Zur Theorie der iterirten Functionen.

Von

EUGEN NETTO in Berlin.

Die im vorhergehenden Aufsatze angestellten Betrachtungen führten mich auf einige Eigenschaften der iterirten Functionen, die mir der Mittheilung nicht unwerth erscheinen.

Wir verstehen unter $\Theta(x)$ zunächst eine ganze rationale Function mit unbestimmten Coefficienten und setzen in gebräuchlicher Bezeichnung

$$(1) \quad \Theta(\Theta(x)) = \Theta_2(x), \Theta(\Theta_2(x)) = \Theta_2(\Theta(x)) = \Theta_3(x), \dots;$$

dann ist es leicht; zu beweisen, dass $\Theta_n(x) - x$ durch $\Theta(x) - x$ theilbar sein muss; (vgl. meinen Aufsatz: „Ueber die Factorzerlegung der Discriminanten algebraischer Gleichungen,“ Math. Ann. XXIV, S. 581). Wir werden ferner zeigen, dass der Quotient

$$(2) \quad \frac{\Theta_n(x) - x}{\Theta(x) - x} = T_n(x)$$

nicht weiter durch $\Theta(x) - x$ theilbar sein kann. Denn wäre dies der Fall, dann müsste es auch bei der speciellen Wahl

$$\Theta(x) = x + x^2 + cx^3 + \dots$$

statt haben; hier erhält man aber

$$\Theta_n(x) = x + nx^2 + [n + n(n-1)c]x^3 + \dots,$$

$$T_n(x) = n + n(n-1)x + \dots,$$

so dass T_n nicht mehr durch $\Theta - x$ theilbar sein kann. Weil nun ausserdem bei unbestimmten Coefficienten $\Theta - x$ irreductibel ist, so kann T_n auch keinen Theiler mit $\Theta - x$ gemeinsam haben, d. h.

$$\Theta(x) - x = 0 \quad \text{und} \quad T_n(x) = 0$$

haben keine gemeinsame Wurzel, so lange man keine speciellen Functionen $\Theta(x)$ betrachtet.

Es sei jetzt x_0 eine Wurzel von $T_n(x) = 0$, und ferner werde

$$(3) \quad x_1 = \Theta(x_0), x_2 = \Theta_2(x_0), x_3 = \Theta_3(x_0), \dots, x_{n-1} = \Theta_{n-1}(x_0)$$

gesetzt, dann ist wegen des Ausdrucks (2) für $T_n(x)$

$$\Theta_n(x_0) = x_0$$

und also

$$\Theta_{n+1}(x_0) = \Theta(x_0) = \Theta_n(x_1) = x_1, \quad \Theta_{n+2}(x_0) = \Theta_2(x_0) = \Theta_n(x_2) = x_2, \dots,$$

so dass ausser x_0 auch alle Grössen in (3) Wurzeln von $T_n(x) = 0$ sind. Wenn wir annehmen, n sei durch eine Primzahl p ersetzt, dann folgt in bekannter Art, dass nicht zwei Wurzeln in (3) einander gleich sein können, ohne dass alle untereinander und insbesondere x_0 und x_1 gleich sind. Wäre Letzteres aber der Fall, so wäre x_0 , was nicht angeht, eine Wurzel von $\Theta(x) - x = 0$. So lange die Coefficienten von $\Theta(x)$ unbestimmt bleiben, ordnen sich die Wurzeln von $T_p(x) = 0$ zu je p einander zu, wenn p eine Primzahl ist. Dabei gilt zwischen den p Wurzeln jedes Systems die Beziehungsreihe

$$x_1 = \Theta(x_0), \quad x_2 = \Theta_2(x_0), \quad \dots, \quad x_{p-1} = \Theta_{p-1}(x_0).$$

Nebenbei mag bemerkt werden, dass sich hieraus die Gruppe der Gleichung $T_p(x) = 0$ als nicht-primitiv, und also die Gleichung selbst als das Eliminationsresultat zweier anderer Gleichungen ergibt.

Wenn wir nun die Coefficienten von $\Theta(x)$ als veränderlich ansehen und ihre Werthe so variiren, falls dies möglich ist, dass $T_p(x) = 0$ mit $\Theta(x) - x = 0$ eine Wurzel gemeinsam hat, dass z. B. $x_0 = x_1$ wird, dann werden alle p Glieder unseres Systems $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ einander gleich werden. Haben für die specielle Function $\Theta(x)$ die Gleichungen

$$(4) \quad \Theta(x) - x = 0, \quad T_p(x) = 0$$

eine Wurzel gemeinsam, so ist dies eine p -fache Wurzel der letzteren Gleichung und also eine $(p+1)$ -fache von

$$\Theta_p(x) - x = 0,$$

falls sie einfache Wurzel der ersten Gleichung in (4) ist.

