XXIII. Ausgleichungsmethode der geometrischen Krystallographie.

Von

Carl Viola in Rom.

(Mit 5 Textfiguren.)

Während einerseits die Beobachtungsmittel immer grössere Genauigkeit erlangen, fasst anderseits die Theorie der kleinsten Quadrate Boden in der Krystallographie, und diese letztere wird zu einer Präcisionswissenschaft erhoben. Bei uns zwar bedienen sich die Krystallographen noch der alten Methoden zur Berechnung der Axenelemente eines Krystalles, d. h. derjenigen Methoden, welche, ohne die Beobachtungsfehler in Betracht zu ziehen, rasch zu Ergebnissen führen, die früher allenfalls annehmbar waren. Aber heutzutage, wo die physikalischen Experimente so grosse Fortschritte gemacht haben, sei es was die Wärmeausdehnung anbelangt, sei es was die Elasticität oder andere Präcisionsuntersuchungen der Krystalle anbetrifft, macht sich die Nothwendigkeit fühlbarer, die wahrscheinlichsten idealen Grundelemente der Krystalle zu bestimmen. Zu diesem Zwecke zieht man sich die Winkel zu Nutzen, welche zur Verfügung stehen oder zur Verfügung gestellt werden können.

Schon J. Beckenkamp*) berechnete im Jahre 1884 in seiner Inauguraldissertation die Axenelemente nach der Methode der Ausgleichungsrechnung; nachher**) stellte er die auf die Theorie der kleinsten Quadrate sich stützende Ausgleichungsrechnung in sehr einfacher und klarer Weise dar, so dass die in der Algebra weniger geübten Krystallographen nur den von ihm vorgeschlagenen Rechnungsgang zu verfolgen brauchen.

Die Ausgleichungsrechnung kann auch eine von der gewöhnlich angewandten verschiedene Form annehmen, ich möchte sagen eine elegantere, theilweise logarithmische und deshalb auch einfachere Form; aber um

*) Diese Zeitschr. 5, 436.

**) Diese Zeitschr. 22, 376.

dahin zu gelangen, muss man von Betrachtungen ausgehen, welche nicht zu der Theorie der kleinsten Quadrate gehören, wohl aber zu demselben Ziele führen wie diese.

Dieser Aufsatz hat den Zweck, dem Leser diese Methode mitzuteilen.

Vergegenwärtigen wir uns zuvörderst kurz die Aufgabe, um die es sich handelt. Man hat alle sechs Winkel von vier Grundflächen eines Krystalles gemessen, und man will in der wahrscheinlichsten Weise diese sechs Winkel corrigiren, jedoch so, dass der von den vier Flächen zusammengesetzte Körper im Raume möglich sei. Die gemessenen Winkel zwischen den Polaren der vier Flächen sind $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, ihre Gewichte oder

Genauigkeitmaasse sind $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$. Um diese Aufgabe klarer darzustellen, kann man sie in eine graphische Form bringen. Zu diesem Zwecke construiren wir, Fig. 4, auf der sphärischen Oberfläche, deren Radius 1 ist, die zu den vier Flächen gehörenden Pole P_1, P_2, P_3, P_4 mittelst der ersten fünf Winkel a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , so wie sie durch Messung mit dem Goniometer erhalten werden. Wenn man nun die Zone $P_3 P_4$ betrachtet, so wird der so erhaltene Winkel $\widehat{P_3 P_4}$, den wir a_6' nennen wollen,

nicht gleich dem gemessenen Winkel a_6 sein, ausser in zufälligen und somit unwahrscheinlichsten Fällen. Wir nehmen natürlich an, dass sie nicht gleich seien, und bezeichnen die Differenz beider als den Widerspruch des Systems:

$$\varphi = a_6' - a_6.$$

Wenn wir also den Winkel a_6 von dem Pole P_3 aus auftragen, so werden wir einen fünften Pol P_4' erhalten. Die Aufgabe ist somit folgende: Den Winkeln $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ gebe man solche Verbesserungen $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$, dass die zwei Pole P_4 und P_4' sich decken. Die Lösung dieser Aufgabe ist natürlich auf viele Weisen möglich, weil unendlich viele Systeme $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ ihr entsprechen können. Wenn man aber das System von $c_1, c_2, \dots, c_6$, welches der Theorie der kleinsten Quadrate entspricht, nämlich:

$$1) \quad g_1 c_1^2 + g_2 c_2^2 + g_3 c_3^2 + g_4 c_4^2 + g_5 c_5^2 + g_6 c_6^2 = \text{Min.},$$

wählen will, so wissen wir, dass die Aufgabe eindeutig bestimmt ist.

