DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XX.

*I. Theorie der Dispersion;
von L. Lorenz in Kopenhagen.*

Da sowohl die Gesetze der Lichtbewegung in einem vollkommen homogenen und durchsichtigen Mittel, als auch die Gesetze der Bewegungen beim Uebergang von einem solchen Mittel in ein anderes ähnliches bekannt sind, so wird es möglich sein, ohne irgend eine Hypothese die Lichtbewegungen im Inneren eines nicht homogenen, überall vollkommen durchsichtigen Mittels zu berechnen, wenn nur die Lichtgeschwindigkeit, die einzige Grösse, worauf es hier ankommt, in jedem Punkte des Mittels bekannt ist. Ich werde es hier versuchen, eine solche Berechnung auszuführen, um dadurch das Gesetz der gewöhnlichen Dispersion eines isotropen durchsichtigen Körpers, namentlich die Abhängigkeit derselben von der Wellenlänge und der Körperdichte abzuleiten.

Die allgemeinen, einer variablen Fortpflanzungsgeschwindigkeit entsprechenden Gesetze der Lichtbewegungen habe ich schon vor zwanzig Jahren in meiner Theorie des Lichtes entwickelt. Ich werde im Folgenden, ohne mich auf meine früheren Arbeiten zu beziehen, diese allgemeinen Gesetze aufs neue und in einfacherer Weise ableiten.

Da es sich ferner darum handelt, die Lichtbewegungen im Inneren eines Körpers zu berechnen, so muss eine bestimmte Constitution des Körpers vorausgesetzt werden. Es kann wohl keinem Zweifel mehr unterliegen, dass die Körper aus discreten Atomen oder Moleculen bestehen, und aus meiner Theorie der Refractionsconstante, die sich in schöner Uebereinstimmung mit der Erfahrung gezeigt hat, geht ferner hervor, dass ein Theil des Lichtmediums bei allen physischen

Zustandsänderungen des Körpers mit den Atomen unveränderlich verbunden ist, während in dem übrigen Zwischenraume das Licht mit derselben Geschwindigkeit wie im leeren Raume oder im Weltraume sich fortpflanzt. Im übrigen bleibt ein weites Feld für Hypothesen in Betreff der Gruppierung der Atome und der Abhängigkeit des Lichtmittels von dieser Gruppierung noch offen, allein für den Anfang muss die Berechnung sich auf die möglichst einfachen Voraussetzungen beschränken. Ich nehme demnach an, dass die Geschwindigkeit des Lichtes in der Nähe der Atome, die ich als mathematische Punkte auffasse, eine Function der Entfernung vom Atome ist, welche Function für alle Atome des Körpers die nämliche bleibt, dass ferner in grösseren Entfernungen die Geschwindigkeit derjenigen im leeren Raume gleich ist, und endlich, dass die Atome beliebig, jedoch den Bedingungen der Isotropie Genüge leistend, gelagert sind.

Man wird hier den Einwand machen können, dass die inneren Bewegungen der Atome eine festgestellte Thatsache sind, welche in Betracht genommen werden muss. Nach den für jetzt gangbaren Vorstellungen sind diese Bewegungen doppelter Art, theils solche, die als mit der Wärme identisch betrachtet werden, theils andere, die im Einklange mit den Schwingungen des Lichtes vor sich gehen und als Ursache des Absorptions- und Emissionsvermögens der Körper angenommen werden.

Ogleich ich in keiner Weise die Identität der inneren molecularen Bewegungen mit der Wärme als bewiesen erachte, so bezweifle ich die Existenz solcher Bewegungen gar nicht, allein die hier in Rede kommenden Geschwindigkeiten werden im Vergleich mit derjenigen des Lichtes immerhin so klein sein, dass sie auf die Lichtbewegungen keinen merklichen Einfluss haben können. Die einzige bekannte Spur einer Einwirkung der Körperbewegung auf die Lichtbewegung (von dem sehr zweifelhaften, dreiunddreissig Jahre alten Versuche Fizeau's über den Durchgang des Lichtes durch strömendes Wasser abgesehen) ist die Aberration der Sterne, allein die molecularen Geschwindigkeiten sind noch viel kleiner als diejenige der Erde im Weltraume.

Die andere Art von Bewegungen bildet die Grundlage der neueren Arbeiten über die Absorption und Emission des Lichtes. Man hätte gegen die Annahme dieser Bewegungen den Einwand machen können, dass, wenn die Atome eines Körpers mit dem Lichte im Einklange 500 Billionen Schwingungen in der Secunde machen sollen, so ungeheure Kräfte im Inneren des Körpers vorhanden sein müssten, dass eine Verschiebung der in einem Gramm enthaltenen Atome um einen Billionstel Millimeter aus der Gleichgewichtslage einen Druck von einer Billion Kilogramm erfordern würde. Die Hypothese ist doch nicht deshalb erfunden, um irgend eine unmittelbar vom Licht erzeugte Massenbewegung zu erklären, da wir überhaupt keine solche Wirkungen von dem Lichte kennen, sondern nur zur Erklärung gewisser optischer Erscheinungen, die auch vielleicht in anderer Weise erklärt werden können. Wie dem auch sein mag, in jedem Falle wird es zunächst nothwendig sein, die Mitschwingungen des die Atome umgebenden Lichtmittels zu berechnen, unter der Voraussetzung, dass die Atome selbst in Ruhe sind. Wenn es sich alsdann nothwendig zeigen sollte, die Mitschwingungen der Atome in die Rechnung einzuführen, so würde man immerhin nachher diesen nächsten Schritt machen können.

Die allgemein anerkannten Gesetze der Lichtschwingungen eines isotropen und vollkommen homogenen Mittels können bekanntlich durch die folgenden Gleichungen dargestellt werden:

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta_2 \xi = \frac{d^2 \xi}{a^2 dt^2}, & \Delta_2 \eta = \frac{d^2 \eta}{a^2 dt^2}, & \Delta_2 \zeta = \frac{d^2 \zeta}{a^2 dt^2}, \\ \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0 = 0, \end{cases}$$

wo die Componenten der Schwingungen durch ξ , η , ζ ausgedrückt sind, und zur Abkürzung:

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

gesetzt ist. Es bedeutet hier a die constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes.

Beim Uebergang von einem solchen Mittel in ein an-

deres ähnliches, in welchem die Geschwindigkeit eine andere ist, befolgt der Lichtstrahl das bekannte Sinusgesetz, während nach den von Fresnel entdeckten Gesetzen die Amplituden der einfallenden, gebrochenen und reflectirten Strahlen sich wie:

$$1 : \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} : \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)},$$

wenn die Schwingungen des einfallenden Lichtes in der Einfallsebene liegen, und wie:

$$1 : \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} : - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)},$$

wenn die Schwingungen des einfallenden Lichtes senkrecht gegen die Einfallsebene sind. Hier ist α der Einfallswinkel und β der Brechungswinkel. Die Polarisationssebene ist dabei senkrecht zur Schwingungsrichtung angenommen.

