XV. Einige Folgerungen aus dem Syngonie-ellipsoidgesetze.

Von

E. von Fedorow in Petrowskoje-Razumowskoje bei Moskau.

(Mit 2 Textfiguren.)

Seit dem Erscheinen des »Beitrages zur Syngonielehre«¹⁾ wurde durch die Arbeit »Syngonieellipsoidgesetze«²⁾ ein sehr wesentlicher weiterer Beitrag zu derselben Lehre geleistet, welcher in hohem Grade die schon früher gefaßten Begriffe dieser Lehre verallgemeinert, und zu einer unbestimmten Reihe von Folgerungen Veranlassung gibt. Einige davon bilden den Inhalt dieser Abhandlung, und zwar gehören hierzu manche derjenigen, welche auf isotrope Complexe Bezug haben.

Dieses Gesetz sagt uns aus, daß auch geometrische Eigenschaften der krystallographischen Complexe in einem gewissen, für jeden Krystall besonderen Ellipsoide ihren Ausdruck finden. Speciell für isotrope Complexe wird das Ellipsoid durch die Sphäre vertreten, also mit unzähligen Symmetrieelementen, welche speciell als complexiale bezeichnet wurden, begabt.

Falls ein Complex in seinen geometrischen Eigenschaften durch die Sphäre ausgedrückt werden kann, so heißt das, daß 1) seine sämtlichen Flächen Symmetrieebenen desselben sind, und 2) seine sämtlichen Kanten resp. Zonenaxen Symmetrieaxen von unendlicher Zähligkeit sind.

Was die erste Folgerung anbelangt, so ist der Sinn derselben von vornherein klar und bestimmt.

Was aber die zweite anbetrifft, so erfordert dieselbe eine Erläuterung.

Die unendliche Zähligkeit der Axen bedeutet noch nicht, daß sie zugleich complexiale Symmetrieaxen sind von beliebiger endlicher Zähligkeit.

Sie sind sämtlich gewiß zweizählige Axen. Dies folgt daraus, daß in jeder derselben unendlich viele Flächenpaare einander senkrecht schneiden.

1) Diese Zeitschr. **28**, 36 ff.

2) Ebenda **36**, 555 ff.

Derselbe Schluß läßt sich auch daraus ziehen, daß jede Complexfläche zugleich complexiale Symmetrieebene ist und zugleich der Complex das Inversionscentrum besitzt. Nun ist die Resultierende von Symmetrieebene und Inversionscentrum eine zur Ebene senkrechte zweizählige Symmetrieaxe.

Was aber andere complexiale Symmetrieaxen von endlicher Zähligkeit anbetrifft, so sind dieselben nur ausnahmsweise vertreten.

Eine Zonenaxe ist nur dann eine complexiale Symmetrieaxe, wenn in derselben irgend welche zwei Flächen einander unter dem Winkel $\frac{2\pi}{n}$ schneiden, wo n eine ganze Zahl ist. Wenn für sämtliche Axen überhaupt $n = 2$ angenommen werden kann, so kann n nur die Werte 3, 4 und 6 annehmen, wenn von ∞ abgesehen wird, da sonstige Winkel $\frac{2\pi}{n}$ irrational, d. h. deren Quadrate der Tangenten irrationale Zahlen sind¹⁾.

Wenn also sämtliche Complexaxen überhaupt zweizählige complexiale Symmetrieaxen sind, so gibt es sonst lediglich vier- und sechszählige complexiale Symmetrieaxen, und diesen besonderen Axen kommen die Parameter 4 resp. 3 zu, genauer zu sagen: $4n^2$ resp. $3n^2$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Da aber in complexialer Hinsicht den Factoren, welche Quadrate ganzer Zahlen sind, keine besondere Rolle zukommt, so werden wir, der Kürze wegen, die Parameter ohne diesen Factor schreiben.

Die erwähnten besonderen Axen sind die Axen der tetragonal- resp. hexagonal-isotropen Zonen. Selbst von diesen beiden zeichnet sich besonders die erste aus, für welche nicht nur die Quadrate der Tangenten, sondern auch die Tangenten selbst rationale Zahlen sind.