Fig 4.

Um zu einer einfachen Lösung zu gelangen, wollen wir sehen, ob der Aufgabe eine mechanische Bedeutung zu Grunde liegt.

Wenn die Winkel $a_1, a_2, \dots, a_6$ durch innere, in den respectiven Zonen sich zu denkende Kräfte veränderlich wären, und man durch zwei an die zwei Polaren P_4 und P_4' angebrachte Kräftepaare versuchte, die eben erwähnten Polaren zu nähern, bis sie sich decken, so würde der Zweck vollkommen erreicht sein, da jeder Winkel einen Zuwachs (Abnahme = negativer Zuwachs) erhalten würde, und zwar in dem Maasse, als die inneren sich entwickelnden Kräftepaare den äusseren das Gleichgewicht hielten. Es handelt sich nun darum zu sehen, wie die inneren Kräfte beschaffen sein müssen, damit die Veränderungen, welche die Winkel erlitten haben, als Correctionen angesehen, dem Principe der kleinsten Quadrate Genüge leisten. Es ist sofort klar, dass, wenn die inneren Kräftepaare den Werthen

$$g_1 c_1, \quad g_2 c_2, \quad g_3 c_3, \quad g_4 c_4, \quad g_5 c_5, \quad g_6 c_6$$

gleich gesetzt werden, die Forderungen erfüllt sind. In der That, wenn wir mit p eines der äusseren angewandten Kräftepaare und mit $\delta\varphi$ die sehr kleine Winkeldrehung bezeichnen, welche die Polare P_4' gegen die Polare P_4 und in Bezug auf dieselbe ausführt, so werden wir folgende Gleichung erhalten:

$$2) \quad p \delta\varphi = g_1 c_1 \delta c_1 + g_2 c_2 \delta c_2 + g_3 c_3 \delta c_3 + g_4 c_4 \delta c_4 + g_5 c_5 \delta c_5 + g_6 c_6 \delta c_6,$$

wobei $\delta c_1, \delta c_2, \dots, \delta c_6$ die unendlich kleinen Winkelveränderungen bedeuten, da die äussere Arbeit derjenigen der inneren Kräfte jeden Augenblick gleichkommt.

Und nun, wenn mit Hülfe des Kräftepaares p die Winkelveränderungen so weit vorgeschritten sind, dass das Gleichgewicht eintritt, so besteht $p \delta\varphi = 0$, und somit werden wir erhalten:

$$g_1 c_1 \delta c_1 + g_2 c_2 \delta c_2 + g_3 c_3 \delta c_3 + g_4 c_4 \delta c_4 + g_5 c_5 \delta c_5 + g_6 c_6 \delta c_6 = 0,$$

was in der That mit Gleichung 1) übereinstimmt.

Daraus folgt: Das einer Bedingungsgleichung unterworfenene Problem der Ausgleichung der Beobachtungsfehler kann dadurch gelöst werden, dass man das Gleichgewicht eines äusseren Kräften oder Kräftepaaren ausgesetzten elastischen Systems löst.

