta u &= \frac{\partial V}{\partial x} & \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{k}{\mu} \Delta v &= \frac{\partial V}{\partial y} & (1) \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

wo u und v die Componenten der Geschwindigkeit in der

Richtung der X und Y Axe bezeichnen, (die Geschwindigkeitscomponente w in der Richtung der Z Axe ist der Voraussetzung nach Null) p und μ Druck und Dichtigkeit im Punkte xyz ; k den Reibungscoefficienten und V das

Potential des Centrankörpers $\frac{M}{r}$ mit Vernachlässigung der Masse der Atmosphäre bedeuten. Die Lösung muss an der Oberfläche der Kugel die für dieselbe vorgeschriebene Rotationsgeschwindigkeit liefern. Im unendlichen soll die Flüssigkeit, welche zunächst als unbegrenzt angenommen wird, ruhen. Diese Bedingungen lassen sich erfüllen, wenn man setzt:

$$\frac{dp}{\mu} = dV, \quad u = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial x},$$

wo W eine Function von r und z allein ist, welche der partiellen Differentialgleichung: $\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \Delta W$ genügt. Für

W erhält man den Ausdruck: $W = \sum u_n P_n$, wo $P_n\left(\frac{z}{r}\right)$ eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist, u_n dagegen von r und t allein abhängt und der Gleichung:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2} \left[\frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial u_n}{\partial r} \right)}{\partial r} - n(n+1) u_n \right] \text{ genügt.}$$

$$(a^2 = \frac{k}{\mu}).$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch: $u_n = e^{-a^2 h_m^2 t} \cdot \varrho_{nm}$, wo das von r allein abhängige ϱ_{nm} durch die Gleichung:

$$\frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial \varrho_{nm}}{\partial r} \right)}{\partial r} - n(n+1) \varrho_{nm} + h_m^2 r^2 \varrho_{nm} = 0$$

bestimmt ist.

ϱ_{nm} lässt sich durch Cylinderfunctionen ausdrücken, nämlich durch:

$$\begin{aligned} \psi_n(h_m r) &= (-1)^n 2^{n+1} h_m^n r^n \frac{\partial^n}{\partial (h_m^2 r^2)^n} \cdot \frac{\sin h_m r}{h_m r}, \\ \chi_n(h_m r) &= (-1)^n 2^n h_m^n r^n \frac{\partial^n}{\partial (h_m^2 r^2)^n} \cdot \frac{\cos h_m r}{h_m r}. \end{aligned}$$

Die Grössen h_m sind hier willkürliche Constante. $\psi_n(h_m r)$ verschwindet für $r=0$ und $r=\infty$, $\chi_n(h_m r)$ verschwindet gleichfalls für $r=0$, wird aber im Anfangspunkt der Coordinaten unendlich. Da letzterer Punkt aber ausserhalb des hier betrachteten Raumes liegt, so darf man für ϱ_n den folgenden Ausdruck wählen:

$$\varrho_{nm} = c_{m1}^{(n)} \psi_n(h_m r) + c_{m2}^{(n)} \chi_n(h_m r),$$

wo $c_{m1}^{(n)}$ und $c_{m2}^{(n)}$ wiederum beliebige Constanten bedeuten. Man hat nun der Bedingung zu genügen, dass die Winkelgeschwindigkeit $\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r}$ an der Oberfläche der Kugel

von z unabhängig wird, d. h. dass $\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z}$ für $r = R_1$ verschwindet. Nun ist aber:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \sum_n \sum_m e^{-a^2 h_{nm}^2 t} \left(\varrho_{nm} \frac{\partial P_n}{\partial r} + P_n \frac{d\varrho_{nm}}{dr} \right),$$

so dass die Bedingung erfüllt wird, wenn man

$$\varrho_{nm}(r=R_1) = 0$$

und

$$\frac{d\varrho_{nm}}{dr}(r=R_1) = 0$$

setzt. Aus:

$$\varrho_{nm}(r=R_1) = c_{m1}^{(n)} \psi_n(h_m R_1) + c_{m2}^{(n)} \chi_n(h_m R_1) = 0$$

$$\frac{d\varrho_{nm}}{dr}(r=R_1) = \frac{n}{R_1} [c_{m1}^{(n)} \psi_n(h_m R_1) + c_{m2}^{(n)} \chi_n(h_m R_1)] - h_m [c_{m1}^{(n)} \psi_{n+1}(h_m R_1) + c_{m2}^{(n)} \chi_{n+1}(h_m R_1)] = 0$$

oder

$$\frac{d\varrho_{nm}}{dr} = -h_m [c_{m1}^{(n)} \psi_{n+1}(h_m R_1) + c_{m2}^{(n)} \chi_{n+1}(h_m R_1)] = 0$$

ergibt sich aber zur Bestimmung der Constanten h_m die Bedingungsgleichung:

$$\begin{vmatrix} \psi_n(h_m R_1) & \chi_n(h_m R_1) \\ \psi_{n+1}(h_m R_1) & \chi_{n+1}(h_m R_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Ist also h_m eine Wurzel der vorstehenden transcendenten Gleichung und q_{nm} eine neue willkürliche Constante, so erhält man für W den folgenden Ausdruck:

$$W = \sum_n u_n P_n = \sum_n \sum_m q_{nm} e^{-a^2 h_{nm}^2 t} \varrho_{nm}(h_{nm}) P_n,$$

wo die Constanten q die Bewegung der Flüssigkeit zur Zeit $t = 0$ bestimmen.

Es möge nun eine specielle Bewegung näher betrachtet werden und zwar sei diese bestimmt durch:

$$W = \sum_m q_m e^{-a^2 h_m^2 t} \varrho_{2m} = \left(\frac{3}{2} \frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{2} \right) \sum_m q_m e^{-a^2 h_m^2 t} [c_{m1}^{(2)} \psi_2(h_m r) + c_{m2}^{(2)} \chi_2(h_m r)].$$

Man kann sich auch noch eine von r allein abhängige Lösung der hydrodynamischen Differentialgleichungen (1) hinzugefügt denken und erhält dann als Ausdruck für die Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit ω von der heliocentrischen

