Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper.

Von FELIX KLEIN in GÖTTINGEN.

Mit den Betrachtungen der Pluecker'schen Liniengeometrie stehen gewisse Probleme der Mechanik starrer Körper im engsten Zusammenhange, so namentlich die Aufgabe der Zusammensetzung beliebiger, auf einen starren Körper wirkender Kräfte, und die Untersuchung der von einem starren Körper ausgeführten unendlich kleinen Bewegungen.

Von einem solchen Zusammenhange spricht Pluecker bereits in der ersten grösseren Mittheilung, die er über seine neuen geometrischen Forschungen machte*); bald darauf widmet er dessen Auseinandersetzung einen besonderen Aufsatz.***) Auf denselben Gegenstand beziehen sich einzelne Stellen seiner „Neuen Geometrie“***), besonders die Nummern 25 und 39.

Pluecker beabsichtigte, wie aus wiederholten Andeutungen in der „Neuen Geometrie“ ersichtlich, die Anwendung seiner geometrischen Principien auf Mechanik in einem grösseren zusammenhängenden Werke, das der „Neuen Geometrie“ nachfolgen sollte, auseinanderzusetzen. Dass Pluecker diese Absicht nicht mehr verwirklicht hat, ist umsomehr zu bedauern, als die vorgenannten wenigen Stellen, wo er sich über seine mechanischen Conceptionen ausspricht, nur sehr kurz und schwer verständlich, häufig auch unbestimmt sind. Ich werde nun im Nachstehenden zunächst in kurzem Referate den Zusammenhang der im Eingange genannten mechanischen Probleme mit der Liniengeometrie darlegen, sodann einige Punkte besprechen, die mir in der Pluecker'schen Darstellung nicht ganz deutlich erscheinen. Hieran anknüpfend, werde ich dann eine besondere Art physikalischen Zusammenhangs erörtern, welche sich zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen aufstellen lässt.

*) On a New Geometry of Space. Phil. Trans. 1865, p. 725, cf. Additional Note.

**) Fundamental Views regarding Mechanics. 1866. p. 361.

***) Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig, B. G. Teubner. 1868/69.

§ 1.

Einiges über den Zusammenhang der Mechanik starrer Körper mit der Liniengeometrie.

Dass in der That zwischen der Liniengeometrie und der Mechanik starrer Körper ein intimer Zusammenhang besteht, um dies zu sehen, braucht man nur die geometrischen Betrachtungen über die Mechanik starrer Körper durchzugehen, wie sie von Poinso^t, Moebius, Chasles u. A. angestellt worden sind. *) Man hat bei diesen Untersuchungen fortwährend mit geometrischen Dingen zu thun, welche in der Liniengeometrie gleich anfangs und fundamental auftreten. Eine kurze Auseinandersetzung mag dies erläutern.

Die fraglichen Betrachtungen beziehen sich wesentlich auf die bereits genannten zwei Aufgaben, deren eine die Zusammensetzung von Kräften behandelt, welche auf einen starren Körper wirken, während die andere die unendlich kleinen Bewegungen untersucht, die ein starrer Körper vollführt. Beide Probleme sind gewissermassen geometrisch identisch, insofern die Betrachtung unendlich kleiner Bewegungen eines starren Körpers auf die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen eines solchen zurückkommt *und sich unendlich kleine Rotationen nach ganz derselben Regel wie Kräfte, nämlich nach der Regel vom Parallelogramm, zusammensetzen*. Dabei tritt also der Begriff der Kraft dem der *unendlich kleinen Rotation* als coordinirt **) gegenüber. Alle Betrachtungen, die man hinsichtlich Kräften anstellt, welche auf einen starren Körper wirken, können in ganz gleicher Form für unendlich kleine Rotationen angestellt werden, die ein solcher Körper ausführt, und umgekehrt.

Irgendwie gegebene Kräfte, welche einen starren Körper angreifen, können nun immer durch *zwei Kräfte* ***) ersetzt werden, deren eine man nach einer beliebig angenommenen Geraden wirken lassen

*) Vergl. bes. Moebius: Lehrbuch der Statik. Leipzig 1837. Theil I. In grosser Vollständigkeit finden sich die betreffenden Untersuchungen in Schell's Theorie der Bewegung und der Kräfte. Leipzig 1870.