Indem wir die Gleichung 2) in Bezug auf φ von 0 bis φ integrieren, wo φ den Widerspruch $\widehat{P_4 P_4'}$ bedeutet, erhalten wir:

$$3) \quad 2p\varphi = g_1 c_1^2 + g_2 c_2^2 + g_3 c_3^2 + g_4 c_4^2 + g_5 c_5^2 + g_6 c_6^2.$$

Hier haben wir eine kurze Bemerkung zu machen. Wenn man, um die Deformation des Systems zu erhalten, zwei Kräftepaare von endlicher Grösse anwenden würde, so wäre es unmöglich, das Gleichgewicht zu

Das Gleichgewicht des Poles P_1 wird erhalten mit Hülfe der drei Kräfte

$$p = g_6 c_6, \quad g_5 c_5, \quad g_3 c_3$$

und folglich muss, Fig. 3:

$$g_3 c_3 = \frac{\sin \gamma_4}{\sin \beta_4} \cdot g_6 c_6 = k_3 \cdot g_6 c_6 \quad \text{oder} \quad g_3 c_3^2 = \frac{k_3^2}{g_3} \cdot g_6^2 c_6^2$$

$$g_5 c_5 = \frac{\sin \alpha_4}{\sin \beta_4} \cdot g_6 c_6 = k_5 \cdot g_6 c_6 \quad - \quad g_5 c_5^2 = \frac{k_5^2}{g_5} \cdot g_6^2 c_6^2$$

sein.

Fig. 3.

Fig. 4.

Schliesslich wirken im Pole P_2 die das Gleichgewicht haltenden Kräfte $g_1 c_1$, $g_4 c_4$, $g_5 c_5$, und somit, Fig. 4,

$$g_1 c_1 = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma_2} \cdot g_5 c_5 = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma_2} \cdot k_5 g_6 c_6 = k_1 g_6 c_6$$

oder

$$g_1 c_1^2 = \frac{k_1^2}{g_1} \cdot g_6^2 c_6^2.$$

Wenn wir die so erhaltenen Werthe in die Gleichung 4) einsetzen, erhält dieselbe die Form:

$$5) \quad \varphi = \left[\frac{k_1^2}{g_1} + \frac{k_2^2}{g_2} + \frac{k_3^2}{g_3} + \frac{k_4^2}{g_4} + \frac{k_5^2}{g_5} + \frac{4}{g_6} \right] g_6^2 c_6^2,$$

oder durch Gleichsetzung

$$6) \quad A = \frac{k_1^2}{g_1} + \frac{k_2^2}{g_2} + \frac{k_3^2}{g_3} + \frac{k_4^2}{g_4} + \frac{k_5^2}{g_5} + \frac{4}{g_6},$$

$$7) \quad \text{die Form:} \quad g_6 c_6 = \frac{\varphi}{A}.$$

Zusammenfassung.

Der Gang der Ausgleichung der beobachteten sechs Winkel zwischen vier Flächen eines beliebigen Krystalles, von welchem nicht drei Flächen derselben Zone angehören, ist demnach folgender:

4) Man setze :

$$s_1 = \frac{a_1 + a_3 + a_5}{2}, \quad s_1' = \frac{a_1 + a_3 - a_5}{2},$$

$$s_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_4}{2}, \quad s_3' = \frac{a_1 + a_2 - a_4}{2},$$

$$p_1 = \sin s_1 \cdot \sin s_1', \quad \pi_1 = \sin a_1 \cdot \sin a_3,$$

$$p_3 = \sin s_3 \cdot \sin s_3', \quad \pi_3 = \sin a_1 \cdot \sin a_3.$$

$$2) \quad \cos \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{\frac{p_1}{\pi_1}} \quad \cos \frac{\gamma_1}{2} = \sqrt{\frac{p_3}{\pi_3}}, \quad \beta_1 = \gamma_1 - \alpha_1.$$

$$3) \quad \cos a_6' = \cos a_2 \cos a_3 + \sin a_2 \sin a_3 \cos \beta_1.$$

$$4) \quad \sin \alpha_3 = \sin \beta_1 \cdot \frac{\sin a_3}{\sin a_6'}.$$

$$5) \quad \sin \alpha_4 = \sin \beta_1 \cdot \frac{\sin a_2}{\sin a_6'}, \quad \sin \beta_4 = \sin \alpha_1 \cdot \frac{\sin a_1}{\sin a_5}.$$