Breite φ innerhalb einer bestimmten Kugelfläche ($r = R$): $\omega = a + b \frac{z^2}{R^2} = a + b \sin^2 \varphi$, wo mit a und b bestimmte

nur von R abhängige Constante bezeichnet sind. Die betrachtete Bewegung wird also innerhalb einer bestimmten Kugelfläche durch die von Faye für das Rotationsgesetz gewählte Form ausgedrückt, welche sich den Beobachtungen befriedigend anschliesst. Der von z unabhängige Theil von W bietet hier kein Interesse, da er einen für eine bestimmte Kugelfläche constanten Beitrag zur Winkelgeschwindigkeit liefert. Man braucht also nur den Coefficienten Z von z^2 näher zu untersuchen. Durch Differentiation nach r findet man aus:

$$Z = \frac{3}{2} \sum_m q_m \frac{e^{-a^2 h_m^2 t}}{r^2} [c_{m1}^{(2)} \psi_2(h_m r) + c_{m2}^{(2)} \chi_2(h_m r)],$$

den entsprechenden Coefficienten von z^2 in dem Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{3}{2} \sum_m q_m e^{-a^2 h_m^2 t} \left(2^4 c_{m1}^{(2)} h_m^4 \frac{d^3}{d(h_m^2 r^2)^3} \frac{\sin h_m r}{h_m r} + 2^3 c_{m2}^{(2)} h_m^4 \frac{d^3}{d(h_m^2 r^2)^3} \frac{\cos h_m r}{h_m r} \right),$$

oder

$$\frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} = -\frac{3}{2r^3} \sum_m h_m q_m e^{-a^2 h_m^2 t} [c_{m1}^{(2)} \psi_3(h_m r) + c_{m2}^{(2)} \chi_3(h_m r)].$$

Für h_m kann man wieder eine Wurzel der Gleichung:

$$c_{m1}^{(2)} \psi_3(h_m R_1) + c_{m2}^{(2)} \chi_3(h_m R_1) = 0$$

wählen und damit der Bedingung genügen, dass für $r = R_1$ der von z abhängige Theil der Bewegung verschwinden soll.

Die Flüssigkeit möge jedoch nicht mehr als unendlich, sondern durch eine Kugelfläche vom Radius R_2 ($R_2 > R_1$) begrenzt angenommen werden. Die Voraussetzung soll beibehalten werden, dass der von z abhängige Theil der Bewegung an der äusseren Begrenzung der Flüssigkeit für $r = R_2$ verschwindet. Bei dieser Annahme werden sich die

Geschwindigkeitsunterschiede in der Flüssigkeit offenbar schneller ausgleichen, als wenn die Bewegung an der Oberfläche nicht vorgeschrieben ist. Die Bedingung wird durch geeignete Bestimmung von c_{m1} und c_{m2} erfüllt, wenn für die Constanten h_m die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \psi_3(h_m R_1) & \chi_3(h_m R_1) \\ \psi_3(h_m R_2) & \chi_3(h_m R_2) \end{vmatrix} = 0$$

gesetzt werden. Die Aufgabe lässt sich jetzt noch dahin erweitern, dass für $t = 0$ die Bewegung gegeben sein möge, d. h. dass für $t = 0$ der Coefficient Z zwischen $r = R_1$ und $r = R_2$ bestimmte, vorgeschriebene Werthe annehmen soll. Sind diese Werthe durch die Function $\varphi(r, t)$ gegeben, so hat man für $t = 0$:

$$(2) \quad r^3 \varphi(r, 0) = \sum_m s_m [\chi_3(h_m R_2) \psi_3(h_m r) - \psi_3(h_m R_2) \chi_3(h_m r)] = \sum_m s_m \Psi_3(h_m r),$$

wo s_m wieder eine Constante bedeutet und $\Psi_3(h_m r)$ der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d\left(r^2 \frac{d\Psi_3(h_m r)}{dr}\right)}{dr} - 3 \cdot 4 \Psi_3(h_m r) + h_m^2 r^2 \Psi_3(h_m r) = 0.$$

Zur Bestimmung der Constanten s_m gelangt man auf dem bekannten Wege. Bezeichnen nämlich h_m und $h_{m'}$ zwei Wurzeln der Gleichung $\Psi_3(h R_1) = 0$, so erhält man mit Hülfe der vorstehenden Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \Psi_3(h_m r) \Psi_3(h_{m'} r) r^2 dr &= R_2^2 \frac{h_m \Psi_3(h_{m'} R_2) \Psi_3'(h_m R_2) - h_{m'} \Psi_3(h_m R_2) \Psi_3'(h_{m'} R_2)}{h_m'^2 - h_m^2} \\ &\quad - R_1^2 \frac{h_m \Psi_3(h_{m'} R_1) \Psi_3'(h_m R_1) - h_{m'} \Psi_3(h_m R_1) \Psi_3'(h_{m'} R_1)}{h_m'^2 - h_m^2}. \end{aligned}$$

Da nun aber:

$$\Psi_3(h_m R_2) = \Psi_3(h_{m'} R_2) = \Psi_3(h_m R_1) = \Psi_3(h_{m'} R_1) = 0,$$

so verschwindet das Integral, sobald h_m und $h_{m'}$ zwei von einander verschiedene Wurzeln sind. Für $h_m = h_{m'}$ wird dagegen:

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \Psi_3(h_m r) \Psi_3(h_m r) r^2 dr &= \frac{1}{2} R_2^3 [\Psi_3'(h_m R_2)]^2 - \frac{1}{2} R_1^3 [\Psi_3'(h_m R_1)]^2 \\ &= \frac{1}{2} R_2^2 [\Psi_4(h_m R_2)]^2 - \frac{1}{2} R_1^2 [\Psi_4(h_m R_1)]^2 \end{aligned}$$

Multipliziert man also beide Seiten der Gleichung (2) mit $r^2 \Psi_3(h_m r)$ und integrirt von $r = R_1$ bis $r = R_2$, so erhält man für s_m :

$$s_m = \frac{\int_{R_1}^{R_2} r^3 \varphi(r, 0) \Psi_3(h_m r) dr}{\int_{R_1}^{R_2} [\Psi_3(h_m r)]^2 dr}.$$

Ich werde jetzt diese Rechnung für ein bestimmtes Beispiel numerisch durchführen. Für $\varphi(r, 0)$ soll ein einfacher, quadratischer Ausdruck genommen werden:

$$\varphi(r, 0) = A(r - R_1)(r - R_2).$$

Diese Annahme besagt, dass die Grösse der Aenderung der Winkelgeschwindigkeit mit der heliocentrischen Breite d. h. das Glied $b \sin \varphi^2$, wenn man von der Oberfläche der Kugel $r = R_1$ zur Begrenzung der Atmosphäre $r = R_2$ übergeht, vom Werthe Null bei $r = R_1$ bis zu einem Maximum continuirlich wächst, um dann bis Null bei $r = R_2$ wieder abzunehmen. Die Bewegungsänderung längs eines Radiusvector r betrachtet, lässt sich also mit derjenigen in einer geradlinigen Strömung zwischen zwei festen Ufern, welche von der Flüssigkeit benetzt werden, vergleichen.