Die von mir entwickelte Theorie geht allein davon aus, dass diese Gesetze allgemein gültig sind, in der Weise, dass alle Abweichungen von diesen Gesetzen nur davon herrühren, dass kein Körper vollkommen homogen ist, und dass der Uebergang von einem Mittel in ein anderes allmählich, ohne Unterbrechung der Stetigkeit, vor sich geht.

Die obigen Gesetze können auch in anderer Weise ausgedrückt werden. Es sei die Coordinatenebene yz die Grenzfläche der beiden Mittel. Alsdann geht aus den angenommenen Gesetzen hervor, dass die vier Grössen:

$$\eta, \quad \zeta, \quad \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}, \quad \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz},$$

an beiden Seiten der Grenzfläche gleiche Werthe haben. Aus diesem Satze können auch umgekehrt die genannten Gesetze sehr leicht abgeleitet werden. Man sieht also ein, dass z. B.:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) \text{ und: } \frac{d}{dz} \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right),$$

überall, auch für $x = 0$, endlich sind. Durch Addition dieser beiden Grössen ergibt sich:

$$A_2 \eta - \frac{d\theta}{dy}.$$

Dieser Ausdruck hat also überall einen endlichen Werth. Man wird demnach, der zweiten der Gleichungen (1) zufolge, gemeinschaftlich für beide Mittel die Gleichung:

$$A_2 \eta - \frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2}$$

bilden können, indem durch ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die für $x < 0$ und für $x > 0$ verschiedene Werthe annimmt, ausgedrückt ist. In ganz ähnlicher Weise kann aus den obigen Grenzbedingungen die Gleichung:

$$A_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2},$$

abgeleitet werden und, da die yz -Ebene willkürlich als Grenzebene gewählt ist, durch Umsetzung der Buchstaben:

$$A_2 \xi - \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2}.$$

In dieser Weise sind also alle Gesetze der Lichtbewegungen durch drei partielle Differentialgleichungen ausgedrückt, aus welchen Gleichungen wiederum die Gesetze, von welchen wir ausgegangen sind, leicht abgeleitet werden können. Die gewonnenen Differentialgleichungen müssen auch gültig bleiben, wenn ω als eine beliebige Function von x , y und z betrachtet wird. Sie enthalten eigentlich nichts Neues, und man hätte sie entbehren können, allein für die praktische Rechnung sind sie von grossem Belange.

Beschränken wir uns auf eine einfache Wellenbewegung mit gegebener Schwingungsdauer, so kann die Abhängigkeit von der Zeit t durch den gemeinsamen complexen Factor $e^{k i t}$ ausgedrückt werden. Wenn:

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \mu$$

gesetzt wird, so gehen die obigen Differentialgleichungen über in:

$$(2) \quad \begin{cases} A_2 \xi - \frac{d\theta}{dx} + \mu \xi = 0, & A_2 \eta - \frac{d\theta}{dy} + \mu \eta = 0, \\ A_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz} + \mu \zeta = 0. \end{cases}$$

Ich werde zunächst die Lichtbewegungen in einem aus concentrischen kugelförmigen Schichten bestehenden Mittel berechnen, in welchem die Geschwindigkeit des Lichtes eine

Function der Entfernung r vom Mittelpunkte ist. Innerhalb jeder dieser Schichten wird μ constant angenommen, während beim Uebergange aus einer Schicht zur anderen μ andere Werthe annimmt. Auch in dem Falle, dass μ eine stetige Variable ist, wird es offenbar erlaubt sein, diese Supposition festzuhalten, da immerhin die Dicke der Schichten beliebig klein gewählt werden können.

Wird: $x\xi + y\eta + z\zeta = \varrho$
gesetzt, und werden die Gleichungen (2) bez. mit x , y und z multipliziert, so bekommt man durch Addition:

$$(3) \quad A_2 \varrho - \frac{dr^2 \theta}{r dr} + \mu \varrho = 0.$$

Dieselben Gleichungen (2) nach x , y und z differenziert und addirt, geben:

$$(4) \quad \mu \theta + \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{\varrho}{r} = 0.$$

Während μ sich in den Grenzflächen zweier Schichten unstetig ändert, verlaufen gewisse Functionen der Schwingungscomponenten überall stetig. So geht aus der Gleichung (3) hervor, dass:

$$\frac{dr^2 \varrho}{r dr^2} - \frac{dr^2 \theta}{r dr}$$

überall endlich ist, woraus folgt, dass:

$$\frac{dr \varrho}{dr} - r^2 \theta,$$

eine stetige Function ist, die also an den beiden Seiten jeder Grenzfläche, in welcher μ sich unstetig ändert, denselben Werth hat. Ich werde dieses kurz durch die Bezeichnung:

$$\left[\frac{dr \varrho}{dr} - r^2 \theta \right] = 0,$$

ausdrücken. Da ferner an beiden Seiten der Grenzfläche μ constant, und demnach $\theta = 0$ ist, so reducirt sich diese Grenzbedingung zu:

$$(5) \quad \left[\frac{dr \varrho}{dr} \right] = 0.$$

Eine andere Grenzbedingung ergibt sich daraus, dass:

$$\theta - \frac{d}{dr} \frac{\varrho}{r}$$

eine überall endliche Grösse sein muss, indem nämlich die Derivirten nach r einander aufheben. Wenn der in der Gleichung (4) gegebene Werthe von θ eingesetzt wird, geht der obige Ausdruck in:

$$-\frac{1}{\mu} \frac{d}{dr} \frac{\mu \varrho}{r}$$

über, woraus folgt, dass $\mu \varrho$ eine stetige Function ist, und dass also für alle Grenzflächen:

$$(6) \quad [\mu \varrho] = 0$$

ist. Diese beiden Grenzbedingungen in Verbindung mit der innerhalb jeder Schicht, in welcher μ constant ist, geltenden Differentialgleichung:

$$(7) \quad A_2 \varrho + \mu \varrho = 0,$$

genügen, um ϱ zu bestimmen.