**) Diese Coordination von Kraft und Rotation ist nur eine mathematische, keine physikalische. Vergl. § 4.

***) Die *Kräftepaare*, welche in der Poinso^t'schen Theorie eine so wichtige Rolle spielen, sind dabei anzusehen als (unendlich kleine) Kräfte, welche nach einer unendlich fernen Geraden wirken. In der That haben die beiden Kräfte eines Paares, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, nach dem Hebelgesetze eine unendlich ferne (und dann unendlich kleine) Resultante.

Analogerweise sind in den Betrachtungen des Textes Translationen eines Körpers anzusehen als Rotationen um unendlich ferne Axen.

Kräftepaare und Translationen sind also in demselben Sinne coordinirt, wie Kräfte und Rotationen.

kann; worauf denn die Gerade, nach der die andere Kraft wirkt, und die Intensität beider Kräfte gegeben sind. Ebenso lässt sich jedes System unendlich kleiner Rotationen, oder, kürzer gesagt, jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers aus *zwei* unendlich kleinen Rotationen zusammensetzen. Eine der Rotationsachsen kann dabei beliebig im Raume angenommen werden; dann ist die andere Axe und die Grösse der um beide stattfindenden Rotation bestimmt. Durch ein Kräftesystem oder eine unendlich kleine Bewegung werden sonach die Geraden des Raumes paarweise conjugirt; bereits Moebius hat gezeigt *), dass die gegenseitige Beziehung beider durch eine besondere Art dualer Verwandtschaft gegeben ist, derjenigen Art, die man nach v. Staudt als „Nullsystem“ bezeichnet und die dadurch gegenüber anderen dualen Verwandtschaften ausgezeichnet ist, dass jeder Punkt mit der ihm entsprechenden Ebene vereinigt liegt. Im Nullsysteme giebt es dreifach unendlich viele „Nullgerade“, das sind solche Linien, welche mit ihren conjugirten zusammenfallen. Alle Linien, welche durch einen beliebigen Punkt in dessen entsprechender Ebene verlaufen, sind Nullgerade, und sind die Nullgeraden auch umgekehrt dadurch vollständig definirt, dass sie in der jedem ihrer Punkte entsprechenden Ebene liegen. — Will man eine der beiden Kräfte, in welche ein gegebenes Kräftesystem zerlegt werden soll, nach einer Nullgeraden des betreffenden Nullsystems wirken lassen, so wirkt auch die zweite Kraft nach derselben Nullgeraden. Die Intensität beider Kräfte wird unendlich gross und die Kräfte erscheinen entgegengesetzt gerichtet. Man hat es dann also mit einem Grenzfall der allgemeinen Zerlegung des Kräftesystems in zwei Kräfte zu thun, der nur, insofern er Grenzfall ist, einen Sinn hat. Bei der Betrachtung unendlich kleiner Rotationen würde man ebenso, wenn man eine der beiden Rotationen, in die man das System zerlegen kann, um eine Nullgerade des zugehörigen Nullsystems geschehen lässt, zu einem an und für sich nicht verständlichen Grenzfall gelangen. Die Nullgeraden haben in beiden Fällen auch noch eine weitere leicht angebbare Eigenschaft. Im Falle des Kräftesystems sind die Nullgeraden diejenigen Linien des Raumes, um welche das Moment des Kräftesystems gleich Null ist; im Falle der unendlich kleinen Bewegung sind die Nullgeraden diejenigen Linien, welche senkrecht zu sich selbst versetzt werden, d. h. ohne eine Verschiebung parallel mit ihrer Richtung zu erfahren. **)

*) Crelle's Journal t. X. Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse im Raume.

**) Moebius, Statik. I. § 84 ff. Chasles in den Comptes Rendus. 1843. Sur les mouvements infiniment petits des corps.

Nun ist die dreifach unendliche Mannigfaltigkeit der Nullgeraden eines Nullsystems genau dasselbe, was Pluecker als einen linearen Liniencomplex bezeichnet*), d. h. also wie diejenige dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Geraden, deren Coordinaten eine lineare Gleichung befriedigen.

