Die doppelte Bedingung für eine Rotationsfläche zweiten Grades.

Von

Rudolf Sturm in Breslau.

1. Für eine Fläche zweiten Grades:

$$\varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z) = 0,$$

worin

$$\varphi(x, y, z) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy,$$

$$\psi(x, y, z) = 2a_{03}x + 2a_{13}y + 2a_{23}z + a_{33}$$

ist und rechtwinklige Koordinaten zugrunde liegen, ist bekanntlich:

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{00} - \varrho & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} - \varrho & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

die für die Transformation auf die Achsen (bzw. in den Spezialfällen auf eine andere kanonische Form) wichtige kubische Gleichung mit drei stets reellen Wurzeln a_0, a_1, a_2 , welche bei den Mittelpunktsflächen den reziproken Halbachsenquadraten proportional sind.

Besitzt sie eine *Doppelwurzel*, $a_0 = a_1$, so handelt es sich, wofern die Flächengleichung reell vorausgesetzt wird, im allgemeinen um eine *Rotationsfläche* oder, falls diese Wurzel 0 ist, um einen *parabolischen Zylinder*. Diese letztere Möglichkeit einer *Nicht-Rotationsfläche* wird von Hesse¹⁾ nicht erwähnt; auch Gundelfinger, der Herausgeber der dritten Auflage, tut es nicht. Für eine Doppelwurzel ist — bei reellen Koeffizienten $a_{00}, \dots$ — notwendig, daß die *zweifache* Bedingung

$$(1) \quad \frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{b_{20}}{a_{20}} = \frac{b_{01}}{a_{01}}$$

erfüllt wird; b_{12}, b_{20}, b_{01} sind die Adjunkten der a_{12}, a_{20}, a_{01} in der

¹⁾ Analytische Geometrie des Raumes, 3. Aufl., 19. Vorlesung.

Diskriminante $\Lambda(0)$ von φ ; aber dafür ist vorausgesetzt, daß *keiner von diesen drei Koeffizienten gleich null ist*, was auch von Hesse und Gundelfinger nicht erwähnt wird. Ist einer null, so gelten zwei andere Bedingungen: die eine ist, daß noch ein zweiter null ist; und ist etwa $a_{12} = a_{20} = 0$, so ist die andere Bedingung: $(a_{00} - a_{22})(a_{11} - a_{22}) = a_{01}^2$. Damit hat man z. B. zu tun bei der Aufsuchung von Tangentialkegeln einer Fläche zweiten Grades, welche Rotationskegel sind.

2. Im Grunde ist das Vorhandensein einer Doppelwurzel eine einfache Bedingung: Verschwinden der Diskriminante der kubischen Gleichung $\Lambda(\varrho) = 0$; sie wird zweifach, weil Realität der Flächengleichung verlangt wird. Kummer zerlegt bekanntlich dazu diese Diskriminante in Quadrate, die einzeln null werden müssen, und Hesse gibt diese Untersuchung wieder²⁾. Aber Kummer erhält statt zweier Quadrate, wie es erwünscht wäre, *sieben* Quadrate:

$15\{a_{300}^2 + a_{030}^2 + a_{003}^2\} + a_{111}^2 + (a_{120} - a_{102})^2 + (a_{012} - a_{210})^2 + (a_{201} - a_{021})^2$; die sieben Gleichungen folgen aus der obigen Doppelgleichung (1) und sind also mit zwei Gleichungen äquivalent.

Für $a_{300} = 0$, $a_{030} = 0$, $a_{003} = 0$ ist das unmittelbar ersichtlich, denn $a_{300} = a_{20}b_{10} - a_{10}b_{20} = 0, \dots$; das sind die drei in (1) enthaltenen Gleichungen. Für die vier übrigen erwähnt Hesse die Möglichkeit ihrer Ableitung aus (1), ohne sie jedoch auszuführen. Ich halte die Ausführung derselben nicht für überflüssig.

Es sei γ der gemeinsame Wert der drei gleichen Brüche in (1), so daß

$$\frac{a_{01}a_{20}}{a_{12}} - a_{00} = \frac{a_{12}a_{01}}{a_{20}} - a_{11} = \frac{a_{20}a_{12}}{a_{01}} - a_{22} = \gamma.$$

Dann ist

$$a_{00} - a_{11} = \frac{a_{01}(a_{20}^2 - a_{12}^2)}{a_{20}a_{12}},$$

$$a_{20}^2 - a_{12}^2 = \frac{a_{20}a_{12}}{a_{01}}(a_{00} - a_{11}) = (\gamma + a_{22})(a_{00} - a_{11});$$

$$\begin{aligned} b_{00} - b_{11} &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 - a_{00}a_{22} + a_{20}^2 \\ &= -a_{22}(a_{00} - a_{11}) + a_{20}^2 - a_{12}^2 = (a_{00} - a_{11})\gamma, \\ b_{11} - b_{22} &= (a_{11} - a_{22})\gamma, \quad b_{22} - b_{00} = (a_{22} - a_{00})\gamma. \end{aligned}$$

Nun ist die Kummersche Größe

$$\begin{aligned} a_{120} - a_{102} &= a_{12}(b_{11} - b_{00}) + b_{12}(a_{00} - a_{11}) \\ &+ b_{12}(a_{00} - a_{22}) + a_{12}(b_{22} - b_{00}) = a_{12}\gamma(a_{11} - a_{00}) + \gamma a_{12}(a_{00} - a_{11}) \\ &+ \gamma a_{12}(a_{00} - a_{22}) + a_{12}\gamma(a_{22} - a_{00}) = 0. \end{aligned}$$

²⁾ Kummer, Journal für Mathematik, Bd. 26 (1843), S. 268; Hesse, a. a. O., 27. Vorlesung.