Wenn in der ersten der Gleichungen (2) $x = r \cos \varphi$ gesetzt wird, so ersieht man, dass:

$$\frac{d^2 r \xi}{dr^2} - \frac{d\theta}{dr} r \cos \varphi + \frac{d\theta}{d\varphi} \sin \varphi$$

eine überall endliche Grösse ist. Da ferner, wie oben gezeigt ist:

$$\frac{d^2 r \varrho}{dr^2} - \frac{dr^2 \theta}{dr} \text{ und: } \theta - \frac{d}{dr} \frac{\varrho}{r}$$

ebenfalls überall endliche Grössen sind, so leitet sich hieraus ab, dass:

$$\frac{d^2 r \xi}{dr^2} - \cos \varphi \frac{d^2 \varrho}{dr^2} + \sin \varphi \frac{d^2}{dr d\varphi} \frac{\varrho}{r}$$

überall endlich ist. Nachdem dieser Ausdruck in:

$$\frac{d^2 r \xi}{dr^2} - \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varrho}{dx} \right)$$

umgestaltet ist, ergibt sich hieraus die Grenzbedingung:

$$(8) \quad \left[\frac{dr \xi}{dr} - \frac{d\varrho}{dx} \right] = 0.$$

Da ferner der letztere Ausdruck und also auch:

$$\frac{dr \xi}{dr} - \frac{d\varrho}{dr} \cos \varphi$$

überall endlich ist, so bekommt man als zweite Grenzbedingung:

$$(9) \quad [r^2 \xi - \varrho x] = 0.$$

In Analogie mit diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

$$(10) \quad \begin{cases} \left[\frac{dr\eta}{dr} - \frac{d\rho}{dz} \right] = 0, & [r^2\eta - \rho y] = 0, \\ \left[\frac{dr\zeta}{dr} - \frac{d\rho}{dz} \right] = 0, & [r^2\zeta - \rho z] = 0, \end{cases}$$

welchen Grenzbedingungen sich die innerhalb der Grenzflächen geltenden Differentialgleichungen:

$$(11) \quad A_2 \xi + \mu \xi = 0, \quad A_2 \eta + \mu \eta = 0, \quad A_2 \zeta + \mu \zeta = 0,$$

anschiessen. Ausserdem soll hier $\theta = 0$ sein.

Die Functionen ρ, ξ, η, ζ können in Reihen nach Kugelfunctionen entwickelt werden. Ich werde indessen hier eine von der gewöhnlichen abweichende Form benutzen, wodurch eine bedeutende Erleichterung in der Berechnung gewonnen wird. Es werde:

$$V_n^m = \frac{d^n}{dx^{n-m} dy^m} \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

gesetzt. Ich beschränke mich auf den Fall, dass ρ, ξ und η gerade Functionen von z sind, ζ eine ungerade Function von z ist, werde die folgenden Reihenentwickelungen einführen:

$$(12) \quad \rho = \sum \rho_n^m V_n^m, \quad \xi = \sum \xi_n^m V_n^m, \quad \eta = \sum \eta_n^m V_n^m, \quad \zeta = \sum \zeta_n^m \frac{d}{dz} V_{n-1}^m,$$

wo die Summenzeichen bedeuten, dass m alle ganze Werthe von $m=0$ bis $m=n$ oder in der letzten Reihe bis $m=n-1$, und n alle ganze positiven Werthe von $n=0$ bis $n=\infty$ durchlaufen. Die Coëfficienten $\rho_n^m, \xi_n^m, \eta_n^m, \zeta_n^m$ sind Functionen von r allein. Ferner sei bemerkt, dass die Derivirten höherer Ordnung als erster nach z , wenn solche im Laufe der Rechnung vorkommen, mittelst der Gleichung:

$$A_2 V_n^m = 0,$$

zu eliminiren sind. Ausserdem ergibt sich aus der Definition von V_n^m :

$$\frac{dV_n^m}{dr} = -\frac{n+1}{r} V_n^m.$$

Wenn die Reihenentwickelungen in die Gleichungen (7) und (11) eingesetzt werden, so ersieht man, dass die Coëfficienten $\rho_n^m, \xi_n^m, \eta_n^m, \zeta_n^m$ der Differentialgleichung:

$$(13) \quad \frac{d^2 f_n}{dr^2} - \frac{2n}{r} \frac{df_n}{dr} + \mu f_n = 0$$

genügen müssen. Zwei particuläre Integrale dieser Gleichung sind:

$$(14) \quad \begin{cases} \varphi_n = r^{2n+1} \left(1 - \frac{\mu r^2}{2(2n+3)} + \frac{\mu^2 r^4}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} - \dots \right) \\ \psi_n = 1 + \frac{\mu r^2}{2(2n-1)} + \frac{\mu^2 r^4}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} + \dots \end{cases}$$

Man wird demnach:

$$(15) \quad \begin{cases} \varrho_n^m = k_n^m \varphi_n + \kappa_n^m \psi_n, & \xi_n^m = \alpha_n^m \varphi_n + \alpha_n^m \psi_n, \\ \eta_n^m = b_n^m \varphi_n + \beta_n^m \psi_n, & \zeta_n^m = c_n^m \varphi_n + \gamma_n^m \psi_n \end{cases}$$

setzen können, indem alle diese neu eingeführten Coëfficienten, die in derselben Weise wie μ innerhalb jeder Schicht constant sind, von einer Schicht zur anderen verschiedene Werthe annehmen.

Aus den Gleichungen (14) ergibt sich:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_n}{rdr} = (2n+1) \varphi_{n-1}, & \frac{d\psi_n}{rdr} = \frac{\mu}{2n-1} \psi_{n-1}, \\ r^{2n+2} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}} = -\frac{\mu}{2n+3} \varphi_{n+1}, \\ r^{2n+2} \frac{d}{dr} \frac{\psi_n}{r^{2n+1}} = -(2n+1) \psi_{n+1}. \end{cases}$$

Ferner gehen aus der Definition von V_n^m die Gleichungen:

$$x V_0^0 + r^2 V_1^0 = 0, \quad y V_0^0 + r^2 V_1^1 = 0$$

hervor. Wird die erste Gleichung $n-m$ mal nach x und m mal nach y , und ebenso die zweite Gleichung $n-m+1$ mal nach x und $m-1$ mal nach y differenziert, so bekommt man zwei Gleichungen, die leicht in die folgenden transformirt werden können:

$$(17) \quad \begin{cases} (2n+1) x V_n^m = -r^2 V_{n+1}^m - (n^2 - m^2) V_{n-1}^m \\ \quad \quad \quad + m(m-1) V_{n-1}^{m-2} \\ (2n+1) y V_n^{m-1} = -r^2 V_{n+1}^{m-1} + (n-m+1)(n-m) V_{n-1}^m \\ \quad \quad \quad - (2n-m+1)(m-1) V_{n-1}^{m-2}. \end{cases}$$