Ein beliebiges Kräftesystem, wie eine beliebige unendlich kleine Bewegung ist sonach jedesmal mit einem bestimmten linearen Complexen in Verbindung gesetzt. Die Linien des Complexes sind diejenigen Raumgeraden, in Bezug auf welche das Kräftesystem kein Drehmoment hat, resp. welche bei der unendlich kleinen Bewegung senkrecht gegen sich selbst versetzt werden. Die durch den Complex paarweise zugeordneten Geraden — die *conjugirten Polaren des Complexes* in der Pluecker'schen Terminologie**) — sind diejenigen Linienpaare, nach denen zwei Kräfte wirken können, welche dem gegebenen Kräftesystem äquivalent sind, bez. um welche zwei unendlich kleine Rotationen geschehen können, die die gegebene unendlich kleine Bewegung ersetzen.

Das beliebige Kräftesystem, resp. die beliebige unendlich kleine Bewegung kann für die geometrische Vorstellung geradezu durch den zugehörigen linearen Complex ersetzt werden. Man muss dabei im Falle des Kräftesystems nur von der absoluten Grösse der wirkenden Kräfte absehen und alle solchen Kräftesysteme als wesentlich identisch betrachten, die sich nur hinsichtlich ihrer Intensität unterscheiden. Bei unendlich kleinen Bewegungen wird dem Begriffe des Unendlichkleinen entsprechend von vornherein von der absoluten Grösse abstrahirt, und es braucht eine solche Abstraction also nicht hier noch ausdrücklich eingeführt zu werden.

Ein linearer Complex kann insbesondere ein specieller Complex werden***), d. h. in die Gesamtheit aller Geraden übergehen, die eine feste Gerade schneiden. Das mit dem linearen Complexen gleichbedeutende Kräftesystem reducirt sich dem entsprechend auf eine einzelne Kraft, die nach der festen Geraden wirkt; die mit dem linearen Complexen gleichbedeutende unendlich kleine Bewegung auf eine Rotation, welche um die feste Gerade geschieht.

---

*) cf. Pluecker. Neue Geometrie n. 29.

**) Neue Geometrie n. 28.

***) Neue Geometrie n. 45. Dem entspricht, dass die Determinante des betr. Nullsystems verschwindet.

§ 2.

Analytische Darstellung. Coordinaten von Kräften und (unendlich kleinen) Rotationen. Coordinaten von Kräftesystemen und (unendlich kleinen) Bewegungen.

Man beweist die vorgetragenen Dinge am einfachsten, wenn man, nach dem Vorgange von Pluecker*), einer Kraft, resp. unendlich kleinen Rotation, geradezu *Coordinaten* ertheilt, nämlich dieselben Coordinaten, welche die gerade Linie besitzt, nach welcher die Kraft wirkt, bez. um welche die Rotation geschieht.

Seien, unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, x, y, z und x', y', z' die Coordinaten zweier Punkte der zu bestimmenden Geraden, so erhält ihre Verbindungslinie bei Pluecker als Coordinaten die relativen Werthe der folgenden 6 Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \varrho X &= x - x' & \varrho Y &= y - y' & \varrho Z &= z - z' \\ \varrho L &= yz' - y'z & \varrho M &= x'z - xz' & \varrho N &= xy' - x'y. \end{aligned}$$

Dabei ist identisch:

$$XL + YM + ZN = 0,$$

wodurch die relativen Werthe der 6 Grössen X, Y, Z, L, M, N auf die zur Bestimmung einer Geraden nothwendigen 4 Constanten zurückkommen.

Auf *dieselben* 6 Coordinaten kommt man bekanntlich, wenn man die Gerade nicht, wie vorstehend, als Verbindungslinie zweier Punkte, als einen *Strahl*, wie Pluecker sagt, sondern als Durchschnittslinie zweier Ebenen, als eine *Axe*, nach Pluecker's Ausdrucksweise, auffasst. — Während die mechanische Vorstellung der nach einer Geraden wirkenden Kraft mit der geometrischen der Geraden als Strahl verknüpft ist, ist es die mechanische der um eine Gerade geschehenden Rotation mit der geometrischen der Geraden als Axe.

Einer Kraft, die nach einer Geraden wirkt, bez. einem unendlich kleinen Rotation, die um eine solche geschieht, ertheilen wir nun geradezu die 6 Grössen

$$X, Y, Z, L, M, N$$

als Coordinaten.

Für Kräfte kommt diese Coordinatenbestimmung, sobald man noch die absoluten Werthe der 6 Coordinaten der Intensität der Kraft proportional festlegt, auf die gewöhnliche Art und Weise heraus, wie man Kräfte in der Mechanik bezeichnet. X, Y, Z sind die Componenten parallel zu den 3 Coordinatenachsen, L, M, N die Drehungsmomente um dieselben Axen.