Zunächst ist die Convergenz der Entwicklung zu beweisen. Die Bedingungsgleichung zur Bestimmung der Grössen h war:

$$\psi_3(h R_1) \chi_3(h R_2) - \psi_3(h R_2) \chi_3(h R_1) = 0,$$

oder nach Ausführung der Multiplication:

$$\begin{aligned} \sin h(R_2 - R_1) &\left[-\frac{2}{h^2 R_1 R_2} + \frac{1}{h^4} \left(\frac{30}{R_1^3 R_2} - \frac{72}{R_1^2 R_2^2} + \frac{30}{R_1 R_2^3} \right) + \frac{1}{h^6} \left(\frac{180}{R_1^4 R_2^2} - \frac{450}{R_1^3 R_2^3} + \frac{180}{R_1^2 R_2^4} \right) - \frac{450}{h^8 R_1^4 R_2^4} \right] \\ + \cos h(R_2 - R_1) &\left[\frac{1}{h^3} \left(\frac{12}{R_1^2 R_2} - \frac{12}{R_1 R_2^2} \right) - \frac{1}{h^5} \left(\frac{30}{R_1^4 R_2} - \frac{180}{R_1^3 R_2^2} + \frac{180}{R_1^2 R_2^3} - \frac{30}{R_1 R_2^4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h^7} \left(\frac{450}{R_1^4 R_2^3} - \frac{450}{R_1^3 R_2^4} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung nähern sich mit zunehmendem m dem Werthe: $h_m = \frac{m\pi}{R_2 - R_1}$. Um die Convergenz der Reihe festzustellen, braucht man nur den Grenzwert zu untersuchen, welchem sich s_m mit wachsendem m nähert. Dieser soll daher jetzt berechnet werden. $\Psi_3(hr)$ wird aus (3) durch Vertauschung von R_1 mit r gefunden. Berücksichtigt man nur das erste mit $\frac{1}{h^2}$ multiplicirte Glied, so findet man für den Grenzwert, welchem sich der Zähler von s mit wachsendem m nähert:

$$-\frac{2A}{h^2 R_2} \int_{R_1}^{R_2} r^4 (r - R_1) (r - R_2) \sin h(R_2 - r) dr = \frac{2A}{h^4 R_2} R_1^4 (R_1 - R_2) \sin h(R_2 - R_1).$$

Bei der Berechnung des Nenners hat man entsprechend nur die höchste Potenz von h mitzunehmen. Man erhält, da unter dieser Voraussetzung:

$$[\Psi_4(h_m r)]^2 = \frac{4 \cos h_m (R_2 - r)^2}{h_m^4 R_2^2 r^2}$$

ist, für den Nenner von s_m :

$$\frac{2}{h_m^4} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{R_1}{R_2^2} \cos h_m (R_2 - R_1) \right)$$

und schliesslich für s_m selbst einen Ausdruck von der Form:

$$s_m = \frac{\alpha \sin h_m (R_2 - R_1)}{\beta - \gamma \cos h_m (R_2 - R_1)},$$

wo $\alpha \beta \gamma$ constante Grössen bedeuten. Der Rest der Entwicklung wird also, wenn man die Reihe bei dem m' ten Gliede abbricht:

$$-\frac{2}{R_2} \sum_{m'}^{\infty} \frac{\alpha \sin h_m (R_2 - R_1)}{\beta - \gamma \cos h_m (R_2 - R_1)} \cdot \frac{\sin h_m (R_2 - r)}{h_m^2 r}.$$

Da nun h_m sich mit wachsendem m dem Werthe $\frac{m\pi}{R_2 - R_1}$ nähert, und die Reihe

$$\sum_{m'}^{\infty} \frac{1}{h_m^2} = \frac{(R_2 - R_1)^2}{\pi^2} \sum_{m'}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

einen endlichen Werth hat, so ist dies um so mehr mit dem für den Rest gefundenen Ausdruck der Fall, da der Factor von $\frac{1}{h_m^2}$ mit zunehmendem m gegen Null convergirt.

Die numerischen Werthe der hier vorkommenden bestimmten Integrale sind auf folgendem Wege berechnet. Setzt man für die Integrale abgekürzte Bezeichnungen:

$$\int_{R_1}^{R_2} r^n (r - R_1) (r - R_2) \sin h(R_2 - r) dr = (r^n R_1 R_2 s),$$

$$\int_{R_1}^{R_2} r^n (r - R_1) (r - R_2) \cos h(R_2 - r) dr = (r^n R_1 R_2 c),$$

$$\int_{R_1}^{R_2} r^n (r - R_1) \sin h(R_2 - r) dr = (r^n R_1 s) \text{ und analog gebildet } (r^n R_2 s)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} r^n (r - R_1) \cos h(R_2 - r) dr = (r^n R_1 c) \text{ und analog gebildet } (r^n R_2 c)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} r^n \sin h(R_2 - r) dr = (r^n s), \quad \int_{R_1}^{R_2} r^n \cos h(R_2 - r) dr = (r^n c), \text{ so hat man:}$$