In diesen wenigen Worten sind unendlich viele Folgerungen enthalten.

Wenn wir z. B. den Complex in einer beliebigen seiner Flächen spiegeln lassen, oder um eine beliebige Zonenaxe um 180° umklappen, so kommt derselbe in allen seinen Teilen mit sich selbst zur Deckung. Da aber bei symmetrischen Operationen diejenigen Gebilde, welche zur Deckung gelangen, symmetrisch gleiche sind, so ist in jedem Complexe eine unendlich große Anzahl symmetrisch- (resp. deckbar-) gleicher Flächen und Axen enthalten, und diese Gleichheit kommt durch gleiche Parameter zum Ausdruck.

Somit zerfällt der Gesamtcomplex in eine unendliche Anzahl von Teilcomplexen; und jeder der letzteren, für sich besonders betrachtet, bildet eine abgesonderte, unendliche Gruppe im Sinne von Hrn. C. Jordan und der neuesten Mathematiker.

1) Vom Standpunkte der reinen Zahlenreihe stellt ∞ keine bestimmten, sondern unendlich viele verschiedene Zahlen dar, darunter auch einfache. Und gerade in den krystallographischen Complexen sind nur einfache Zahlen vertreten, welche mit 2 multipliciert sind, mit Ausnahme von denjenigen, welche noch durch 4 und 6 teilbar sind.

Somit kommt im Teil- wie im Gesamtcomplexe jeder Fläche und Axe genau die gleiche Rolle zu wie allen übrigen Flächen und Axen derselben Teilcomplexe. Bei allen Betrachtungen über die complexialen Eigenschaften ist es also ganz gleichgültig, welche Fläche oder Axe aus dem Teilcomplexe zum Studium herausgenommen wird.

Der letzte Schluß ist von ganz besonderer Bedeutung bei der Erforschung der Frage über Commensurabilität resp. Incommensurabilität zweier gegebenen Complexe.

Vom Standpunkte der Syngonielehre sind die commensurablen Complexe gleiche, welche mit einander zur Deckung gebracht werden können.

Der Begriff der Commensurabilität ist von Bedeutung nur dann, wenn von natürlichen Krystallen die Rede ist.

Vom Standpunkte der reinen Syngonielehre sind z. B. die Flächen (100) , (010) , (001) , ferner $(\bar{1}22)$, $(2\bar{1}2)$, $(22\bar{1})$, . . . sämtlich gleiche, da auch den letzteren, wie den ersteren der Parameter 4 zukommt. Natürlich aber kommt denselben Flächenreihen ganz verschiedene Bedeutung in natürlichen Krystallen zu. Die ersten sind die häufigsten und die wichtigsten, während die letzten nur sehr selten auftreten.

Wenn wir also einen Krystall um die Axe $[111]$ um 180° drehen und dabei (100) mit $(\bar{1}22)$, (010) mit $(2\bar{1}2)$, (001) mit $(22\bar{1})$ zur Deckung kommt, so kommt zugleich der Gesamtcomplex zur Deckung mit seiner früheren Lage, nicht aber der Krystall selbst, welcher jetzt die Zwillinglage erhält.

Dieser Fall, welcher sich gerade auf die fast allein in der Natur vortretenden Zwillinge bezieht, in welchen die Flächen (100) , . . . durch Flächen mit anderen Indices ersetzt werden, kann in gewissem Sinne als der einfachste sui generis betrachtet werden.

Der Parameter von (100) ist 4 und der Parameter von $(\bar{1}22)$. . . ist $9 = 3^2$; und nun ist dieser Parameter der kleinste unter allen, welche dem Teilcomplexe zukommen, denn der Parameter $4 = 2^2$ fehlt.

Die grundlegende Bedeutung dieser letzten Sätze wird weiterhin besprochen.

Aber außer diesen Sätzen folgern wir aus dem erwähnten Grundsatz noch unendlich viele weitere Relationen.

Wenn wir eine beliebige Axe $[r_1 r_2 r_3]$ als Umklappungsaxe annehmen, so erhalten wir für jede beliebige Complexfläche $(p_1 p_2 p_3)$ mit dem Parameter P eine andere Lage; sie kommt jetzt zur Deckung mit einer anderen Complexfläche, deren Indices $(q_1 q_2 q_3)$ zwar von ersteren verschieden sind, deren Parameter aber der gleiche bleibt, d. h. die Zahl P .