*) cf. Neue Geometrie n. 25.
Mathematische Annalen IV.

Eine solche Festlegung der absoluten Werthe der Coordinaten hat bei einer unendlich kleinen Rotation so lange keinen Sinn, als man nicht eine (willkürlich gewählte) andere unendlich kleine Rotation als gleichzeitig mit ihr eintretend ansieht, der man dann die Intensität 1 ertheilt.

Kräfte und Rotationen, deren Coordinaten in dieser Weise absolute Werthe bekommen haben, setzen sich nun zusammen, indem sich ihre Coordinaten addiren.*)

Dieser Satz sagt zunächst aus, dass alle Systeme von Kräften, bez. alle Systeme von Rotationen, welche durch Addition der den einzelnen Kräften bez. Rotationen zugehörigen Coordinaten dieselben 6 Werthe ergeben, äquivalent sind.

Diese durch Addition erhaltenen 6 Werthe, welche wir als *Coordinaten des Kräftesystems* bez. als *Coordinaten der unendlich kleinen Bewegung* ansprechen können, mögen heißen:

$$\Xi, H, Z, \Lambda, M, N.$$

Es kann nun insbesondere sein:

$$\Xi\Lambda + HM + ZN = 0.$$

Dann kann das Kräftesystem durch eine einzelne Kraft, die unendlich kleine Bewegung durch eine Rotation ersetzt werden, deren Coordinaten geradezu sind:

$$X = \Xi, \quad Y = H, \quad Z = Z, \quad L = \Lambda, \quad M = M, \quad N = N.$$

Ist aber die Bedingung

$$\Xi\Lambda + HM + ZN = 0$$

nicht erfüllt, so kann man das Kräftesystem nur durch 2 Kräfte, die unendlich kleine Bewegung nur durch 2 Rotationen ersetzen. Sind die Coordinaten der beiden Kräfte, bezüglich der beiden Rotationen:

$$X', Y', Z', L', M', N' \quad \text{und} \quad X'', Y'', Z'', L'', M'', N'',$$

so muss sein:

$$X' + X'' = \Xi, \quad Y' + Y'' = H, \quad Z' + Z'' = Z$$

$$L' + L'' = \Lambda, \quad M' + M'' = M, \quad N' + N'' = N.$$

Gleichzeitig ist dann:

$$X'L' + Y'M' + Z'N' = 0, \quad X''L'' + Y''M'' + Z''N'' = 0.$$

*) Battaglini hat die sich hier anknüpfenden Dinge in einer Reihe von Aufsätzen in den Rendiconti und Atti der Akademie zu Neapel unter Zugrundelegung tetraedrischer Coordinaten ausgeführt. [In den Rendiconti vom Februar, Mai, August 1869, Mai 1870 und in den Atti. Vol. IV, 1869.]

Man vergl. auch Cayley: On the six Coordinates of a line. Cambridge Transactions. Vol. XI. 1868, bes. das Kapitel: Statical and Kinematical Applications (p. 25).

Diese Gleichungen sagen nun aus, dass die geraden Linien X', Y', Z', L', M', N' und $X'', Y'', Z'', L'', M'', N''$ conjugirte Polaren sein sollen in Bezug auf den linearen Complex, dessen Gleichung ist

$$\Lambda X + M Y + N Z + \Xi L + H M + Z N = 0.$$

Da sich in der „Neuen Geometrie“ nicht gerade eine Stelle findet, aus der man dieses ohne Weiteres erschen kann, folge hier der kurze Beweis.

Die Bedingung, dass eine gerade Linie die feste Gerade X', Y', Z', L', M', N' schneide, ist:

$$L' X + M' Y + N' Z + X' L + Y' M + Z' N = 0.$$

Ebenso für die Gerade $X'', Y'', Z'', L'', M'', N''$:

$$L'' X + M'' Y + N'' Z + X'' L + Y'' M + Z'' N = 0.$$

Durch Addition beider Gleichungen folgt:

$$\Lambda X + M Y + N Z + \Xi L + H M + Z N = 0,$$

Das heisst: Alle Geraden, welche die beiden X', Y', Z', L', M', N' und $X'', Y'', Z'', L'', M'', N''$ schneiden, gehören dem fraglichen linearen Complex an. Das aber ist die charakteristische Eigenschaft*) der conjugirten Polaren, w. z. b.