$$\begin{aligned}
(r^4 R_1 R_2 s) &= -\frac{4}{h} (r^3 R_1 R_2 c) - \frac{1}{h} (r^4 R_2 c) - \frac{1}{h} (r^4 R_1 c) \\
(r^3 R_1 R_2 c) &= +\frac{3}{h} (r^2 R_1 R_2 s) + \frac{1}{h} (r^3 R_2 s) + \frac{1}{h} (r^3 R_1 s) \\
(r^2 R_1 R_2 s) &= -\frac{2}{h} (r R_1 R_2 c) - \frac{1}{h} (r^2 R_2 c) - \frac{1}{h} (r^2 R_1 c) \\
(r R_1 R_2 c) &= +\frac{1}{h} (r^0 R_1 R_2 s) + \frac{1}{h} (r R_2 s) + \frac{1}{h} (r R_1 s) \\
(r^4 R_1 R_2 c) &= +\frac{4}{h} (r^3 R_1 R_2 s) + \frac{1}{h} (r^4 R_2 s) + \frac{1}{h} (r^4 R_1 s) \\
(r^3 R_1 R_2 s) &= -\frac{3}{h} (r^2 R_1 R_2 c) - \frac{1}{h} (r^3 R_2 c) - \frac{1}{h} (r^3 R_1 c) \\
(r^2 R_1 R_2 c) &= +\frac{2}{h} (r R_1 R_2 s) + \frac{1}{h} (r^2 R_2 s) + \frac{1}{h} (r^2 R_1 s) \\
(r R_1 R_2 s) &= -\frac{1}{h} (r^0 R_1 R_2 c) - \frac{1}{h} (r R_2 c) - \frac{1}{h} (r R_1 c) \\
(r^4 R_2 c) &= -\frac{1}{h} R_1^4 (R_2 - R_1) \sinh (R_2 - R_1) + \frac{4}{h} (r^3 R_2 s) + \frac{1}{h} (r^4 s) \\
(r^3 R_2 s) &= +\frac{1}{h} R_1^3 (R_2 - R_1) \cosh (R_2 - R_1) - \frac{3}{h} (r^2 R_2 c) - \frac{1}{h} (r^3 c) \\
(r^2 R_2 c) &= -\frac{1}{h} R_1^2 (R_2 - R_1) \sinh (R_2 - R_1) + \frac{2}{h} (r R_2 s) + \frac{1}{h} (r^2 s) \\
(r R_2 s) &= +\frac{1}{h} R_1 (R_2 - R_1) \cosh (R_2 - R_1) - \frac{1}{h} (r^0 R_2 c) - \frac{1}{h} (r c) \\
(r^4 R_2 s) &= +\frac{1}{h} R_1^4 (R_2 - R_1) \cosh (R_2 - R_1) - \frac{4}{h} (r^3 R_2 c) - \frac{1}{h} (r^4 c) \\
(r^3 R_2 c) &= -\frac{1}{h} R_1^3 (R_2 - R_1) \sinh (R_2 - R_1) + \frac{3}{h} (r^2 R_2 s) + \frac{1}{h} (r^3 s) \\
(r^2 R_2 s) &= +\frac{1}{h} R_1^2 (R_2 - R_1) \cosh (R_2 - R_1) - \frac{2}{h} (r R_2 c) - \frac{1}{h} (r^2 c) \\
(r R_2 c) &= -\frac{1}{h} R_1 (R_2 - R_1) \sinh (R_2 - R_1) + \frac{1}{h} (r^0 R_2 s) + \frac{1}{h} (r s)
\end{aligned}$$

u. s. w.

Zur Controlle der ganzen Rechnung können die Werthe dienen, welche man für $(r^4 R_1 R_2 s)$ und $(r^4 R_1 R_2 c)$ nach einer directen Formel findet. Man erhält durch Addition:

$$(r^4 R_1 R_2 c) + i (r^4 R_1 R_2 s) = \int_{R_1}^{R_2} r^4 (r - R_1) (r - R_2) e^{ih(R_2 - r)} dr.$$

Setzt man nach Ausführung der Integration auf der rechten Seite die reellen und imaginären Theile einander gleich, so erhält man die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
(r^4 R_1 R_2 s) &= \left[\frac{R_2^6}{2} - \left(\frac{30}{h^3} - \frac{R_1 R_2}{h} \right) R_2^4 + \left(\frac{360}{h^5} - \frac{12 R_1 R_2}{h^3} \right) R_2^2 - \left(\frac{720}{h^7} - \frac{24 R_1 R_2}{h^5} \right) \right. \\
&\quad \left. - (R_1 + R_2) \left(\frac{R_2^5}{h} - \frac{20 R_2^3}{h^3} + \frac{120}{h^5} R_2 \right) \right] \\
&- \cosh (R_2 - R_1) \left[\frac{R_1^6}{h} - \left(\frac{30}{h^3} - \frac{R_1 R_2}{h} \right) R_1^4 + \left(\frac{360}{h^5} - \frac{12 R_1 R_2}{h^3} \right) R_1^2 - \left(\frac{720}{h^7} - \frac{24 R_1 R_2}{h^5} \right) \right. \\
&\quad \left. - (R_1 + R_2) \left(\frac{R_1^5}{h} - \frac{20 R_1^3}{h^3} + \frac{120}{h^5} R_1 \right) \right] \\
&- \sinh (R_2 - R_1) \left[\frac{6 R_1^5}{h^2} - \left(\frac{120}{h^4} - \frac{4 R_1 R_2}{h^2} \right) R_1^3 + \left(\frac{720}{h^6} - \frac{24 R_1 R_2}{h^4} \right) R_1 - (R_1 + R_2) \left(\frac{5 R_1^4}{h^2} - \frac{60}{h^4} R_1^2 + \frac{120}{h^6} \right) \right],
\end{aligned}$$

und :

$$\begin{aligned} (r^4 R_1 R_2 c) = & \left[\frac{6R_2^5}{h^3} - \left(\frac{120}{h^4} - \frac{4R_1 R_2}{h^3} \right) R_2^3 + \left(\frac{720}{h^5} - \frac{24R_1 R_2}{h^4} \right) R_2 - (R_1 + R_2) \left(\frac{5R_2^4}{h^2} - \frac{60R_2^3}{h^4} + \frac{120}{h^6} \right) \right] \\ & - \cos h (R_2 - R_1) \left[\frac{6R_1^5}{h^3} - \left(\frac{120}{h^4} - \frac{4R_1 R_2}{h^3} \right) R_1^3 + \left(\frac{720}{h^5} - \frac{24R_1 R_2}{h^4} \right) R_1 - (R_1 + R_2) \left(\frac{5R_1^4}{h^2} - \frac{60R_1^3}{h^4} + \frac{120}{h^6} \right) \right] \\ & + \sin h (R_2 - R_1) \left[\frac{R_1^6}{h} - \left(\frac{30}{h^3} - \frac{R_1 R_2}{h} \right) R_1^4 + \left(\frac{360}{h^5} - \frac{12R_1 R_2}{h^3} \right) R_1^2 - \left(\frac{720}{h^7} - \frac{24R_1 R_2}{h^5} \right) \right. \\ & \quad \left. - (R_1 + R_2) \left(\frac{R_1^3}{h} - \frac{20R_1^3}{h^3} + \frac{120}{h^5} R_1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Hierauf ergibt sich für den Zähler von s_m der Ausdruck :