$$6) \quad \gamma_4 = 360^\circ - (\alpha_4 + \beta_4).$$

$$7) \quad \sin \beta_3 = \sin \gamma_4 \cdot \frac{\sin a_5}{\sin a_4}, \quad \gamma_3 = \beta_3 + \alpha_3.$$

$$8) \quad k_1 = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma_2} \cdot \frac{\sin \alpha_4}{\sin \beta_4}$$

$$k_2 = \frac{\sin \beta_3}{\sin \gamma_3}$$

$$k_3 = \frac{\sin \gamma_4}{\sin \beta_4}$$

$$k_4 = \frac{\sin \alpha_3}{\sin \gamma_3}$$

$$k_5 = \frac{\sin \alpha_4}{\sin \beta_4}$$

$$k_6 = 1.$$

$$9) \quad A = \frac{k_1^2}{g_1} + \frac{k_2^2}{g_2} + \frac{k_3^2}{g_3} + \frac{k_4^2}{g_4} + \frac{k_5^2}{g_5} + \frac{k_6^2}{g_6}.$$

$$10) \quad g_6 c_6 = \frac{\varphi}{A}.$$

$$11) \quad g_r c_r = k_r \cdot g_6 c_6.$$

Das soeben berechnete Problem ist allgemein und bezieht sich natürlich auf das triklin System; es ist aber leicht auf specielle Fälle zu übertragen. In dem monoklinen Systeme wird man z. B. zu setzen haben: $a_2 = a_4 = 90^\circ$ und somit $\gamma_1 = \gamma_2 = 90^\circ$. Im rhombischen wird $a_1 = a_2 = a_4 = 90^\circ$ sein und folglich $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 90^\circ$; im tetragonalen Systeme wird ausserdem $\alpha_1 = \beta_1 = 45^\circ$ sein u. s. w.

Beispiel.

Als Beispiel wähle ich das schon von J. Beckenkamp*) für das triklin System berechnete. Für Anorthit vom Vesuv hatte er folgende Winkel gefunden:

$$\begin{aligned}
 P_1 : P_2 &= (11\bar{1}) : (010) = a_1 = 115^\circ 12' 0''_4 ; & g_1 &= 1 \\
 P_1 : P_3 &= (11\bar{1}) : (1\bar{1}0) = a_2 = 98^\circ 33' 2''_7 ; & g_2 &= 1 \\
 P_1 : P_4 &= (11\bar{1}) : (001) = a_3 = 57^\circ 49' 57''_6 ; & g_3 &= 1 \\
 P_2 : P_3 &= (010) : (1\bar{1}0) = a_4 = 117^\circ 34' 46''_4 ; & g_4 &= 1 \\
 P_2 : P_4 &= (010) : (001) = a_5 = 85^\circ 54' 17''_4 ; & g_5 &= 1 \\
 P_3 : P_4 &= (1\bar{1}0) : (001) = a_6 = 69^\circ 20' 0''_8 ; & g_6 &= 1
 \end{aligned}$$

Daraus berechnet sich :