In ähnlicher Weise und mit Beachtung der letzteren Gleichungen erhält man:

$$(18) \left\{ \begin{aligned} (2n+1)zV_n^m &= -r^2 \frac{d}{dz} V_n^m + (n-m)(n-m-1) \frac{d}{dz} V_{n-2}^m \\ &\quad + m(m-1) \frac{d}{dz} V_{n-2}^{m-2}. \end{aligned} \right.$$

Wenn ferner diese Gleichung nach z differenziert und $n-1$ anstatt n eingesetzt wird, so ergibt sich:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} (2n+1)z \frac{d}{dz} V_{n-1}^m &= r^2 V_{n+1}^{m+2} + r^2 V_{n+1}^m \\ &\quad - (n-m-1)(n-m-2) V_{n-1}^{m+2} \\ &\quad - ((n-m-1)^2 + n + m^2) V_{n-1}^m - m(m-1) V_{n-1}^{m-2}. \end{aligned} \right.$$

Die vier Grössen ϱ , ξ , η , ζ sind durch die Gleichungen:

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \varrho, \quad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

miteinander verknüpft. Die hieraus entspringenden Beziehungen zwischen den Coëfficienten der Reihen (12) können aus den folgenden Reihenentwickelungen, wo s eine beliebige Zahl ist, abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \frac{dr^s x\xi}{dr} - r^{s+1} \frac{d\xi}{dx} &= \sum \xi_n^m ((s-n)r^{s-1}xV_n^m - r^{s+1}V_{n+1}^m) \\ \frac{dr^s y\eta}{dr} - r^{s+1} \frac{d\eta}{dy} &= \sum \eta_n^m ((s-n)r^{s-1}yV_n^m - r^{s+1}V_{n+1}^{m+1}) \\ \frac{dr^s z\zeta}{dr} - r^{s+1} \frac{d\zeta}{dz} &= \sum \zeta_n^m ((s-n)r^{s-1}z \frac{d}{dz} V_{n-1}^m + r^{s+1}(V_{n+1}^m + V_{n+1}^{m+2})). \end{aligned}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen bekommt man auf der linken Seite:

$$\frac{dr^s \varrho}{dr} = \sum \frac{dr^{s-n-1} \varrho_n^m}{dr} r^{n+1} V_n^m.$$

Auf der rechten Seite werden die oben gefundenen Werthe von xV_n^m , yV_n^m und $z(d/dz)V_{n-1}^m$ eingesetzt, wonach an beiden Seiten die Coëfficienten von V_n^m einander gleich gesetzt werden. In dieser Weise findet man, wenn $s = n+1$ eingesetzt wird:

$$(20) \quad \frac{2n-1}{2n+1} r \frac{d\varrho_n^m}{dr} + \xi_{n-1}^m + \eta_{n-1}^{m-1} - \zeta_{n-1}^m - \zeta_{n-1}^{m-2} = 0$$

und, wenn $s = -n$ gesetzt wird:

$$(20) \left\{ \begin{aligned} & \frac{2n+3}{2n+1} r^{2n+2} \frac{d}{dr} \frac{\varrho_n^m}{r^{2n+1}} + (m+2)(m+1) \xi_{n+1}^{m+2} - ((n+1)^2 - m^2) \xi_{n+1}^m \\ & - (m+1)(2n-m+1) \eta_{n+1}^{m+1} + (n-m+2)(n-m+1) \eta_{n+1}^{m-1} \\ & - (m+2)(m+1) \zeta_{n+1}^{m+2} - ((n-m)^2 + m^2 + n+1) \zeta_{n+1}^m \\ & - (n-m+2)(n-m+1) \zeta_{n+1}^{m-2} \end{aligned} \right\} =$$

Wenn in diesen Gleichungen die in den Gleichungen (15) gegebenen Werthe von ϱ_n^m , u. s. w. eingesetzt werden, so ergibt sich mittelst der Gleichungen (16):

$$(22) \left\{ \begin{aligned} & (2n-1) k_n^m + a_{n-1}^m + b_{n-1}^{m-1} - c_{n-1}^m - c_{n-1}^{m-2} = 0 \\ & \frac{\mu}{2n+1} x_n^m + \alpha_{n-1}^m + \beta_{n-1}^{m-1} - \gamma_{n-1}^m - \gamma_{n-1}^{m-2} = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(23) \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\mu}{2n+1} k_n^m + (m+2)(m+1) a_{n+1}^{m+2} - ((n+1)^2 - m^2) a_{n+1}^m \\ & - (m+1)(2n-m+1) b_{n+1}^{m+1} + (n-m+2)(n-m+1) b_{n+1}^{m-1} \\ & - (m+2)(m+1) c_{n+1}^{m+2} - ((n-m)^2 + m^2 + n+1) c_{n+1}^m \\ & - (n-m+2)(n-m+1) c_{n+1}^{m-2} \\ & - (2n+3) x_n^m + (m+2)(m+1) \alpha_{n+1}^{m+2} - ((n+1)^2 - m^2) \alpha_{n+1}^m \\ & - (m+1)(2n-m+1) \beta_{n+1}^{m+1} + (n-m+2)(n-m+1) \beta_{n+1}^{m-1} \\ & - (m+2)(m+1) \gamma_{n+1}^{m+2} - ((n-m)^2 + m^2 + n+1) \gamma_{n+1}^m \\ & - (n-m+2)(n-m+1) \gamma_{n+1}^{m-2} \end{aligned} \right\} = 0.$$

Ausser diesen Beziehungen zwischen den Coëfficienten, die innerhalb jeder Schicht, in welcher μ constant ist, auch constant bleiben, müssen die zwischen den verschiedenen Coëfficienten je zweier angrenzender Schichten stattfindenden Beziehungen aufgesucht werden. Es seien die einer angrenzenden inneren Schicht entsprechenden Coëfficienten durch einen Accent bezeichnet. Alsdann geht aus den Gleichungen (5) und (6) hervor, wenn r der Halbmesser der Grenzfläche ist:

$$(24) \left\{ \begin{aligned} & k_n^m \frac{dr^{-n} \varphi_n}{dr} + x_n^m \frac{dr^{-n} \psi_n}{dr} = k_n'^m \frac{dr^{-n} \varphi_n'}{dr} + x_n'^m \frac{dr^{-n} \psi_n'}{dr}, \\ & \mu (k_n^m \varphi_n + x_n^m \psi_n) = \mu' (k_n'^m \varphi_n' + x_n'^m \psi_n'), \end{aligned} \right.$$

indem φ_n' und ψ_n' die nämlichen Functionen wie φ_n und ψ_n , nur mit Aenderung von μ in μ' , sind.