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} r^5 (r - R_1) (r - R_2) \Psi_3(h_m r) dr \\ = - \frac{2}{h_m^3 R_2} \left(1 - \frac{15}{h_m^2 R_2^3} \right) \left((r^4 R_1 R_2 s) - \frac{6}{h_m} (r^3 R_1 R_2 c) - \frac{15}{h_m^3} (r^2 R_1 R_2 s) + \frac{15}{h_m^5} (r R_1 R_2 c) \right) \\ - \frac{6}{h_m^3 R_2^2} \left(2 - \frac{5}{h_m^2 R_2^3} \right) \left((r^4 R_1 R_2 c) + \frac{6}{h_m} (r^3 R_1 R_2 s) - \frac{15}{h_m^3} (r^2 R_1 R_2 c) - \frac{15}{h_m^5} (r R_1 R_2 s) \right). \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Nenners $\frac{1}{2} R_2^3 [\Psi_4(h_m R_2)]^2 - \frac{1}{2} R_1^3 [\Psi_4(h_m R_1)]^2$ hat man :

$$\begin{aligned} \Psi_4(h_m r) = \chi_3(h_m R_2) (-1)^4 2^5 h_m^4 r^4 \frac{d^4}{d(h_m^2 r^2)^4} \frac{\sin h_m r}{h_m r} - \psi_3(h_m R_2) (-1)^4 2^4 h_m^4 r^4 \frac{d^4}{d(h_m^2 r^2)^4} \frac{\cos h_m r}{h_m r}, \\ 2^5 h_m^4 r^4 \frac{d^4}{d(h_m^2 r^2)^4} \frac{\sin h_m r}{h_m r} = + \sin h_m r \left(\frac{2}{h_m r} - \frac{90}{h_m^3 r^3} + \frac{210}{h_m^5 r^5} \right) + \cos h_m r \left(\frac{20}{h_m^2 r^2} - \frac{210}{h_m^4 r^4} \right) \\ 2^4 h_m^4 r^4 \frac{d^4}{d(h_m^2 r^2)^4} \frac{\cos h_m r}{h_m r} = + \cos h_m r \left(\frac{1}{h_m r} - \frac{45}{h_m^3 r^3} + \frac{105}{h_m^5 r^5} \right) - \sin h_m r \left(\frac{10}{h_m^2 r^2} - \frac{105}{h_m^4 r^4} \right) \\ \chi_3(h_m R_2) = - \sin h_m R_2 \left(\frac{1}{h_m R_2} - \frac{15}{h_m^3 R_2^3} \right) - \cos h_m R_2 \left(\frac{6}{h_m^2 R_2^2} - \frac{15}{h_m^4 R_2^4} \right) \\ \psi_3(h_m R_2) = + \cos h_m R_2 \left(\frac{2}{h_m R_2} - \frac{30}{h_m^3 R_2^3} \right) - \sin h_m R_2 \left(\frac{12}{h_m^2 R_2^2} - \frac{30}{h_m^4 R_2^4} \right) \end{aligned}$$

Hiernach findet man, wenn z. B. für die Halbmesser von Centalkörper und Hülle $R_1 = 1$, $R_2 = 3$ gesetzt wird, für $\varphi(r, 0)$, den Werth von $\varphi(r, t)$ zur Zeit $t = 0$, die folgende Reihe :

$$\begin{aligned} \varphi(r, 0) = A(r - 1)(r - 3) = \frac{A}{r^3} [+ 158.0 \Psi_3(2.366, r) + 195.3 \Psi_3(3.688, r) \\ + 145.3 \Psi_3(5.111, r) + 127.5 \Psi_3(6.59, r) \\ + 100.0 \Psi_3(8.09, r) + 91.3 \Psi_3(9.63, r)]. \end{aligned}$$

Die in den Argumenten der Functionen Ψ_3 vorkommenden Zahlen sind die Wurzeln h_1 bis h_6 der transcendenten Gleichung (3). Um den Werth von $\varphi(r, t)$ zu erhalten, hat man diese Reihe Glied für Glied mit den Factoren $e^{-a^2 h_m^2 t}$ zu multipliciren. Beispielsweise soll die Aenderung von $\varphi(r, t)$ mit der Zeit untersucht werden für die Kugel- fläche $r = 1.25$. Es wird.

$$\begin{aligned} \varphi(1.25, t) = A [- 2.339 e^{-2.366^2 a^2 t} + 2.713 e^{-3.688^2 a^2 t} - 1.440 e^{-5.111^2 a^2 t} \\ + 0.838 e^{-6.59^2 a^2 t} - 0.410 e^{-8.09^2 a^2 t} + 0.212 e^{-9.63^2 a^2 t}]. \end{aligned}$$

Für $t = 0$ hat die rechte Seite der Gleichung den Werth $-0.43 A$, während die directe Berechnung von $\varphi(1.25, t)$ $-0.44 A$ giebt. Bezeichnet man die Exponentialgrösse $e^{-a^2 t}$ mit x , so kann man für bestimmte Werthe von x aus der vorstehenden Gleichung einerseits die Aenderung von $\varphi(1.25, t)$, andererseits das derselben entsprechende Zeitintervall berechnen, sobald über den Werth von a^2 eine

Bestimmung getroffen ist. Mit a^2 war der Quotient $\frac{k}{\mu}$ bezeichnet, wo k den inneren Reibungscoefficienten der Flüssigkeit, μ ihre Dichtigkeit bezeichneten. Maxwell und O. E. Meyer haben gezeigt, dass der Reibungscoefficient der Gase vom Drucke unabhängig ist. Das zweite von Maxwell aus den Prinzipien seiner Gastheorie abgeleitete

Gesetz, welches von Meyer gleichfalls innerhalb der Grenzen der Beobachtungen bestätigt wurde, verlangt, dass der Reibungscoefficient proportional der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur zunehme. Aus dieser Beziehung folgt, dass bei einer mittleren Temperatur von etwa 28000 Grad, welche als eine obere Grenze zu betrachten sein dürfte, der für 0° gültige Werth des Reibungscoefficienten um das zehnfache zu vergrössern ist. Schliesslich bleibt noch eine Wahl über die Dichtigkeit des Gases zu treffen. Ich nehme an, dass dieselbe nur den millionsten Theil der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei normalem Drucke betrage, dass sich die Hülle also in einem Zustande erheblich grösserer Verdünnung befindet, als sie im Vacuum der Luftpumpe erreichbar ist. Als Werth des Reibungscoefficienten für Wasserstoff findet Meyer $k = 0.000098$, bezogen auf Centimeter, Secunde und die Dichtigkeit des Wassers. Führt man für die Radien R_1 , R_2 und h_m dieselbe Längeneinheit ein, dividirt also h_m , wenn man den Radius R_1 der centralen Kugel gleich $\frac{1}{3}$ Sonnenhalbmesser nimmt, durch 5.577×10^{10} , so dass die Fläche $r = 1.25$, in welcher die Bewegung betrachtet wird, mit der scheinbaren Sonnenoberfläche zusammenfällt, so wird:

$$a^2 = \frac{k}{\mu} = \frac{773.5 \times 0.000098 \times 10^6}{5.577^2 \times 10^{20}}.$$