$$\begin{aligned}
 s_1 &= 129^\circ 28' 7''_7 , & s_1' &= 43^\circ 33' 53''_3 \\
 s_3 &= 165^\circ 39' 39''_7 , & s_3' &= 48^\circ 5' 23''_3 . \\
 \log p_1 &= 9,725923 , & \log p_3 &= 9,265538 , \\
 \log \pi_1 &= 9,884191 , & \log \pi_3 &= 9,954711 , \\
 \log \cos \frac{\alpha_1}{2} &= 9,920866 , & \log \cos \frac{\gamma_1}{2} &= 9,656944 , \\
 \alpha_1 &= 67^\circ 5' 44''_4 , & \gamma_1 &= 126^\circ 1' 4''_3 \\
 \beta_1 &= \gamma_1 - \alpha_1 = 58^\circ 55' 19''_9 , \\
 \log \sin \beta_4 &= 9,929009 , & \beta_4 &= 123^\circ 19' 10''_0 , \\
 \log \sin \alpha_4 &= 9,956746 , & \alpha_4 &= 115^\circ 8' 58''_0 , \\
 \gamma_4 &= 360^\circ - (\beta_4 + \alpha_4) = 124^\circ 31' 52''_0 . \\
 a_6' &= 69^\circ 19' 56''_4 , \\
 \varphi &= a_6' - a_6 = -4''_4 . \\
 \log \sin \alpha_3 &= 9,889227 , & \alpha_3 &= 50^\circ 47' 34''_7 , \\
 \log \sin \beta_4 &= 9,981864 , & \beta_3 &= 73^\circ 33' 24''_3 . \\
 \gamma_4 &= \beta_3 + \alpha_3 = 124^\circ 20' 59''_0 . \\
 \log k_1 &= 0,033464_n , & k_1^2 &= 1,16662 \\
 \log k_2 &= 0,065099_n , & k_2^2 &= 1,34952 \\
 \log k_3 &= 0,008613 , & k_3^2 &= 1,04046 \\
 \log k_4 &= 9,972453_n , & k_4^2 &= 0,88085 \\
 \log k_5 &= 0,034737 , & k_5^2 &= 1,17348 \\
 & & k_6^2 &= 1,00000 \\
 & & A &= 6,64093
 \end{aligned}$$

$$c_6 = \frac{\varphi}{A} = -0''_65$$

$$c_1 = k_1 c_6 = +0''_70$$

$$c_2 = k_2 c_6 = +0''_77$$

*) Diese Zeitschr. 5, 442 und 22, 384.

$$\begin{aligned} c_3 &= k_3 c_6 = - 0,68 \\ c_4 &= k_4 c_6 = + 0,62 \\ c_5 &= k_5 c_6 = - 0,72 . \end{aligned}$$

Die Einfachheit dieser von mir vorgeschlagenen und zusammengesetzten Methode beruht in erster Linie darauf, dass die Berechnung der Coefficienten $k_1 k_2 k_3 k_4 k_5$ logarithmisch ist und auch graphisch sein kann; in zweiter Linie aber auch auf der Berechnung der Verbesserungen $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, indem man direct die Werthe in Bruchtheilen der Grade und nicht in solchen des Radius erhält, was einen grossen Vortheil bietet.

Der Leser wird bemerkt haben, dass die Berechnung mit einer kleinen Ungenauigkeit behaftet ist, die ich absichtlich und stillschweigend übergangen habe. Es wurden nämlich in der Berechnung von $k_1 k_2 k_3 k_4 k_5$ die Veränderungen nicht beachtet, welche die Winkel $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ und $\alpha_4 \beta_4 \gamma_4$ erfahren in Folge der Zunahme $c_1 c_2 \dots c_5$, welche die Winkel $\alpha_1 a_2 \dots a_5$ erhalten. Jedoch wird sich der Leser auch überzeugen können, dass diese Veränderungen höchstens Fehler des zweiten Grades erzeugen, wenn wir annehmen, dass die Verbesserungen $c_1 c_2 \dots c_6$ kleine Grössen des ersten Grades sind. So muss man eigentlich immer verfahren, wenn es sich um die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate handelt, und die zu berechnenden Unbekannten in transcendentaler Form vorkommen. Für unseren Zweck brauchen wir eine grössere Genauigkeit nicht zu verlangen.

Fig. 5.

Pole $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ mit den irrthümlichen Winkeln $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$, so wird man die Winkel

$$\widehat{P_3 P_4} = a_8', \quad \widehat{P_3 P_5} = a_9' \quad \text{und} \quad \widehat{P_4 P_5} = a_{10}'$$