Wenn die Grenzfläche diejenige ist, die dem Mittelpunkt am nächsten liegt, so gehören die Coëfficienten k_n^m und κ_n^m der centralen Kugelschicht an. Es müssen aber hier alle Coëfficienten κ_n^m verschwinden, da im entgegengesetzten Falle im Mittelpunkte selbst der Werth von ρ unendlich sein würde, und aus den beiden Gleichungen (24) kann ferner k_n^m eliminirt werden. Von hier aus kann zur nächsten Grenzfläche gegangen werden und so weiter, woraus hervorgeht, dass für jede beliebige Schicht eine Gleichung:

$$(25) \quad \kappa_n^m = p_n k_n^m$$

gefunden werden kann, indem p_n eine allein von n und von den Werthen, die μ und die Halbmesser der Grenzflächen innerhalb der betrachteten Schicht durchlaufen, abhängige Function ist.

Ebenfalls ergeben sich aus den Gleichungen (8), (9) und (10) durch Einsetzung der Reihenentwicklungen und Vergleichung der Coëfficienten von V_n^m sechs Gleichungen, die sich mittelst der Gleichungen (20) und (21) auf die folgenden zwei Grenzbedingungen zurückführen lassen:

$$\begin{aligned} & [m(\xi_n^m - \zeta_n^m) - (n - m + 1)(\eta_n^{m-1} - \zeta_n^{m-2})] = 0 \\ & \left[\frac{d}{dr} \left(m(\xi_n^m - \zeta_n^m) - (n - m + 1)(\eta_n^{m-1} - \zeta_n^{m-2}) \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Wird zur Abkürzung:

$$(26) \quad \begin{cases} m(a_n^m - c_n^m) - (n - m + 1)(b_n^{m-1} - c_n^{m-2}) = s_n^m, \\ m(a_n^m - \gamma_n^m) - (n - m + 1)(\beta_n^{m-1} - \gamma_n^{m-2}) = \sigma_n^m \end{cases}$$

gesetzt, so bekommt man mit den oben eingeführten Bezeichnungen:

$$(27) \quad \begin{cases} s_n^m \varphi_n + \sigma_n^m \psi_n = s_n^m \varphi'_n + \sigma_n^m \psi'_n \\ s_n^m \frac{d\varphi_n}{dr} + \sigma_n^m \frac{d\psi_n}{dr} = s_n^m \frac{d\varphi'_n}{dr} + \sigma_n^m \frac{d\psi'_n}{dr}, \end{cases}$$

woraus in ganz ähnlicher Weise wie oben die Gleichung:

$$(28) \quad \sigma_n^m = q_n s_n^m$$

hervorgeht, indem q_n allein von n und von den Werthen von μ und r innerhalb der betrachteten Schicht abhängig ist.

Ich gehe jetzt zur Untersuchung der Lichtbewegungen im Inneren eines isotropen Körpers über, indem ich, wie schon in der Einleitung bemerkt, die Atome als Punkte betrachte, um welche sich bis zu einer gewissen Entfernung das Lichtmedium in concentrischen Schichten lagert, während ausserhalb dieser Entfernung, die kleiner angenommen wird als die Hälfte der mittleren Entfernung zweier Nachbaratome, die Geschwindigkeit des Lichtes derjenigen des leeren Raumes gleich ist.

Es sei 2δ die mittlere Entfernung zweier Nachbaratome. In der Entfernung δ von einem der Atome seien die Schwingungen des Lichtes parallel zur y -Axe, und die Bewegung pflanze sich in der Richtung der x -Axe fort. Ich nehme demnach:

$$(29) \quad \text{für } r = \delta, \quad \xi = 0, \quad \zeta = 0, \quad \eta = e^{(kt-lx)i} F$$

an, indem F eine Function ist, die sich periodisch von einem Atom zum anderen wiederholt. Die letztere Formel stellt also eine Wellenbewegung dar, die sich mit der Geschwindigkeit k/l im Körper fortpflanzt.

Betrachten wir, um die Eigenschaften der Function F festzustellen, zwei um 2δ voneinander entfernte Atome. Eine durch diese Atome gezogene Gerade schneide die beiden sich tangirenden Kugelflächen, deren Mittelpunkte die Atome sind, und deren Halbmesser gleich δ ist, in den Punkten A , B und C . Die Werthe der Function F in dieser Geraden können alsdann durch eine Curve dargestellt werden, welche von A bis B und von B bis C sich genau wiederholt, in der Weise, dass F in A und B gleiche Werthe hat, und dass die Tangenten der Curve in A und B parallel sind. Da r positiv zu beiden Seiten des Mittelpunktes gerechnet wird, so müssen also die Werthe von dF/dr in A und B gleich gross, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen gerechnet werden.

Wir haben:

$$e^{kti} F = e^{ixi} \eta = e^{ixi} \sum \eta_n^m V_n^m,$$

in welcher Reihe die Glieder in zwei diametral entgegengesetzten Punkten gleich gross und mit denselben Vorzeichen

für gerade n , mit entgegengesetztem Vorzeichen für ungerade n versehen sind. Man bekommt demnach für $r = \delta$:

$$\begin{aligned} & e^{lx_i} \sum (\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m) \\ &= e^{-lx_i} \sum (\eta_{2n}^m V_{2n}^m - \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m) \\ & \frac{d}{dr} \left(e^{lx_i} \sum (\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m) \right. \\ & \left. + e^{-lx_i} \sum (\eta_{2n}^m V_{2n}^m - \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m) \right) = 0, \end{aligned}$$

welche Gleichungen in:

$$(30) \left\{ \begin{aligned} & (e^{lx_i} - e^{-lx_i}) \sum \eta_{2n}^m V_{2n}^m + (e^{lx_i} + e^{-lx_i}) \sum \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0, \\ & (e^{lx_i} + e^{-lx_i}) \frac{d}{dr} \sum \eta_{2n}^m V_{2n}^m + (e^{lx_i} - e^{-lx_i}) \frac{d}{dr} \sum \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0 \end{aligned} \right.$$

umgestaltet werden können.

Diese für den Tangirungspunkt B geltenden Gleichungen sind überhaupt für alle Punkte, in welchen die Kugelfläche $r = \delta$ von einer anderen ähnlichen tangirt wird, gültig. Da indessen diese Tangirungspunkte zufällig liegen und in den isotrop angenommenen Körper mit gleicher Wahrscheinlichkeit in allen Punkten der Kugelfläche liegen können, so betrachte ich die Gleichungen als für alle Punkte der Kugelfläche $r = \delta$ gültig.