Mit diesem Werthe findet man für:

$$x_1 = e^{-a^2 t_1} = 0.710 \text{ und } x_2 = e^{-a^2 t_2} = 0.700$$

beispielsweise:

$$\varphi(1.25, t_1) = -0.3339$$

$$\varphi(1.25, t_2) = -0.3113,$$

d. h. der Werth des Coefficienten von $\sin \varphi^2$ in der Rotationsformel wird um 6.8 Procent vermindert. Dieser Betrag ist noch von der Ordnung der Unsicherheit, welche mit der numerischen Bestimmung der in dem Rotationsgesetz vorkommenden Constanten aus den Beobachtungen verknüpft ist. Für die entsprechende Zeitdifferenz ergibt sich aber aus der Gleichung:

$$\log 710 - \log 700 = a^2 (t_1 - t_2) \log e$$

$$t_1 - t_2 = 1.86 \text{ Millionen Jahre.}$$

Das gewonnene Resultat lässt sich durch folgende Sätze wiedergeben:

Man denke sich den Centralkörper der Sonne mit einer ausgedehnten kugelförmig gestalteten, incompressiblen Hülle umgeben, deren innerer Reibungscoefficient von gleicher Ordnung ist, wie derjenige der Gase bei normalem Drucke, aber hoher Temperatur. Die innere Reibung strebt, wenn der Centralkörper wie ein starres System rotirt, während die Winkelgeschwindigkeiten in der Hülle ursprünglich von einander verschieden sind, die Geschwindigkeitsunterschiede auszugleichen, aber der Zeitraum, welcher erforderlich ist, um durch Beobachtungen nachweisbare Veränderungen hervorzubringen, muss als sehr beträchtlich angesehen werden.

Dieser Schluss lässt sich unter Voraussetzungen, welche sich den wirklich vorhandenen Verhältnissen enger an-

schliessen, auf eine compressible Hülle ausdehnen. In diesem Falle hat die Continuitätsgleichung, welcher die Geschwindigkeitscomponenten u und v genügen müssen, die Form:

$$u \frac{\partial \mu}{\partial x} + v \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0.$$

Ist die Dichtigkeit μ des Gases nur von der Entfernung r abhängig, so wird diese Gleichung auch jetzt noch durch die Ausdrücke:

$$u = -\frac{\delta W}{\partial y}, \quad v = \frac{\delta W}{\partial x}$$

identisch erfüllt. Die gefundene Lösung behält also stets ihre Gültigkeit, wenn $a^2 = \frac{k}{\mu}$ eine Constante ist. Dichtigkeit und Temperatur nehmen mit der Entfernung r vom Mittelpunkt ab. Werden beide z. B. durch die Bedingung verknüpft, dass die absolute Temperatur T in jedem Punkte dem Quadrate der Dichtigkeit proportional ist, so hat man $T = a^2 \mu^2$, wo a eine beliebige Constante ist. Da ferner nach dem zweiten Maxwell'schen Gesetz: $k = \beta \sqrt{T}$ ist, so ergibt sich für den Quotienten $\frac{k}{\mu}$ der constante Werth $a\beta$.

Ich habe noch darauf hinzuweisen, welche Modificationen im Verlaufe der Bewegungen die Existenz von Strömungen hervorrufen würde, welche in der Richtung des Radius verlaufen. Zöppritz hat in der oben erwähnten Abhandlung nachgewiesen »dass alle zeitlich veränderlichen, periodischen und unperiodischen Veränderungen der auf die Oberfläche einer unbegrenzten Wasserschicht wirkenden Kräfte sich ausserordentlich langsam, die periodischen mit sehr rasch abnehmender Amplitude, in die Tiefe hinein fortpflanzen« ferner, »dass die Bewegung des Hauptkörpers einer, periodischen Oberflächenkräften unterworfenen Wasserschicht durch die mittlere Geschwindigkeit der Oberfläche bestimmt ist, und dass die periodischen Veränderungen nur in einer verhältnissmässig sehr dünnen Oberflächenschicht bemerkbar sind«. Ueber die Ausdehnung der thatsächlich im Innern des Sonnenkörpers vorkommenden verticalen Strömungen ist nichts Sicheres bekannt, durch die Beobachtungen nachgewiesen sind dieselben nur an der Oberfläche auf begrenzten Gebieten, in den Protuberanzen und zuweilen in der Nähe der Flecke. Auch würde schwer zu verstehen sein, wie eine regelmässige Rotationsbewegung zu Stande kommen kann, wenn eine beständige und durchgreifende Ausgleichung der Bewegungen in den übereinander befindlichen Schichten stattfindet. Beschränkt man also das Vorhandensein verticaler Strömungen auf die dem Centralkörper benachbarten Schichten, so lassen sie sich als unregelmässige, verhältnissmässig eng begrenzte Oberflächensstörungen ansehen, welche den der Masse der Atmosphäre eigenthümlichen Bewegungszustand wohl zu modificiren, aber nicht vollkommen zu verdecken vermögen.

Ich fasse noch einmal Voraussetzungen und Folgerungen zusammen: Die Sonne besitzt eine ausgedehnte Hülle, in welcher Temperatur und Dichtigkeit mit der Entfernung vom Mittelpunkte abnehmen. Die der Mitte zunächst befindliche Masse rotirt wie ein starres System, d. h. ihre Theilchen besitzen merklich gleiche Winkelgeschwindigkeit.

Die Begrenzung des so definirten Centralkörpers fällt nicht mit der Fläche, welcher die Flecke angehören, zusammen, sein Durchmesser ist kleiner als der Durchmesser dieser Fläche. Die ihn umhüllende Materie bewegt sich um dieselbe Axe, doch hat sie auf verschiedenen Parallelkreisen verschiedene Winkelgeschwindigkeit. Die Unterschiede der mittleren Winkelgeschwindigkeiten werden in den Bewegungen der Flecke bemerkbar. Wesentlich durch den fortdauernden Einfluss der inneren Reibung werden die bestehenden atmosphärischen Strömungen allmählich vernichtet, doch ergeben sich für die Zeiträume, innerhalb welcher die Geschwindigkeit sich um einen merkbaren Betrag ändert, wahrscheinliche Grenzwerte, gegen welche die Zeit, für welche Beobachtungen vorliegen, verschwindend klein ist, und welche den betrachteten Bewegungszustand als eine der Entwicklungsstufe der Sonne eigenthümliche Erscheinung säcularen Charakters erkennen lassen.