Dieser Vorgang ist auch auf einen allgemeinen Fall übertragbar, wenn die Beobachtungsfehler nämlich zwischen mehr als vier Flächen ausgeglichen werden sollen. Um dies klar darzulegen genügt es, dass wir fünf solche in Betracht ziehen, zwischen denen man die Winkel $a_1 a_2 \dots a_{10}$ gemessen hat; die Gewichte dieser Ergebnisse sind $g_1 g_2 \dots g_{10}$, und die Verbesserungen, die man an den Winkeln anzu bringen hat, seien $c_1 c_2 \dots c_{10}$. Construiren wir, Fig. 5, wie wir vorher gethan haben, die

erhalten, die verschieden sind von den gemessenen Winkeln a_8, a_9, a_{10} , sodass, wenn wir von P_3 aus gegen P_4 den Winkel a_8 auftragen, wir einen Pol P_4' erhalten, von P_3 aus gegen P_5 den Winkel a_9 , einen Pol P_5' , ferner von P_4 aus gegen P_5 denjenigen a_{10} , einen Pol P_5'' . Die von einander unabhängigen Widersprüche des Systems werden sein:

$$\begin{aligned} a_8' - a_8 &= \varphi_1 \\ a_9' - a_9 &= \varphi_2 \\ a_{10}' - a_{10} &= \varphi_3. \end{aligned}$$

Es handelt sich nun darum, ein solches System von Verbesserungen zu wählen, dass die drei oben erwähnten Widersprüche Null werden, und dass dem Princip der kleinsten Quadrate Genüge geleistet sei. Kommen wir auf die schon benutzte mechanische Bedeutung des Problems zurück, so haben wir in den Zonen $P_4 P_4'$, $P_5 P_5'$ und $P_5 P_5''$ Kräftepaare anzubringen und das als elastisch angesehene System so zu deformieren, dass P_4' mit P_4 , P_5' und P_5'' mit P_5 übereinstimmen. Das Problem des Gleichgewichts dieses Systems wird identisch sein mit dem Probleme der Ausgleichungsrechnung, sobald wir annehmen, dass die inneren Kräftepaare proportional der Winkelzunahme seien. Den Beweis dieses Satzes brauchen wir nicht durchzuführen. Stellen wir also fest, dass das System so deformiert werden muss, dass wir äussere Kräftepaare in den drei Zonen $P_4 P_4'$, $P_5 P_5'$ und $P_5 P_5''$ anbringen, und dass diese Kräftepaare von einander unabhängig sind.

Das Problem des Gleichgewichtes eines elastischen Systems kann so behandelt werden, dass wir das Gleichgewicht zwischen den äusseren Kräften oder Kräftepaaren und den inneren Kräften oder Kräftepaaren, die aus den äusseren herkommen, einzeln betrachten.

Bevor wir aber dazu übergehen, schreiben wir folgende Zusammenstellung:

$$\begin{array}{lll} h_1 = \frac{\sin \beta_1}{\sin \gamma_1} \cdot \frac{\sin \gamma_4}{\sin \beta_4} & k_1 = \frac{\sin \beta_1'}{\sin \gamma_1'} \cdot \frac{\sin \gamma_4'}{\sin \beta_4'} & l_1 = \frac{\sin \varepsilon_2}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \varepsilon_4}{\sin \beta_4} \\ h_2 = \frac{\sin \beta_3}{\sin \gamma_3} & k_2 = \frac{\sin \alpha_3'}{\sin \gamma_3'} & l_3 = \frac{\sin (\varepsilon_4 + \beta_4)}{\sin \beta_4} \\ h_3 = \frac{\sin \gamma_4}{\sin \beta_4} & k_4 = \frac{\sin \gamma_4'}{\sin \beta_4'} & l_4 = \frac{\sin \varepsilon_5}{\sin \beta_4'} \\ h_5 = \frac{\sin \beta_3}{\sin \gamma_3} & k_5 = \frac{\sin \beta_3'}{\sin \gamma_3'} & l_6 = \frac{\sin \varepsilon_4}{\sin \beta_4} \\ h_6 = \frac{\sin \alpha_4}{\sin \beta_4} & k_7 = \frac{\sin \alpha_4'}{\sin \beta_4'} & l_7 = \frac{\sin (\varepsilon_5 + \beta_4')}{\sin \beta_4'} \\ h_8 = 1 & k_9 = 1 & l_{10} = 1, \end{array}$$

die die Bedingung des Gleichgewichtes ausdrückt.