Die Coefficienten

$$\Xi, H, Z, \Lambda, M, N$$

in der Gleichung des linearen Complexes kann man geradezu als *Coordinaten des linearen Complexes***) bezeichnen. Es ist das darum gestattet, weil, wenn die 6 Coefficienten insbesondere die Gleichung befriedigen:

$$\Xi \Lambda + H M + Z N = 0,$$

sie die Coordinaten desjenigen speciellen Complexes sind, der dann durch die gegebene lineare Gleichung

$$\Lambda X + M Y + N Z + \Xi L + H M + Z N = 0$$

dargestellt wird, d. h. die Coordinaten derjenigen geraden Linie, welche von allen der Gleichung genügenden Geraden geschnitten wird. Es muss ja in der That die vorstehende Gleichung bestehen, damit sich 2 Gerade mit den Coordinaten Ξ, H, Z, Λ, M, N und X, Y, Z, L, M, N schneiden.

Gebrauchen wir nun diesen Ausdruck: Coordinaten eines linearen Complexes, gleichgültig, ob der Complex ein specieller (eine gerade

*) Neue Geometrie n. 28.

**) Vergl.: „Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten“. Math. Ann. t. II, p. 366.

Linie) geworden ist oder nicht, so können wir, unabhängig davon, ob ein gegebenes Kräftesystem eine Resultante hat oder nicht, resp. ob eine gegebene unendlich kleine Bewegung sich auf eine Rotation reducirt oder nicht, den Satz aussprechen:

Das geometrische Bild für ein Kräftesystem, bez. eine unendlich kleine Bewegung mit den Coordinaten:

$$\Xi, H, Z, \Lambda, M, N$$

ist ein linearer Complex, der dieselben Coordinaten besitzt.

§ 3.

Besprechung einiger besonderer Punkte.

Es sind nun einige Dinge, wie bereits im Eingange erwähnt, die in der von Pluecker gegebenen Darstellung des Zusammenhanges seiner Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper, wie sie etwa in der 25. Nummer der „Neuen Geometrie“ vorliegt, nicht ganz klar zu sein scheinen.

Kräftesysteme und unendlich kleine Bewegungen können, nach dem Vorstehenden, beide unter demselben geometrischen Bilde, dem linearen Complex, vorgestellt werden. Ein und derselbe Complex ist also einmal Bild eines Kräftesystems, das andere Mal Bild einer unendlich kleinen Bewegung: ganz in demselben Sinne, wie ein und dieselbe gerade Linie (ein specieller Complex) einmal eine nach ihr wirkende Kraft, das andere Mal eine um sie stattfindende Rotation versinnlichte. Zwischen dem Kräftesystem und der unendlich kleinen Bewegung, die sich auf denselben linearen Complex beziehen, besteht ebensowenig ein ursächlicher physikalischer Zusammenhang, als zwischen der Kraft, welche nach einer Geraden wirkt, und der Rotation, die um dieselbe Gerade stattfindet.

Aber in der Pluecker'schen Darstellung sieht es so aus, als wenn das Kräftesystem die Ursache der zugehörigen (auf denselben linearen Complex bezüglichen) unendlich kleinen Bewegung sei. Dementsprechend wird denn auch Beides, als wesentlich identisch, mit dem einheitlichen Namen „Dynamie“ bezeichnet.

Dass ein Kräftesystem und eine unendlich kleine Bewegung bei diesen Betrachtungen überhaupt nicht in einen ursächlichen Zusammenhang gesetzt werden können, ist daraus ersichtlich, dass bei einem gegebenen Kräftesystem doch nur dann eine bestimmte Bewegung des starren Körpers erfolgt, wenn derselbe eine Masse, einen Schwerpunkt, ein Trägheitsellipsoid etc. besitzt. Durch einen bestimmten starren Körper, dessen Masse etc. ein für allemal gegeben ist, wird

also allerdings jedem Kräftesystem eine bestimmte unendlich kleine Bewegung, die seine Wirkung ist, coordinirt. *) So lange man aber nur schlechthin von einem starren Körper spricht, dessen Massenvertheilung gar nicht in Betracht kommt, kann von einer ursächlichen Zuordnung überhaupt nicht die Rede sein.

Es entsteht dabei die Frage, ob nicht eine andere Art physikalischen Zusammenhanges zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen obwaltet, auf den die mathematische Coordination der beiden Dinge zurückzuführen wäre. Davon soll in dem nächsten Paragraphen gehandelt werden.