Wenn wir eine beliebige Axe des tetragonal-isotropen Teilcomplexes $[r_1 r_2 r_3]$ als eine Drehaxe um 90° resp. 270° annehmen, so erhalten wir für jede beliebige Complexfläche $(p_1 p_2 p_3)$ mit dem Parameter P wieder

zwei andere Lagen; sie kommt jetzt mit anderen Complexflächen zur Deckung, deren Indices $(q_1 q_2 q_3)$ resp. $(q_1' q_2' q_3')$ zwar von ersteren verschieden sind, aber dieselbe Parametergröße P behalten.

Wenn wir eine beliebige Axe des hexagonal-isotropen Teilcomplexes $[r_1 r_2 r_3]$ als eine Drehaxe um 60° , 120° , 240° , 300° annehmen, so erhalten wir für jede beliebige Complexfläche $(p_1 p_2 p_3)$ mit dem Parameter P vier verschiedene Lagen, denen vier verschiedene Indices zukommen, doch bleibt für diese sämtlichen neuen Flächen dieselbe Parametergröße P .

Man ersieht aus diesen Sätzen, wie unzählig die Relationen sind, welche dadurch zum Vorschein kommen.

Nun erlaube ich mir diese Sätze an einigen Beispielen zu demonstrieren.

1. Die Bisectricen von $\begin{Bmatrix} 100 \\ 010 \end{Bmatrix}$ sind $\{110\}$ und $\{1\bar{1}0\}$ ¹⁾, und diese bilden mit den beiden den Winkel $45^\circ 0' 0''$.

2. Die Bisectricen von $\begin{Bmatrix} 111 \\ 1\bar{1}1 \end{Bmatrix}$ sind $\{010\}$ und $\{101\}$, und diese bilden mit den beiden die Winkel $54^\circ 44' 8''$ resp. $35^\circ 15' 52''$.

3. Die Bisectricen von $\begin{Bmatrix} 110 \\ 1\bar{1}0 \end{Bmatrix}$ sind $\{100\}$ und $\{010\}$, und diese bilden mit den beiden die Winkel $45^\circ 0' 0''$.

4. Die Bisectricen von $\begin{Bmatrix} 100 \\ 1\bar{2}2 \end{Bmatrix}$ sind $\{111\}$ und $\{2\bar{1}1\}$. Die betreffenden Winkel sind $54^\circ 44' 8''$ und $35^\circ 15' 52''$.

5. Die Bisectricen von $\begin{Bmatrix} 001 \\ 122 \end{Bmatrix}$ sind $\{125\}$ und $\{1\bar{2}1\}$. Die betreffenden Winkel sind $24^\circ 5' 44''$ und $65^\circ 54' 19''$.

6. Die Bisectricen von $\begin{Bmatrix} 100 \\ 430 \end{Bmatrix}$ sind $\{310\}$ und $\{1\bar{3}0\}$. Die betreffenden Winkel sind $18^\circ 26' 6''$ und $61^\circ 33' 54''$.

7. Die Bisectricen von $\begin{Bmatrix} 100 \\ 15.8.0 \end{Bmatrix}$ sind $\{410\}$ und $\{4\bar{1}0\}$. Die betreffenden Winkel sind $14^\circ 2' 10''$ und $75^\circ 57' 50''$.

8. Die Bisectricen von $\begin{Bmatrix} 100 \\ 12.5.0 \end{Bmatrix}$ sind $\{510\}$ und $\{1\bar{5}0\}$. Die betreffenden Winkel sind $11^\circ 48' 38''$ und $78^\circ 41' 22''$.

9. Die Bisectricen von $\begin{Bmatrix} 100 \\ 35.12.0 \end{Bmatrix}$ sind $\{610\}$ und $\{6\bar{1}0\}$. Die betreffenden Winkel sind $9^\circ 27' 44,4''$ und $80^\circ 32' 15,6''$.