Wenn zwei Kräftepaare nur in der Zone $P_4 P_4'$ angebracht werden, und

wenn die Winkeldrehung von P_4' gegen P_4 und in Bezug auf diese φ_1' ist, werden wir für das Gleichgewicht haben

$$\varphi_1' = \left[\frac{h_1^2}{g_1} + \frac{h_2^2}{g_2} + \frac{h_3^2}{g_3} + \frac{h_5^2}{g_5} + \frac{h_6^2}{g_6} + \frac{1}{g_8} \right] g_8 c_8 = A_1 g_8 c_8.$$

Ebenso wenn durch zwei äussere Kräftepaare, in der Zone $P_5 P_5'$ angebracht, eine Winkeldrehung φ_2' von P_5' gegen P_5 hervorgebracht wird, wird man haben:

$$\varphi_2' = \left[\frac{k_1^2}{g_1} + \frac{k_2^2}{g_2} + \frac{k_4^2}{g_4} + \frac{k_5^2}{g_5} + \frac{k_7^2}{g_7} + \frac{1}{g_9} \right] g_9 c_9 = A_2 g_9 c_9.$$

Und auf ähnliche Weise wird man, wenn die äusseren Kräftepaare in der Zone $P_5'' P_5$ wirken, in dieser Zone folgende Winkeldrehung bekommen:

$$\varphi_3' = \left[\frac{l_1^2}{g_1} + \frac{l_3^2}{g_3} + \frac{l_4^2}{g_4} + \frac{l_6^2}{g_6} + \frac{l_7^2}{g_7} + \frac{1}{g_{10}} \right] g_{10} c_{10} = A_3 g_{10} c_{10}.$$

Wie man sieht, wird alles, was wir früher ausführten, auch hier ohne Einschränkung angewandt. Nun bleibt zu erwägen, was entsteht, wenn die Kräftepaare in den drei Zonen gleichzeitig wirken. Sehen wir zuvörderst, welche Winkeldrehung zwischen P_4' und P_4 entsteht, wenn zwei Kräftepaare von der Grösse p in der Zone $P_5 P_5'$ wirken. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass nur der Winkel a_2 veränderlich sei; dann erhalten wir zuerst $g_2 c_2 = k_2 p$. Nun ist es klar, dass c_2 auch dann erhalten werden kann, wenn zwei andere Kräftepaare von der Grösse q in der Zone $P_4 P_4'$ wirken, sobald $g_2 c_2 = h_2 q$ ist, d. h. $h_2 q = k_2 p$.

Daraus folgt, dass die Kräftepaare von der Grösse p , in der Zone $P_5 P_5'$ angebracht, dieselbe Wirkung in der Zone $P_4 P_4'$ hervorbringen, wie zwei in dieser letzten Zone wirkende Kräftepaare von der Grösse q . Diese Wirkung ist

$$\frac{h_2^2 q}{g_2} = \frac{h_1 k_1}{g_1} p.$$

Daraus ersehen wir nebenbei, dass ein Kräftepaar, in der Zone $P_5 P_5'$ angebracht, eine Wirkung in der Zone $P_4 P_4'$ hervorbringt, welche mit derjenigen identisch ist, die in der Zone $P_5 P_5'$ entstehen würde, wenn dasselbe Kräftepaar in der Zone $P_4 P_4'$ angebracht wäre. Dieses Reciprocitätsgesetz trägt den Namen von Maxwell.

Lassen wir nun die Annahme fallen, dass nur a_2 veränderlich sei; dann bringen die Kräftepaare von der Grösse $g_9 c_9$ in der Zone $P_5 P_5'$ folgende Winkeldrehung in der Zone $P_4 P_4'$ hervor:

$$\varphi_1'' = \left[\frac{h_1 k_1}{g_1} + \frac{h_2 k_2}{g_2} + \frac{h_5 k_5}{g_5} \right] g_9 c_9 = B_1 \cdot g_9 c_9.$$