Die folgenden Zeilen sollen die Möglichkeit darthun, die Periodicität der Sonnenflecke auf bestimmte mechanische Vorgänge zurückzuführen, welche in der Constitution der Sonne selbst ihre Begründung finden. Dass auf diesem Wege, nämlich durch Kräfte, welche im Innern des Sonnenkörpers ihren Sitz haben, die Erklärung der merkwürdigen Erscheinung zu suchen ist, dürfte die allgemeiner verbreitete Anschauung sein. Die Versuche, die Häufigkeit der Sonnenflecke in Beziehung zu den Stellungen der Planeten zu setzen, führen insofern zu keinem befriedigenden Resultate, als der für einzelne Epochen annähernd vorhandene Parallelismus zwischen den Entfernungen der Planeten und der Fleckenzahl durch ebenso ausgedehnte Zeiträume unterbrochen wird, in welchen keine Uebereinstimmung stattfindet, so dass die Coincidenzen nur als zufällige anzusehen sind. Auch ist die directe Einwirkung der Planeten auf die Sonne eine zu geringe, als dass die gewaltigen mechanischen Vorgänge im Innern des Sonnenkörpers, welche durch die Sonnenflecke der Beobachtung zugänglich werden, auf diese Weise verständlich werden könnten.

Die Möglichkeit der Erklärung der Periodicität, auf welche ich hinweisen möchte, wird wesentlich, man darf behaupten allein, durch die Vorstellung bedingt, welche man sich von den Eigenschaften der Materie unter den Druck- und Temperaturverhältnissen bildet, welche im Innern des Sonnenkörpers bestehen. Die Temperaturschätzungen der Oberflächenschichten schwanken zwischen vielen Millionen und wenigen tausend Graden, obgleich auf die exorbitanten Werthe Secchi's geringeres Gewicht zu legen ist. Gänzlich unbekannt bleibt das Gesetz, nach welchem die Temperaturänderung im Innern stattfindet. Indessen ist mit Sicherheit anzunehmen, dass die Temperaturen in den tieferen Schichten diejenigen an der Oberfläche übertreffen. Unter diesen Umständen darf man nur voraussetzen, dass die Temperatur im Innern noch oberhalb des kritischen Punktes der in der Sonne beobachteten Substanzen liegt. Nimmt man die Gültigkeit des von Andrews gefundenen Gesetzes, auch für die Druck- und Temperaturwerthe an, um welche es sich hier handelt, so wird man genöthigt sein, die Möglichkeit eines flüssigen oder festen Sonnenkerns zu leugnen. Die

Vorstellung einer vollkommen gasförmigen Constitution des Sonnenkörpers dürfte in der That die zur Zeit am meisten verbreitete sein. Ich bemerke jedoch, dass die unten mitgetheilten Ausführungen nicht wesentlich durch diese Annahme bedingt werden, dass im Gegentheil das Vorhandensein flüssiger Bestandtheile ihre Wahrscheinlichkeit noch erhöhen würde. Bei so ausserordentlich hohen Temperaturen und gesteigertem Drucke — trotz der geringen mittleren Dichtigkeit der Sonne ist doch bei dem mit der Tiefe zunehmenden Drucke im Innern eine Dichtigkeit denkbar, welche die mittlere Dichtigkeit der Erdoberfläche erreicht oder noch erheblich übertrifft — wird aber das Gas Eigenschaften zeigen, welche bei gewöhnlichen Verhältnissen wenig hervortreten. Nach den theoretischen Untersuchungen von Maxwell, welche durch Versuche von O. E. Meyer ihre Bestätigung gefunden haben, nimmt der Werth des inneren Reibungscoefficienten der Gase proportional der absoluten Temperatur zu. Young vergleicht die Beschaffenheit des Gases mit Rücksicht auf den gegen Bewegung geleisteten Widerstand mit Pech (Young »The Sun« pag. 286), so dass der wesentliche Unterschied von einer Flüssigkeit nur darin bestehen würde, dass das Gas bei vermindertem Drucke keine freie Oberfläche zu bilden vermag. Giebt man auch zu, dass die Materie im Ruhestande unter diesen Bedingungen die Eigenschaften einer vollkommenen Flüssigkeit besitzt, dass der Druck in jedem Punkt normal zur Grenzfläche ist, und Torsion- und tangentialwirkende Kräfte, also Spannungen nicht vorkommen, so findet dies doch, sobald es sich um hydrodynamische Aufgaben handelt, nicht mehr statt. Es fragt sich, zu welchen Consequenzen Veränderungen der Massenvertheilung mit Rücksicht auf die der Materie im Innern des Sonnenkörpers beigelegten Eigenschaften führen. Man darf erwarten, dass in Verbindung mit der Rotationsbewegung Erscheinungen hervortreten, welche in gewisser Beziehung denjenigen analog sind, auf welche G. A. Darwin in seiner Abhandlung: On the Influence of Geological Changes on the Earth's Axis of Rotation (Philosophical Transactions 1877 Part I) und neuerdings Schiaparelli (De la Rotation de la Terre sous l'influence des actions Géologiques) aufmerksam gemacht haben. Finden nämlich die gedachten Massenverschiebungen, als welche auch die in Folge seiner Abkühlung stattfindende Zusammenziehung des Sonnenkörpers zu betrachten ist, nicht vollkommen symmetrisch statt, so muss, selbst wenn zu einer bestimmten Zeit die Rotation um die kleinste Hauptträgheitsaxe stattgefunden hätte, die Coincidenz der Umdrehungs- und Symmetrieaxe bald gestört werden. Die bewegliche Masse strebt allerdings diese Störung auszugleichen und einen Gleichgewichtszustand herzustellen, in welchem wiederum beide Axen zusammenfallen; allein die Reibung setzt der Bewegung einen Widerstand entgegen, welcher die Ausgleichung verzögert und das Anwachsen der Gleichgewichtsstörung bis zu einem bestimmten Betrage ermöglicht. Bei der Erde fand die Ausgleichung der entstehenden Spannungen, wie Darwin ausführt, durch Erdbeben hauptsächlich zu den Epochen statt, wo die Hauptträgheitsaxe den grössten Winkel mit der Umdrehungsaxe einschloss. Analog hätte man im vorliegenden Falle den Anlass zur Entstehung einer