Aus diesem Satze lässt sich eine merkwürdige algebraische Formel herleiten. Es sei

$$\Theta(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \dots$$

dann wird

$$\Theta_p(x) = a^p x + b_p x^2 + c_p x^3 + \dots + d_p x^{p+1} + e_p x^{p+2} + \dots,$$

$$T_p(x) = \frac{\Theta_p(x) - x}{\Theta(x) - x} = \frac{a^p - 1}{a - 1} + \beta_p x^2 + \gamma_p x^3 + \dots + \delta_p x^{p+1} + \epsilon_p x^{p+2} + \dots$$

Nun ist $x = 0$ eine einfache Wurzel von $\Theta(x) - x = 0$, sobald, wie wir annehmen wollen, a von 1 verschieden ist. Wählt man nun aber a als primitive p te Einheitswurzel, so wird das constante Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung verschwinden; nach dem vorigen

$$\Theta_{\mu}(x) - x = [\mu],$$

und endlich erweitern wir die Bedeutung des bisher betrachteten Quotienten T dahin, dass wir setzen

$$(7) \quad T_n(x) = \frac{[n] \cdot \prod \left[\frac{n}{p_1 p_2} \right] \cdot \prod \left[\frac{n}{p_1 p_2 p_3} \right] \cdots}{\prod \left[\frac{n}{p_1} \right] \cdot \prod \left[\frac{n}{p_1 p_2 p_3} \right] \cdots},$$

Die bekannte Art der Behandlung primitiver n^{ter} Einheitswurzeln zeigt auch hier, dass $T_n(x)$ eine rationale, ganze Function von x ist; man braucht dazu nur den Begriff der „Zugehörigkeit einer Wurzel x_0 zu einem Index λ “ einzuführen, d. h. die Definition, dass x_0 zu λ „gehört“, sobald λ der kleinste Index ist, für den

$$\Theta_{\lambda}(x_0) - x_0 = 0$$

wird. Um dann weiter unsere früheren Schlüsse anwenden zu können, bedarf es noch des Nachweises, dass $T_n(x) = 0$ mit keinem $\Theta_{\lambda}(x) - x = 0$ eine Wurzel gemeinsam hat, sobald λ ein Theiler von n ist. Dass dies so ist, erkennt man aber schon aus der Betrachtung des besonderen Falles, in dem wir

$$\Theta(x) = x^k \quad \text{also} \quad \Theta_{\mu}(x) = x^{k^{\mu}}$$

setzen. k muss dabei der Grad der zu Grunde gelegten, zu iterirenden Function sein, damit nicht etwa Wurzeln unendlich werden. Setzen wir diese Function in (7) ein, so können wir aus jedem Factor x weglassen, da die Anzahl der Factoren im Zähler dieselbe ist wie im Nenner. Dann bleiben Factoren von der Form

$$(8) \quad x^{\frac{n}{k} - 1} - 1, \quad x^{\frac{n}{k^2} - 1} - 1, \dots$$

zurück, so dass im Zähler wie im Nenner als Wurzeln nur die Einheitswurzeln auftreten.

Es fragt sich also, wenn wir gleich zur speciellen Form der Θ übergehen, ob eine primitive Einheitswurzel ω , welche zu

$$x^{\frac{n}{k^{\nu}} - 1} - 1 = 0 \quad (\nu > 1)$$

gehört, noch die Gleichung $T_n(x) = 0$ befriedigen kann? ω wird alle, aber auch nur diejenigen Factoren (8) zum Verschwinden bringen, bei

denen der Exponent von x ein Vielfaches von $k^{\frac{n}{k^{\nu}} - 1}$ ist. Der geforderte Beweis ist also geliefert, sobald wir zeigen, dass die Reihen

$$(9) \quad k^n - 1; \quad k^{\frac{n}{p_1 p_2}} - 1, \quad k^{\frac{n}{p_1 p_2}} - 1, \dots; \quad k^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}} - 1, \dots$$

und

$$(10) \quad k^{\frac{n}{p_1}} - 1, \quad k^{\frac{n}{p_2}} - 1, \dots; \quad k^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}} - 1, \dots$$