Auf gleiche Weise erzeugen die in der Zone $P_4 P_4'$ wirkenden Kräftepaare von der Grösse $g_8 c_8$ folgende Winkelveränderung in der Zone $P_5 P_5'$:

$$\varphi_2'' = \left[\frac{k_1 h_1}{g_1} + \frac{k_2 h_2}{g_2} + \frac{k_5 h_5}{g_5} \right] g_8 c_8 = B_1 \cdot g_8 c_8 ,$$

und ebenso die Kräftepaare $g_{10} c_{10}$ in den beiden Zonen $P_4 P_4'$ und $P_5 P_5'$ die respectiven Veränderungen:

$$\varphi_1''' = \left[\frac{h_1 l_1}{g_1} + \frac{h_3 l_3}{g_3} + \frac{h_6 l_6}{g_6} \right] g_{10} c_{10} = C_1 \cdot g_{10} c_{10} ,$$

$$\varphi_2''' = \left[\frac{k_1 l_1}{g_1} + \frac{k_4 l_4}{g_4} + \frac{k_7 l_7}{g_7} \right] g_{10} c_{10} = C_2 \cdot g_{10} c_{10} .$$

Umgekehrt werden die Kräftepaare $g_8 c_8$ und $g_9 c_9$, das eine in $P_4 P_4'$, das andere in $P_5 P_5'$ angebracht, einzeln folgende Variationen in $P_5 P_5''$ hervorbringen:

$$\varphi_3'' = \left[\frac{l_1 h_1}{g_1} + \frac{l_3 h_3}{g_3} + \frac{l_6 h_6}{g_6} \right] g_8 c_8 = C_1 \cdot g_8 c_8 ,$$

$$\varphi_3''' = \left[\frac{l_1 k_1}{g_1} + \frac{l_4 k_4}{g_4} + \frac{l_7 k_7}{g_7} \right] g_9 c_9 = C_3 \cdot g_9 c_9 .$$

Nachdem dies festgestellt ist, werden wir, um die totalen Winkelveränderungen gleich den Widersprüchen φ_1 , φ_2 , φ_3 unter der Einwirkung der in den Zonen $P_4 P_4'$, $P_5 P_5'$ und $P_5 P_5''$ wirkenden und von einander unabhängigen Kräftepaare zu erhalten, setzen müssen:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_1' + \varphi_1'' + \varphi_1''' \\ \varphi_2 &= \varphi_2' + \varphi_2'' + \varphi_2''' \\ \varphi_3 &= \varphi_3' + \varphi_3'' + \varphi_3''' . \end{aligned}$$

Wenn wir voriges berücksichtigen, erhalten wir folgende Gleichungen:

$$A_1 g_8 c_8 + B_1 g_9 c_9 + C_1 g_{10} c_{10} = \varphi_1 ,$$

$$B_1 g_8 c_8 + A_2 g_9 c_9 + C_1 g_{10} c_{10} = \varphi_2 ,$$

$$C_1 g_8 c_8 + C_2 g_9 c_9 + A_3 g_{10} c_{10} = \varphi_3 ,$$

welche dazu dienen, die Verbesserungen c_8 , c_9 , c_{10} zu bestimmen.

Dann lässt sich folgendes berechnen:

$$g_1 c_1 = h_1 \cdot g_8 c_8 + k_1 \cdot g_9 c_9 + l_1 \cdot g_{10} c_{10} ,$$

$$g_2 c_2 = h_2 \cdot g_8 c_8 + k_2 \cdot g_9 c_9 ,$$

$$g_3 c_3 = h_3 \cdot g_8 c_8 + l_3 \cdot g_{10} c_{10} ,$$

$$g_4 c_4 = k_4 \cdot g_9 c_9 + l_4 \cdot g_{10} c_{10} ,$$

$$g_5 c_5 = h_5 \cdot g_8 c_8 + k_5 \cdot g_9 c_9 ,$$

$$g_6 c_6 = h_6 \cdot g_8 c_8 + l_6 \cdot g_{10} c_{10} ,$$

$$g_7 c_7 = k_7 \cdot g_9 c_9 + l_7 \cdot g_{10} c_{10} .$$

Rom, Mai 1894.