Ein weiterer Punkt, der in der Pluecker'schen Darstellung nicht ganz deutlich scheint, ist der folgende, der übrigens mit dem erwähnten nahe zusammenhängt.

Wenn wir von einer Kraft sprechen, so knüpft das an die geometrische Vorstellung der Geraden als einer Punktreihe, als eines Strahles, an. Dagegen, wenn eine (unendlich kleine) Rotation um eine Gerade stattfindet, so fassen wir die Gerade als ein Ebenenbüschel, als eine Axe. An eine Axe die Vorstellung einer Kraft anzuknüpfen, d. h. also eine Kraft sich zu denken, welche einen frei beweglichen starren Körper um eine *bestimmte* Gerade drehen will, ist ebenso unmöglich, wie mit einem Strahl die Vorstellung einer unendlich kleinen Bewegung zu verbinden, die dann den Körper nach einer einzelnen, *bestimmten* Geraden verschieben müsste. Eine Drehkraft, d. h. ein Kräftepaar, hat nicht eine Axe, sondern unendlich viele, deren Richtung allein gegeben ist; ebenso verschiebt eine Translation nicht einen einzelnen Strahl in sich, sondern gleichzeitig alle parallelen Strahlen. Man kann also auch nicht die geometrische Vorstellung einer Axe mit der mechanischen einer Drehkraft, die geometrische Vorstellung eines Strahles mit der mechanischen einer Translation verknüpfen. Es kann nur die Rede sein von Kräften, die *nach* geraden Linien wirken, und von Bewegungen, die *um* solche geschehen. Dies tritt bei Pluecker nicht deutlich hervor; Pluecker spricht meist von Kräften und Rotationen, dann aber auch wieder von Translationen und Drehkräften, und hat es an einzelnen Stellen den Anschein, als wäre jede Kraft mit einer Translation, jede Drehkraft mit einer Rotation ursächlich verknüpft.

---

*) Da sowohl das Kräftesystem als die unendlich kleine Bewegung durch einen linearen Complex ersetzt werden können, so begründet jeder starre Körper von gegebener Massenvertheilung eine besondere Art räumlicher Verwandtschaft, bei welcher jedem linearen Complexe ein zweiter zugeordnet ist. Für Körper, deren Trägheitsellipsoid eine Kugel ist, wird die Verwandtschaft geradezu die Polar-Reciprocität hinsichtlich einer um den Schwerpunkt des Körpers herumgelegten Kugel.

Dass man nur von Kräften sprechen kann, welche *nach* geraden Linien wirken, nur von Bewegungen, die *um* solche geschehen, kommt auf den dualistischen Charakter zurück, den überhaupt unsere Massbestimmung besitzt. Dieselbe bezieht sich bekanntlich auf eine ebene Curve 2^{ten} Grades, den unendlich weit entfernten imaginären Kreis. Man kann nun aber nach dem Vorgange von Cayley*) eine allgemeinere Massbestimmung concipiren, bei welcher eine allgemeine Fläche 2^{ten} Grades dieselbe Rolle spielt, wie sonst die genannte ebene Curve. Führt man eine solche Massbestimmung ein und ersetzt gleichzeitig die sechsfach unendlich vielen Bewegungen unseres Raumes durch ebenso viele lineare Transformationen, welche die fundamentale Fläche 2^{ten} Grades unverändert lassen**): — so kann man gleichmässig von Kräften sprechen, die nach Geraden und die um Gerade wirken, und von Bewegungen, die um Gerade und nach Geraden geschehen. Es würden aber beide Arten von Kräften und beide Arten von Bewegungen gleichbedeutend sein. Eine Drehung um eine Gerade ist dann dasselbe, wie eine Verschiebung nach der ihr in Bezug auf die fundamentale Fläche 2^{ten} Grades conjugirten Polare. Ebenso eine Kraft, die nach einer Geraden wirkt, dasselbe, wie eine Kraft, die um deren conjugirte Polare zu drehen bestrebt ist.

Ein dritter Punkt, der bei Plücker wenigstens nicht ausdrücklich hervorgehoben ist, ist der, dass man nur unendlich kleine Rotationen, überhaupt unendlich kleine Bewegungen in Betracht ziehen darf. Endliche Bewegungen setzen sich ja in anderer Weise zusammen, als unendlich kleine, es ist z. B. die Aufeinanderfolge bei der Zusammensetzung nicht gleichgültig, während es bei unendlich kleinen Bewegungen, ebenso wie bei der Zusammensetzung von Kräften, auf die Reihenfolge nicht ankommt.