1) Solche Paranthesen sind zur Anwendung gebracht, um zu zeigen, daß die Sätze gültig sind für die Axen, wie für die Flächen.

Die letzte Reihe der Beispiele bezieht sich auf Bisectricen der Axen (resp. Complexflächen) der tetragonal-isotropen Zonen.

Da fast die sämtlichen angegebenen Winkel irrationale sind, so sind natürlich deren zahlenmäßige Ausdrücke nur angenäherte. Die Gleichheit der Winkel ist aber eine streng mathematische, und dies läßt sich durch rationale Zahlen der Quadrate der Tangenten mit voller Strenge ausdrücken.

Diese Quadrate sind in dem Beispiel 1: 4 und 4; in dem Beispiel 2: 2 und $\frac{1}{2}$; in dem Beispiel 3: 4 und 4; in dem Beispiel 4: 2 und $\frac{1}{2}$; in dem Beispiel 5: $\frac{1}{3}$ und 5; in dem Beispiel 6: $\frac{4}{3^2}$ und 3^2 ; in dem Beispiel 7: $\frac{4}{4^2}$ und 4^2 ; in dem Beispiel 8: $\frac{4}{5^2}$ und 5^2 ; in dem Beispiel 9: $\frac{1}{6}$ und 6; in dem Beispiel 10: $\frac{4}{6^2}$ und 6^2 .

Wir können alle diese Sätze auch auf analytischem Wege beweisen. Natürlich ist der allgemeinste Beweis dieser Art zu compliciert. Begnügen wir uns mit dem Beweise desjenigen Satzes, nach welchem sämtliche Zonenaxen zweizählige Symmetrieaxen des Complexes sind.

Es seien $[r_1 r_2 r_3]$ die Indices einer beliebigen Axe, welche als Zwillingsaxe des Complexes aufgefaßt wird. Wollen wir zuerst die Indices derjenigen Fläche bestimmen, welche in bezug auf diese Axe der Fläche (400) gleich ist. Natürlich können wir auch (400) durch die dazu senkrechte Axe $[400]$ ersetzen.

Dann erhalten wir für die Zone dieser beiden Axen die Indices $\begin{vmatrix} r_1 r_2 r_3 \\ 400 \end{vmatrix} = [0 r_3 \bar{r}_2]$. Die zu $[r_1 r_2 r_3]$ derselben Zone zugehörige Axe besitzt die Indices $\begin{vmatrix} 0 r_3 \bar{r}_2 \\ r_1 r_2 r_3 \end{vmatrix} = r_2^2 + r_3^2; -r_1 r_2; -r_1 r_3$. Nun müssen die Factoren x und y bestimmt werden, welche der Gleichung

$$x r_1 + y(r_2^2 + r_3^2) : x r_2 - y r_1 r_2 : x r_3 - y r_1 r_3 = 4 : 0 : 0$$

Genüge leisten. Daraus folgt $x : y = r_1 : 4$.

Also $[r_1 : 4]$ sind Zonenindices der Axe $[400]$. In Zwillingsstellung erhält dieselbe Axe die Zonenindices $[\bar{r}_1 : 4]$. Somit erhält die Axe $[400]$ in Zwillingsstellung die Indices:

$$-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 : -r_1 r_2 - r_1 r_2 : -r_1 r_3 - r_1 r_3 \quad \text{resp.} \\ r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 : 2r_1 r_2 : 2r_1 r_3. \quad (\text{A})$$

Der Parameter dieser Axe wird:

$$(r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)^2 + 4r_1^2 r_2^2 + 4r_1^2 r_3^2 = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2.$$

Die Axe ist also eine tetragonal-isotrope und der ihr zukommende Parameter ist gleich dem Quadrat des Parameters der Zwillingsaxe.

Nehmen wir z. B. $[114]$ als Zwillingsaxe, so erhält $[400]$ in Zwillings-

stellung die Indices $[\bar{4}22]$ und ihr Parameter die Größe 3^2 resp. 4, wie der der Axe $[400]$ selbst.

Nun ersetzen wir in dieser Betrachtung die Axe $[400]$ durch eine beliebige $[p_1 p_2 p_3]$.