Für die weitere Behandlung der obigen Gleichungen ist es von Wichtigkeit, zu bemerken, dass lx als eine sehr kleine Grösse betrachtet werden kann. Dieser Umstand ist auch von Helmholtz¹⁾ benutzt worden, indem er in seiner Dispersionstheorie die Annahme gemacht hat, dass „die Entfernungen der ponderablen Theile voneinander verschwindend klein gegen die Wellenlängen sind.“ In der That ist man bekanntlich auf sehr verschiedenen Wegen dahin gelangt, sich wenigstens einen Begriff von diesen Entfernungen zu machen. Es mag z. B. für Wasser eine Wellenlänge des sichtbaren Lichtes gegen 10000 mal grösser sein als δ , und für die Gase, selbst bei der grössten Verdünnung, bei welcher überhaupt die Dispersion messbar ist, mag die Wellenlänge die Grösse δ noch um mehrere hundert mal übersteigen.

1) Helmholtz, Pogg. Ann. 154. p. 584. 1875.

Nun ist aber:

$$N = \frac{lO}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} O, \quad l = \frac{2\pi}{\lambda} N,$$

wenn durch N der Brechungscoefficient des Körpers, durch O die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume und durch λ die ebenfalls auf den leeren Raum bezogene Wellenlänge bezeichnet werden. Aus der letzteren Gleichung ersieht man, dass lx , welche Grösse in den obigen Formeln $l\delta$ nicht übersteigen kann, eine kleine Grösse von derselben Ordnung wie δ/λ sein muss.

Ferner hat man, wenn für $r = \delta \mu$ durch μ_δ bezeichnet wird:

$$(31) \quad \mu_\delta = \frac{k^2}{O^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}, \quad \text{daher:} \quad N^2 = \frac{l^2}{\mu_\delta}.$$

Wird also $l\delta$ als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachtet, so ist $\mu_\delta \delta^2$ eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung, während N^2 das Verhältniss zweier unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung ist.

Indem also lx als eine unendlich kleine Grösse betrachtet wird, so ergibt sich aus den Gleichungen (30):

$$lxi \sum \eta_{2n}^m V_{2n}^m + \sum \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0,$$

$$\frac{d}{dr} \sum \eta_{2n}^m V_{2n}^m + lxi \frac{d}{dr} \sum \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0.$$

Mittelst der ersten der Gleichungen ergibt sich hieraus durch Vergleichung der Coefficienten von V_{2n}^m und V_{2n+1}^m :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} li \left(-\frac{r^2}{4n+1} \eta_{2n}^m - \frac{(2n+2)^2 - m^2}{4n+5} \eta_{2n+2}^m \right. \\ \quad \left. + \frac{(m+2)(m+1)}{4n+5} \eta_{2n+2}^{m+2} \right) + \eta_{2n+1}^m = 0, \\ lir \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n+2}} \left(-\frac{r^2}{4n-1} \eta_{2n-1}^m - \frac{(2n+1)^2 - m^2}{4n+3} \eta_{2n+1}^m \right. \\ \quad \left. + \frac{(m+2)(m+1)}{4n+3} \eta_{2n+1}^{m+2} \right) + \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n+1}} \eta_{2n}^m = 0, \end{array} \right.$$

in welchen Gleichungen $r = \delta$ ist.

Wenn $n = 0$, $m = 0$ gesetzt wird, so bekommt man für $r = \delta$:

$$(33) \quad \begin{cases} li(-r^2 \eta_0^0 - \frac{1}{3} \eta_2^0 + \frac{2}{3} \eta_2^2) + \eta_1^0 = 0 \\ -\frac{1}{3} li r \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \eta_1^0 + \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \eta_0^0 = 0. \end{cases}$$

Da $r^2 \eta_0^0$ willkürlich als eine endliche Grösse betrachtet werden kann, so werden die in der ersten Gleichung vorkommenden Grössen η_2^0 und η_2^2 nur insofern Bedeutung haben, als sie endlich sind. Wenn deshalb in der zweiten Gleichung (32) $n = 1$, $m = 0$ und $m = 2$ gesetzt wird, so fällt das erste, den Factor lr enthaltene Glied weg, wonach man für $r = \delta$:

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r^3} \eta_2^0 = 0, \quad \frac{d}{dr} \frac{1}{r^3} \eta_2^2 = 0$$

bekommt. Durch Einsetzung der constanten Coëfficienten der Gleichungen (15) ergibt sich hieraus mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen, für die der äussersten Schicht bis $r = \delta$ entsprechenden Constanten:

$$2b_2^0 \delta^5 = 3\beta_2^0, \quad 2b_2^2 \delta^5 = 3\beta_2^2.$$

Für dieselbe Schicht hat man der beiden ersten Gleichungen (29) zufolge:

$$\alpha_2^1 \delta^5 + \alpha_2^1 = 0, \quad c_2^1 \delta^5 + \gamma_2^1 = 0.$$

Wenn ferner in der zweiten der Gleichungen (22) $n = 3$, $m = 1$ und $m = 3$ eingesetzt wird, so bekommt man mit Vernachlässigung des ersten unendlich kleinen Gliedes:

$$\alpha_2^1 + \beta_2^0 - \gamma_2^1 = 0, \quad \beta_2^2 - \gamma_2^1 = 0,$$

während aus den Gleichungen (23) für $n = 1$, $m = 1$

$$-3\alpha_2^1 - 4b_2^2 + 2b_2^0 - 3c_2^1 = 0$$

$$-5\alpha_1^1 - 3\alpha_2^1 - 4\beta_2^2 + 2\beta_2^0 - 3\gamma_2^1 = 0,$$

erhalten wird. Diese acht Gleichungen genügen indess nicht, um die acht Constanten durch α_1^1 auszudrücken, indem sich zeigt, dass dieselben eine Identität enthalten. Es geht indessen aus den Gleichungen (26) und (28) für $n = 2$, $m = 1$:

$$s_2^1 = \alpha_2^1 - c_2^1 - 2b_2^0, \quad \sigma_2^1 = \alpha_2^1 - \gamma_2^1 - 2\beta_2^0, \quad \sigma_2^1 = q_2 s_2^1,$$

hervor, woraus sich mittelst der obigen Gleichungen:

$$s_2^1 \delta^5 = -2\beta_2^0, \quad \sigma_2^1 = -3\beta_2^0, \quad \text{also: } 3\beta_2^0 \delta^5 = 2\beta_2^0 q_2$$

ergibt. Da aber q_2 allein von den Werthen abhängt, welche μ und die Halbmesser der Grenzflächen innerhalb der äussersten

Schicht annehmen, so muss $\beta_2^0 = 0$ sein. Wir erhalten demnach aus den obigen Gleichungen:

$$b_2^0 = 0, \quad \beta_2^0 = 0, \quad b_2^2 \delta^3 = \frac{2}{3} \beta_2^2 = -\frac{2}{3} \alpha_1^1.$$