---

*) cf. Cayley. A sixth Memoir upon Quantics. Phil. Trans. 1839. Sodann: Salmon's Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Cap. XXII. (der Fiedler'schen Uebersetzung).

**) Eine Fläche 2^{ten} Grades geht durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen in sich über. Aber dieselben sondern sich in 2 sechsfach unendliche Gruppen. *Bei den Transformationen der einen Gruppe bleiben die beiden Systeme geradliniger Erzeugender der Fläche ungeändert, bei den Transformationen der zweiten Gruppe vertauschen sich die beiden Systeme gegenseitig.* Die Transformationen der ersten Gruppe sind im Texte gemeint; sie gehen, wenn die F_2 allmählich in den unendlich weiten imaginären Kreis übergeht, allmählich in die sechsfach unendlich vielen Bewegungen des Raumes über. — Bei einer nächsten Gelegenheit denke ich zu zeigen, wie die im Texte erwähnte Cayley'sche Massbestimmung unter Hinzunahme dieser sechsfach unendlich vielen Transformationen genau zu denselben geometrischen Vorstellungen hinleitet, wie sie, von einem ganz anderen Ausgangspunkte aus, Lobatchefsky und Bolyai entwickelt haben.

§ 4.

**Ueber die Art des physikalischen Zusammenhanges zwischen
Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen.**

Es lässt sich nun in der That ein physikalischer Zusammenhang zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen angeben, welcher es erklärt, wie so die beiden Dinge mathematisch coordinirt auftreten. Diese Beziehung ist nicht von der Art, dass sie jedem Kräftesystem eine einzelne unendlich kleine Bewegung zuordnet, sondern sie ist anderer Art, sie ist eine *dualistische*.

Es sei ein Kräftesystem mit den Coordinaten

$$\Xi, H, Z, \Lambda, M, N$$

und eine unendlich kleine Bewegung mit den Coordinaten

$$\Xi', H', Z', \Lambda', M', N'$$

gegeben, wobei man die Coordinaten in der im § 2. besprochenen Weise absolut bestimmt haben mag. Dann repräsentirt, wie hier nicht weiter nachgewiesen werden soll, der Ausdruck

$$\Lambda'\Xi + M'H + N'Z + \Xi'\Lambda + H'M + Z'N$$

das Quantum von Arbeit, welche das gegebene Kräftesystem bei Eintritt der gegebenen unendlich kleinen Bewegung leistet.

Ist insbesondere:

$$\Lambda'\Xi + M'H + N'Z + \Xi'\Lambda + H'M + Z'N = 0,$$

so leistet das gegebene Kräftesystem bei Eintritt der gegebenen unendlich kleinen Bewegung keine Arbeit.

Diese Gleichung nun repräsentirt uns, indem wir einmal Ξ, H, Z, Λ, M, N , das andere Mal $\Xi', H', Z', \Lambda', M', N'$ als veränderlich betrachten, den Zusammenhang zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen.

Betrachten wir Ξ, H, Z, Λ, M, N als veränderlich, so sagt die Gleichung aus: Es giebt vierfach unendlich viele Kräftesysteme*), welche bei einer gegebenen unendlich kleinen Bewegung keine Arbeit leisten. Ihre Coordinaten haben eine homogene lineare Gleichung zu befriedigen. Das kann man auch so aussprechen:

Durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Coordinaten eines Kräftesystems wird eine unendlich kleine Bewegung dargestellt; ganz in demselben Sinne, wie etwa in der analytischen Geometrie durch eine homogene lineare Gleichung zwischen Punktcoordinaten, welche aussagt, dass die Entfernung eines Punktes von einer gewissen Ebene gleich Null sein soll, diese gewisse Ebene dargestellt wird.

*) Diejenigen als identisch betrachtet, die sich nur hinsichtlich des absoluten Werthes ihrer Coordinaten unterscheiden.