den Factor $k^{\frac{n}{v}} - 1$ gleich oft enthalten. Wäre k eine unbestimmte Grösse, so würde es ausreichen, zu zeigen, dass der Quotient aus den Producten der Grössen (9) und (10) nicht durch $k^{\frac{n}{v}} - 1$ algebraisch theilbar sei. Dies ist aber klar, da dieser Quotient das Polynom für die Gleichung der primitiven n^{ten} Einheitswurzeln liefert. Aber auch für jedes besondere k ist der Satz richtig, weil

$$k^{\alpha+\beta} - 1 = k^{\beta} \frac{k^{\alpha} - 1}{k^{\alpha} - 1} (k^{\alpha} - 1) + k^{\beta} - 1$$

ist, und also, wenn zwar für unbestimmte k nicht $k^{\alpha+\beta} - 1$ durch $k^{\alpha} - 1$ theilbar wäre, wohl aber für ein specielles, dieses nur gleich 1 sein könnte. Somit ist der Beweis erbracht: *Es haben*

$$T_n(x) = 0 \quad \text{und} \quad \Theta_{\frac{n}{\lambda}}(x) - x = 0$$

keine Wurzel gemeinsam, so lange die Coefficienten unbestimmt bleiben.

$T_n(x) = 0$ besitzt nur Wurzeln, welche auch $\Theta_n(x) - x = 0$ befriedigen; folglich ist $T_n(x)$ ein Theiler von $\Theta_n(x) - x$. Und nun folgen die Schlüsse genau so wie in dem ersten besondern Falle, in welchem n eine Primzahl bedeutete. Es ergibt sich dabei:

Solange die Coefficienten von $\Theta(x)$ unbestimmt bleiben, ordnen sich die Wurzeln von $T_n(x) = 0$ zu je n einander zu, derart, dass zwischen denjenigen eines Systems die Beziehungsreihe

$$(3) \quad x_1 = \Theta(x_0), \quad x_2 = \Theta(x_1) = \Theta_2(x_0), \dots, \quad x_{n-1} = \Theta(x_{n-2}) = \dots = \Theta_{n-1}(x_0)$$

herrscht. Haben dagegen für eine specielle Function $\Theta(x)$ die beiden Gleichungen

$$(4a) \quad \Theta(x) - x = 0, \quad T_n(x) = 0$$

eine Wurzel gemeinsam, so ist dies eine n -fache Wurzel der letzteren Gleichung und, wie sich aus der Betrachtung des Quotienten

$$[\Theta_n(x) - x] : T_n(x)$$

sofort ergibt, eine $(n+1)$ -fache der Gleichung

$$\Theta_n(x) - x = 0$$

falls sie eine einfache der ersten Gleichung in (4a) ist.

Bezeichnet man mit

$$\psi_n(z) = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln sind, so folgt durch n -malige Iterirung aus

$$(11) \quad \Theta(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots$$

die Function $\Theta_n(x)$, für deren Coefficienten die Congruenz gilt:

$$(11a) \quad \Theta_n(x) \equiv a^n x + d_n x^{n+1} + e_n x^{n+2} + \dots \pmod{\psi_n(a)}.$$

Ist ξ eine Wurzel von $\Theta(x) - x = 0$, für welche $\Theta'(\xi)$ eine primitive n^{te} Einheitswurzel ist, dann wird ξ eine $(n+1)$ -fache Wurzel von $\Theta_n(x) - x = 0$ werden.

Bei dem in (11a) ausgesprochenen Satze sind über die Coefficienten $a, b, c, \dots$ keinerlei Voraussetzungen gemacht, und ebensowenig ist die Thatsache benutzt, dass $\Theta(x)$ gerade vom Grade k sei. Auf die ersten n Glieder von (11a) haben nur die ersten n Glieder in (11) Einfluss, die Reihe (11) könnte sich also, so lange sie nur convergirt, auch ins Unendliche erstrecken, ohne dass die Richtigkeit der Congruenz (11a) aufhörte, da x so klein angenommen werden kann, dass auch $\Theta_2, \Theta_3, \dots, \Theta_n$ convergente Reihen ergeben. Der obige Satz gilt also auch noch dann, wenn man unter $\Theta(x)$ eine beliebige für $x=0$ verschwindende, und in eine convergente Reihe entwickelbare Function versteht; und dieselbe Bemerkung bezieht sich auch auf den Schlusssatz der obigen Theoreme.

Berlin, den 7. November 1886.