Wenn ferner in den Gleichungen (22) $n = 1$, $m = 1$ eingesetzt wird, so ergibt sich allgemein:

$$k_1^1 + b_0^0 = 0, \quad \frac{1}{3} \mu \alpha_1^1 + \beta_0^0 = 0.$$

Man hat also für die hier betrachtete äusserste Schicht, in welcher μ gleich μ_δ ist, wenn die kleinen Grössen zweiter Ordnung berücksichtigt werden:

$$r_0^0 = -k_1^1 (r - \frac{1}{3} \mu_\delta r^3) - \frac{1}{3} \mu_\delta \alpha_1^1.$$

In dieser Weise können die Gleichungen (33) in:

$$li(k_1^1 \delta^3 - \frac{1}{3} \alpha_1^1) + b_1^0 \delta^3 + \beta_1^0 = 0$$

$$-li(b_1^0 \delta^3 - 2\beta_1^0) + \mu_\delta (k_1^1 \delta^3 + \alpha_1^1) = 0$$

umgestaltet werden. Es ergibt sich hieraus:

$$\frac{l^2}{\mu_\delta} = N^2 = \frac{k_1^1 \delta^3 + \alpha_1^1}{k_1^1 \delta^3 - \frac{1}{3} \alpha_1^1} \cdot \frac{b_1^0 \delta^3 + \beta_1^0}{b_1^0 \delta^3 - 2\beta_1^0}.$$

Nun ist der Gleichung (25) zufolge:

$$\alpha_1^1 = p_1 k_1^1.$$

Ferner ist nach (29) für $r = \delta$, $\xi_1^1 = 0$, also mit Weglassung der unendlich kleinen Grössen:

$$\alpha_1^1 \delta^3 + \alpha_1^1 = 0.$$

Wenn dann in die zweite Gleichung (22) $n = 2$, $m = 1$ eingesetzt wird, so bekommt man mit Weglassung des ersten unendlich kleinen Gliedes zweiter Ordnung für die äusserste Schicht:

$$\alpha_1^1 + \beta_1^0 = 0,$$

während aus den Gleichungen (26) und (28) für $n = 1$, $m = 1$:

$$\alpha_1^1 - b_1^0 = s_1^1, \quad \alpha_1^1 - \beta_1^0 = \sigma_1^1, \quad \sigma_1^1 = q_1 s_1^1,$$

hervorgeht. Es folgt hieraus:

$$\frac{\beta_1^0}{b_1^0} = \frac{q_1 \delta^3}{q_1 + 2\delta^3}.$$

Der Brechungscoefficient N wird also durch die einfache Gleichung:

$$(34) \quad N^2 = \frac{\delta^3 + p_1}{\delta^3 - \frac{1}{3} p_1} \cdot \frac{\delta^3 + q_1}{\delta^3 - \frac{1}{3} q_1}$$

bestimmt, wo p_1 und q_1 zwei von δ unabhängige Functionen sind.

Wir haben in der innerhalb $r = \delta$ liegenden äusseren Schicht μr^2 als eine unendlich kleine Grösse betrachtet, in

anderen Schichten aber muss diese Grösse einen endlichen Werth annehmen, wenn überhaupt eine Brechung im Körper stattfinden soll. Nehmen wir an, dass μr^2 innerhalb der Grenzfläche $r = \varepsilon$ endlich werde, dann ergibt sich aus der zweiten Gleichung (24):

$$\text{für } r = \varepsilon, \quad 0 = k_n'^m q_n' + \kappa_n'^m p_n',$$

während der Gleichung (25) zufolge $k_n'^m = p_n' k_n'^m$, wo p_n' von ε unabhängig ist. Man wird also $k_n'^m = 0$ und $\kappa_n'^m = 0$ haben, dass heisst, die Schwingungen sind innerhalb der Grenzfläche $r = \varepsilon$ senkrecht zum Radius. Es leuchtet dies auch unmittelbar ein, indem unsere Voraussetzungen mit der Annahme identisch sind, dass die Geschwindigkeit des Lichtes in der Grenzfläche $r = \varepsilon$ von einem unendlich grossen in einem endlichen Werth übergeht, wodurch alle einfallende Lichtstrahlen gegen den Mittelpunkt gebrochen und die Schwingungen demnach senkrecht zum Radius werden müssen.

Es ergibt sich alsdann aus der ersten der Gleichungen (24) für $n = 1, m = 1$:

$$k_1^1 \cdot 2\varepsilon - \frac{\kappa_1^1}{\varepsilon^2} = 0, \quad \text{also:} \quad p_1 = 2\varepsilon^3.$$

Man kann demnach p_1 annäherungsweise als eine mit dem Volumen des in der Nähe der Atome stark geänderten Lichtmittels proportionale, von der Brechung desselben aber unabhängige Grösse ansehen.

Die zweite in die Gleichung (34) eingehende Grösse q_1 ist aus den Gleichungen (27) und (28) zu berechnen.

In welcher Weise q_1 von der Wellenlänge abhängig ist, werde ich zunächst durch ein Beispiel zu beleuchten versuchen. Ich nehme an, dass μ ausserhalb der Grenzfläche $r = \varepsilon$ gleich 0 ist, innerhalb derselben aber überall endlich und constant gleich μ' . In den Gleichungen (27) ist alsdann $\sigma_n'^m = 0$, und mit Weglassung des oberen Index m bekommt man, wenn $n = 1$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} s_1 \varepsilon^3 + \sigma_1 &= s_1' (\varepsilon^3 - \frac{1}{10} \mu' \varepsilon^5 + \dots), \\ 3s_1 \varepsilon^2 &= s_1' (3\varepsilon^2 - \frac{1}{2} \mu' \varepsilon^4 + \dots). \end{aligned}$$

Es ergibt sich hieraus:

$$\frac{\sigma_1}{s_1} = q_1 = \frac{1}{13} \mu' \varepsilon^5 + \dots = \frac{a}{\lambda^2} + \dots$$

Vorausgesetzt, dass die Reihenentwicklung convergent ist, lässt sich also q_1 in einer Reihe nach steigenden Potenzen von $1/\lambda^2$ entwickeln, und das erste Glied a/λ^2 der Reihe ist positiv.