Ebenso ist

$$a_{012} - a_{210} = 0, \dots;$$

$$a_{111} - a_{00}(b_{22} - b_{11}) + a_{11}(b_{00} - b_{22}) + a_{22}(b_{11} - b_{00}) = \\ = -\gamma \{a_{00}(a_{22} - a_{11}) + a_{11}(a_{00} - a_{22}) + a_{22}(a_{11} - a_{00})\} - 0^3).$$

Die beiden Bedingungen des obigen Spezialfalls bewirken dasselbe.

3. Die transformierte Gleichung der Fläche ist:

$$a_0(x^2 + y^2) + a_2 z^2 + \psi_1(x, y, z) = 0;$$

der Kegel, der ihre unendlich ferne Kurve aus dem Anfangspunkte projiziert:

$$a_0(x^2 + y^2) + a_2 z^2 = 0$$

oder

$$a_0(x^2 + y^2 + z^2) + (a_2 - a_0)z^2 = 0;$$

er berührt also den konzentrischen isotropen Kegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ nach der absoluten Kurve (dem unendlich fernen Kugelkreis) doppelt: längs der Kanten in $z = 0$; folglich berühren sich auch die beiden unendlich fernen Kurven doppelt: in ihren in $z = 0$ gelegenen Punkten.

Der unendlich ferne Schnitt eines parabolischen Zylinders, bei dem $\gamma = 0$ ist, besteht aus zwei unendlich nahen Kanten, und die zweimal zwei unendlich nahen gemeinsamen Punkte kommen nicht durch eigentliche Berührung zustande.

4. Was bedeutet aber, wenn die Realität der Flächengleichung nicht verlangt wird, das Vorhandensein einer Doppelwurzel oder das Verschwinden der Diskriminante von $\Lambda(\rho) = 0$ als *einfache Bedingung*?

Diese kubische Gleichung ergibt sich auch folgendermaßen mit anderer Bedeutung der Wurzeln. Auf unendlich ferne Punkte $(x, y, z, 0)$ beschränkt, sind $\varphi(x, y, z) = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ die Gleichungen der unendlich fernen Kurve der Fläche und der absoluten Kurve; folglich liefert $\Lambda(\rho) = 0$ die Parameter der drei Geradenpaare ihres Büschels. Ihre Doppelpunkte bilden das gemeinsame Polardreieck desselben. Es ist vollständig reell, wenn es sich um reelle Gleichungen handelt, weil mindestens die eine eine reell-imaginäre Kurve darstellt, also die vier Schnitte imaginär sind⁴⁾. Bei einer Fläche mit (endlichem) Mittelpunkt sind die Durchmesser nach ihnen zugleich konjugiert und rechtwinklig, also die Achsen der Fläche. Bei einer Rotationsfläche haben die Kurven ∞^1 gemeinsame Polardreiecke, eine Ecke fest im Berührungspol der doppelten Berührung,

³⁾ Anschließend sei eine Vereinfachung zu Hesses Buch erwähnt. Die Formeln 28) auf S. 306 sind zu umständlich abgeleitet; sie ergeben sich durch einfache Subtraktion der linken Formeln 7) von 23).

⁴⁾ Steiner-Schröter, *Vorlesungen*, 3. Aufl., Nr. 272; Sturm, *Geometrische Verwandtschaften*, Bd. II, Nr. 326.

die andern in zwei gemeinsam konjugierten Punkten auf der Berührungssehne; es gibt ∞^1 Tripel von Achsen, denen allen die Rotationsachse, nach dem Berührungspol gehend, gemeinsam ist.

Hat nun die kubische Gleichung eine Doppelwurzel, so haben zwei der Geradenpaare sich vereinigt; dazu ist Berührung der beiden Kurven erforderlich, und das doppelte Geradenpaar geht vom Berührungspunkte nach den beiden weiteren Schnittpunkten. Wenn nur Berührung in *einem* Punkte statthat, so muß, weil die absolute Kurve — mit reeller Gleichung — keine reellen Punkte besitzt, die andere Kurve und die Fläche eine imaginäre Gleichung haben, nicht etwa reell-imaginär mit reeller Gleichung sein. Zwei Kurven, welche beide reelle Gleichungen haben, haben mit einem imaginären Punkte auch den konjugiert imaginären gemein, und Berührung in dem einen zieht Berührung in dem andern nach sich. So ergibt sich *doppelte* Berührung; und die *Zweifachheit der Bedingung* im Falle der Realität der Flächengleichung ist für mich so anschaulicher dargetan als durch die algebraischen Überlegungen.

(Eingegangen am 28. Februar 1918.)