Betrachten wir dagegen $\Xi', H', Z', \Lambda', M', N'$ als veränderlich, so sagt unsere Gleichung aus: Es giebt vierfach unendlich viele unendlich kleine Bewegungen, bei deren Eintritt ein gegebenes Kraftsystem keine Arbeit leistet. Ihre Coordinaten genügen einer homogenen linearen Gleichung. Anders ausgedrückt:

Durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Coordinaten einer unendlich kleinen Bewegung wird ein Kräftesystem dargestellt, ganz dem entsprechend, wie, wenn wir bei dem eben angezogenen Beispiele aus der analytischen Geometrie bleiben, durch eine lineare Gleichung zwischen Ebenencoordinaten ein Punkt dargestellt wird.

Das geometrische Substrat für die hiermit auseinandergesetzte Dualität zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen bildet die doppelte Art und Weise, wie sich in der Liniengeometrie alle Begriffe fassen lassen, wenn man vom linearen Complexe als Raumelement ausgeht. *) Ein linearer Complex ist dann gleichzeitig Raumelement, andererseits das durch eine lineare Gleichung dargestellte Gebilde. Die Gleichung:

$$\Lambda' \Xi + M' H + N' Z + \Xi' \Lambda + H' M + Z' N = 0,$$

in der nunmehr Ξ, H, Z, Λ, M, N und $\Xi', H', Z', \Lambda', M', N'$ die Coordinaten zweier linearer Complexe bedeuten sollen, sagt eine zwischen denselben geltende Beziehung aus, die ich als *involutorische Lage* derselben bezeichne. **) Was man unter der involutorischen Lage zweier linearer Complexe geometrisch zu verstehen hat, ist vielleicht am einfachsten so auseinander zu setzen. Jedem Punkte des Raumes entspricht im ersten Complexe eine Ebene, dieser Ebene im zweiten Complexe ein Punkt. Auf denselben Punkt kommt man bei involutorischer Lage der beiden Complexe, wenn man die Ebene betrachtet, die dem anfänglich gewählten Punkte im zweiten Complexe entspricht und nun den Punkt sucht, der dieser Ebene im ersten Complexe zugehört. Die mit den beiden Complexen verknüpften dualen Umformungen des Raumes sind also miteinander vertauschbar. — Ist einer der beiden Complexe ein specieller, d. h. eine Gerade, so tritt die involutorische Lage dann ein, wenn die Gerade dem anderen Complexe angehört. Sind beide Complexe Gerade, so ist die involutorische Lage mit dem Schneiden der beiden Geraden gleichbedeutend.

*) Ich habe diese geometrischen Betrachtungen in dem bereits citirten Aufsatze: „Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten. Math. Ann. t. II.“ des Weiteren ausgeführt.

**) Auf die involutorische Lage zweier linearer Complexe kommt auch Herr Battaglini in den genannten Aufsätzen; er bezeichnet sie als „harmonische Lage“ zweier Complexe. Das Wort „Involution“ wird von ihm gebraucht, um Mannigfaltigkeiten zu bezeichnen, die von Parametern linear abhängen.

Ein linearer Complex kann nach dem Gesagten entweder als Raumelement oder als die vierfach unendliche Mannigfaltigkeit der mit ihm in Involution liegenden Complexe aufgefasst werden.

Geben wir dem linearen Complexe die mechanische Bedeutung einer unendlich kleinen Bewegung, so repräsentiren die vierfach unendlich vielen mit ihm in Involution liegenden Complexe diejenigen Kraftsysteme, welche bei Eintritt der unendlich kleinen Bewegung keine Arbeit leisten. Umgekehrt: knüpfen wir an den linearen Complex die mechanische Vorstellung eines Kräftesystems, so stellen die vierfach unendlich vielen mit ihm in Involution liegenden Complexe diejenigen unendlich kleinen Bewegungen dar, bei denen das Kraftsystem keine Arbeit leistet.

Unter den vierfach unendlich vielen mit einem linearen Complexe in Involution liegenden Complexen finden sich auch, wie bereits gesagt, die dreifach unendlich vielen ihm angehörigen geraden Linien. Für sie können wir insbesondere die vorstehenden beiden Sätze aussprechen. Dieselben werden dann gleichbedeutend mit den beiden in § 1. genannten Sätzen, die so lauteten: Wenn ein linearer Complex das Bild eines Kräftesystems oder einer unendlich kleinen Bewegung ist, so sind die ihm angehörigen Geraden diejenigen Linien des Raumes, in Bezug auf welche das Kräftesystem kein Drehmoment hat, resp. welche bei der unendlich kleinen Bewegung senkrecht gegen sich selbst versetzt werden.

Göttingen, im Juni 1871,