Wenn ganz allgemein μ als eine endliche und stetig variable Function betrachtet wird, so muss zu der Differentialgleichung (13) zurückgegangen werden, aus welcher Gleichung die Grenzbedingungen (27) abgeleitet werden können. Nehmen wir wie oben $r = \varepsilon$ als Grenze an, ausserhalb welcher $\mu = 0$ gesetzt werden kann, so hat man die Aufgabe, die Differentialgleichung unter den Bedingungen zu integrieren, dass für $r = 0$ $f_n = 0$ und für $r = \varepsilon$ $f_n = s_n(r^{2n+1} + q_n)$, $df_n/dr = (2n+1)s_n r^{2n}$ werden. Nach Elimination der beiden arbiträren Constanten erhält man aus diesen drei Gleichungen eine Endgleichung zur Bestimmung von q_n . Wenn nun vorausgesetzt wird, dass f_n sich überall in einer convergenten Reihe nach Potenzen des in μ eingehenden Factors $1/\lambda^2$ entwickeln lässt, so kann man leicht einsehen, dass q_n sich allgemein in einer Reihe $a/\lambda^2 + b/\lambda^4 + \dots$ entwickeln lässt.

Wenn also durch A der einer grossen Wellenlänge oder $q_1 = 0$ entsprechende Brechungscoefficient bezeichnet wird, so bekommt man mittelst der Gleichung (34):

$$(35) \quad A^2 = \frac{\delta^3 + p_1}{\delta^3 - \frac{1}{2}p_1}, \quad \frac{A^2 - 1}{A^2 + 2} \delta^3 = \frac{1}{2}p_1, \quad \frac{N^2 - A^2}{N^2 + 2A^2} \delta^3 = \frac{1}{2}q_1.$$

Als Resultat dieser Untersuchung ergibt sich, dass die Gesetze der Brechung in einem durchsichtigen, isotropen Körper mit gewöhnlicher Dispersion durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt werden können:

$$\frac{A^2 - 1}{A^2 + 2} \cdot \frac{1}{d} = R, \quad \frac{N^2 - A^2}{N^2 + 2A^2} \cdot \frac{1}{d} = D = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} + \dots$$

wo N der Brechungscoefficient, d die Dichtigkeit, R und D zwei von der Dichtigkeit des Körpers unabhängige Constanten sind. Ferner ist durch a eine positive Constante und, wie aus den Gleichungen selbst hervorgeht, durch A der dem $\lambda = \infty$ entsprechende Brechungscoefficient bezeichnet.

Die erstere Gleichung habe ich schon vor 14 Jahren¹⁾ in ganz anderer Weise theoretisch abgeleitet, und es hat sich bekanntlich später die Richtigkeit dieses Gesetz vielfach bestätigt. Aus meinen eigenen Versuchen über die Brechung einiger Flüssigkeiten und deren Dämpfe habe ich die folgenden, der Natriumlinie entsprechenden „Dispersionsconstanten“ D berechnet, wobei A mittelst der einfachen Formel $N^2 = A^2 + \delta/\lambda^2$ bestimmt ist:

	Flüssigkeit bei 10°	Dampf bei 100°
Alkohol	0,00585	0,00644
Aethyläther	636	623
Chloroform	413	409
Aethyljodid	551	579
Schwefelkohlenstoff . .	1615	1732
Essigäther	536	550

Die Uebereinstimmung der beiden Werthe von D kann als eine sehr befriedigende betrachtet werden.

Wenn die Reihenentwickelungen (14) der Functionen φ_1 und ψ_1 nicht brauchbar sind, so können diese Functionen, wenn zur Abkürzung $\mu = \alpha^2$ gesetzt wird, durch:

$$\varphi_1 = 3 \frac{\sin \alpha r - \alpha r \cos \alpha r}{\alpha^3}, \quad \psi_1 = \cos \alpha r + \alpha r \sin \alpha r,$$

ausgedrückt werden. Es sei z. B. $\mu = 0$ ausserhalb der Grenzfläche $r = \varepsilon$ und $\mu = \alpha^2$ überall innerhalb dieser Grenzfläche, dann hat man:

$$s_1 \varepsilon^3 + \sigma_1 = s_1' 3 \frac{\sin \alpha \varepsilon - \alpha \varepsilon \cos \alpha \varepsilon}{\alpha^3},$$

$$3 s_1 \varepsilon^3 = s_1' \frac{3 \varepsilon}{\alpha} \sin \alpha \varepsilon,$$

woraus:
$$\frac{\sigma_1}{s_1} = q_1 = -\varepsilon^3 - \frac{3 \varepsilon^3}{\alpha} \operatorname{ctg} \alpha \varepsilon + \frac{3 \varepsilon}{\alpha^2}$$

gefunden wird. Wenn also die Wellenlänge λ und somit auch α alle Werthe durchläuft, so kann q_1 jeden beliebigen reellen Werth zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Der

1) L. Lorenz, Vidensk. Selsk. Skrifter. 5. Reihe. 8. p. 205. Kopenhagen 1869. Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

zweiten Gleichung (35) zufolge wird also auch bei gewissen Werthen von λ N^2 negativ und somit N imaginär, was in dieser Rechnung mit einer Absorption gleichbedeutend ist.

Wenn angenommen wird, dass innerhalb der Grenzfläche $r = \varepsilon\mu$ endlich und die Reihen convergent sind, während erst in einer sehr kleinen Entfernung vom Mittelpunkte die Divergenz eintritt, so wird die Absorption nur bei bestimmten Wellenlängen eintreten, in der Weise, dass wir ein gewöhnliches, mit Absorptionslinien begleitetes Dispersionspectrum bekommen.

Während also diese Theorie den Fall einer Absorption nicht ausschliesst, so kann auf der anderen Seite eine unvollkommene Absorption, in welcher N die complexe Form $a + bi$ annimmt, nicht aus unseren Voraussetzungen abgeleitet werden. Wenn deshalb auch die Gesetze der anomalen Dispersion theoretisch abgeleitet werden sollen, so muss zunächst die Berechnung auf ein den zusammengesetzten Körpern und Mischungen entsprechendes System von Atomen ausgedehnt werden. Alsdann wird es sich erst zeigen, ob man genöthigt sein wird, die Grundlage selbst der Theorie dahin abzuändern, dass μ als eine complexe Variable aufgefasst wird, was dem Falle entpricht, dass noch eine erste Derivirte der Componenten nach t zu den Gliedern der ursprünglichen Differentialgleichungen der Lichtbewegungen hinzugefügt wird. Es würden alsdann die Gleichungen die nämliche Form annehmen, wie ich es schon in meinem Aufsatze über die Identität der Schwingungen des Lichtes mit den electrischen Strömen¹⁾ angegeben habe. Ueberhaupt ist, wenn die Möglichkeit einer Berechnung der Lichtbewegungen im Inneren der Körper gegeben ist, für die ferneren Untersuchungen ein weites Feld offen.

1) L. Lorenz, Pogg. Ann. 131. p. 243. 1867.