Periode im Zusammenwirken zweier Vorgänge zu suchen, in einer durch fortschreitende Veränderungen, welche einen säcularen Charakter tragen, bewirkten Verschiebung der Rotationsaxe gegen die Symmetrieaxe und in einer plötzlich einsetzenden Ausgleichung, wenn die innere Reibung den Kräften, welche auf die Herstellung des Gleichgewichtszustandes gerichtet sind, nicht mehr Widerstand zu leisten vermag. Die äusseren Reactionen dieser Vorgänge werden wesentlich durch die Sonnenflecke und Protuberanzen bemerkbar. Auch für die Häufigkeitscurve der Sonnenflecke ist das verhältnissmässig schnelle Anwachsen nach dem Minimum charakteristisch; es findet eine Discontinuität statt, welche sich auch in der Thatsache widerspiegelt, dass die heliocentrische Zone grösster Häufigkeit nach dem Minimum, sprunghaft vom Aequator nach den Polen rückt.

Es ist ersichtlich, wie die Regelmässigkeit des Verlaufs durch Nebenumstände beträchtlich modificirt werden kann, so dass nur in den Mittelwerthen einer grossen Anzahl von Perioden eine Uebereinstimmung zu erwarten ist. Auch in dieser Beziehung ist also eine bessere Anpassung an die thatsächlichen Verhältnisse möglich, als es die Regelmässigkeit planetarischer Bewegungen gestattet. Finden ferner die Reactionen vorzugsweise an den Stellen und in derjenigen Richtung statt, wo die bewegenden Kräfte ihr Maximum erreichen, so hat man in der Nähe des Aequators die beträchtlichsten Wirkungen zu erwarten.

Die versuchte Erklärung der Periodicität beruht also auf den physikalischen Eigenschaften, welche man der Materie im Innern des Sonnenkörpers auf Grund unserer allerdings beschränkten Erfahrungen glaubt beilegen zu

dürfen. Doch wird man zugeben müssen, dass die vorausgesetzten Eigenschaften in einer bestimmten Entwicklungsphase nothwendig vorhanden sein werden. Gleichfalls auf die Annahme einer relativen Bewegung der Umdrehungsaxe und Hauptträgheitsaxe hat Gylden seine Theorie der veränderlichen Sterne gegründet. Er sagt, es sei keineswegs bewiesen: »dass wir überhaupt bei den Himmelskörpern das Zusammenfallen der Rotationsaxe mit der kleinsten Trägheitsaxe zu erwarten haben«. »Die Sterne bilden sehr viel grössere Massen, als unsere Planeten, und rotiren, wie es scheint, im Allgemeinen langsamer. Bei solchen Körpern müssen aber die Unterschiede der Trägheitsmomente, insofern diese Unterschiede durch die Umdrehung selbst hervorgerufen werden, ähnlich wie bei unserer Sonne, sehr klein sein, können jedoch, wenn andere Ursachen auf die Massenvertheilung einwirken, nicht unbedeutliche Werthe annehmen, und zwar in solcher Weise, dass die Hauptaxe sich beliebig von der augenblicklichen Umdrehungsaxe entfernt«. (Theorie zur Erklärung des Lichtwechsels der veränderlichen Sterne pag. 4 und 5).

Schliesslich möge darauf hingedeutet werden, dass auf dem angezeigten Wege, insofern den an der Oberfläche hervortretenden Vorgängen ein das Innere des Sonnenkörpers erfassender Bewegungszustand substituirt wird, auch die kosmischen Einwirkungen, welche mit der wechselnden Häufigkeit der Sonnenflecke verknüpft zu sein scheinen, leichter verständlich werden; erwähnt seien vorzüglich die Einwirkungen auf den Erdmagnetismus, welche von Lamont, Sabine, Wolf zuerst mit Sicherheit durch Discussion der Beobachtungen nachgewiesen, von Zöllner und neuerdings von Ch. Lagrange theoretisch behandelt worden sind.

Potsdam, Astrophysikalisches Observatorium, 1891 April 8.

Ueber β Aurigae.

Bemerkungen zu Nr. 3017 der Astr. Nachr.

Von H. C. Vogel.

1.

In Nr. 3017 der Astr. Nachr. habe ich die auf dem Potsdamer Observatorium ausgeführten spectrographischen Beobachtungen an β Aurigae und ζ Ursae majoris mitgetheilt und in Bezug auf den ersten Stern auf S. 269 die Bemerkung gemacht, dass es mit kräftigeren Hilfsmitteln als den mir zu Gebote stehenden und mit Anwendung eines Spaltspectrographen nicht schwer sein dürfte, die Bahnbewegung der Componenten des Doppelsterns einzeln zu bestimmen. Ich habe später noch einige Versuche angestellt, mit dem hiesigen Instrument nach dieser Richtung hin etwas weiter zu kommen. Es hat sich hierbei ergeben, dass die Mg -Linie ($448 \mu\mu$) in dem künstlich erzeugten Spectrum sich nicht als Vergleichsobject eignet, da sie beim Ueberspringen des Funkens vom Mg -Elektroden in freier Luft stets breit und verwaschen erscheint und keine sichere Messung mit der im Stern scharf begrenzten und nur wenig verbreiterten entsprechenden Linie zulässt. Dagegen eignet

sich das Fe -Spectrum gut als Vergleichsspectrum, indem es in der Nähe der erwähnten Mg -Linie nur wenige und zarte Linien besitzt. Da das Maximum der Trennung der Spectrallinien von β Aurigae im Februar und März in eine Zeit fiel, zu welcher der Stern nicht gut zu beobachten war, habe ich derartige Beobachtungen einstweilen unterlassen, und nur versucht, ob aus den früher gemachten photographischen Aufnahmen weitere Schlüsse über eine etwaige — in Folge ungleicher Massen — verschiedene Bahngeschwindigkeit der Componenten des Systems gezogen werden können, da aus der Wahrnehmung, dass die Spectra beider Körper nahezu gleiche Helligkeit besitzen, ohne Weiteres kein Schluss auf Gleichheit der Massen zulässig ist.

Zunächst ergibt sich direct aus den Beobachtungen über die Bewegung des Systems gegen die Sonne, dass der Schwerpunkt beider Körper sehr nahe in der Mitte der Verbindungslinie beider Körper gelegen sein muss, indem die Beobachtungen an den einzelnen Abenden bei ver-