Bezeichnen wir der Kürze wegen die Teildeterminanten $\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ r_3 & r_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}$ in der Determinante $\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$ resp. durch q_1 , q_2 , q_3 .

Nun erhalten wir als Indices der Zone beider Axen gerade die Zahlen $[q_1 q_2 q_3]$; für die zu $[r_1 r_2 r_3]$ senkrechte Axe derselben Zone die Indices $\begin{vmatrix} q_2 & q_3 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} q_3 & q_1 \\ r_3 & r_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}$.

Dann stellen wir wieder die Gleichung für die Bestimmung der Factoren x und y , d. h. die Zonenindices der Axe $[p_1 p_2 p_3]$ auf:

$$x r_1 + y \begin{vmatrix} q_2 & q_3 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix} : x r_2 + y \begin{vmatrix} q_3 & q_1 \\ r_3 & r_1 \end{vmatrix} : x r_3 + y \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = p_1 : p_2 : p_3.$$

Daraus erhält man:

$$\frac{x}{y} = \frac{r_1(q_2 + q_3) - q_1(r_2 + r_3)}{q_1} = \frac{r_2(q_3 + q_1) - q_2(r_3 + r_1)}{q_2} = \frac{r_3(q_1 + q_2) - q_3(r_1 + r_2)}{q_3},$$

also für die Zwillingstellung der Axe $[p_1 p_2 p_3]$ die Indices:

$$\begin{aligned} & r_1 \{r_1 (q_2 + q_3) - q_1 (r_2 + r_3)\} - q_1 (r_3 q_2 - r_2 q_3) : \\ & r_2 \{r_2 (q_3 + q_1) - q_2 (r_3 + r_1)\} - q_2 (r_1 q_3 - r_3 q_1) : \\ & r_3 \{r_3 (q_1 + q_2) - q_3 (r_1 + r_2)\} - q_3 (r_2 q_1 - r_1 q_2). \end{aligned}$$

Als Parameter für dieselbe Axe erhält man den Ausdruck:

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2. \quad (\text{B})$$

Also bleibt der Parameter in der Zwillingstellung derselbe; nur wird derselbe durch ein Quadrat der ganzen Zahl multipliciert, und diese letzte Zahl ist gerade der Parameter der Zwillingaxe.

Nimmt man z. B. als Zwillingaxe die Axe $[444]$, so wird $[400]$ durch $[\bar{4}22]$, $[040]$ durch $[2\bar{4}2]$, $[004]$ durch $[22\bar{4}]$ ersetzt, und die Axe $[444]$ bewahrt ihre Indices. Folglich ist die Überführung in die Zwillingstellung als eine Transformation anzusehen, für welche die Gleichungen:

$q_1 : q_2 : q_3 = -p_1 + 2p_2 + 2p_3 : 2p_1 - p_2 + 2p_3 : 2p_1 + 2p_2 - p_3$ gültig sind. Also erhält man für den Parameter die Zahl:

$$\begin{aligned} & (-p_1 + 2p_2 + 2p_3)^2 + (2p_1 - p_2 + 2p_3)^2 + (2p_1 + 2p_2 - p_3)^2 \\ & = 9(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(1^2 + 1^2 + 1^2)^2. \end{aligned}$$

In dem zweiten Beispiele wollen wir als Zwillingaxe die Axe $[340]$ annehmen.

Dann erhält man die Transformationsgleichungen:

$$q_1 : q_2 : q_3 = 8p_1 + 6p_2 : 6p_1 - 8p_2 : 10p_3.$$

Diesen Gleichungen gemäß erhält [400] in Zwillingstellung die Indices [860], [010] die Indices [680], [001], die Indices [0.0.10], und die Zwillingsaxe [310] bewahrt ihre früheren Indices (eigentlich 30.10.0).

Nun erhält man für den Parameter die Zahl:

$$(8p_1 + 6p_2)^2 + (6p_1 - 8p_2)^2 + 100p_3^2 = 100(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \\ = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(3^2 + 4^2 + 0^2)2^2 (= 8^2 + 6^2 + 0^2).$$

Also kann man sagen, daß bei dieser Operation der Parameter um einen Factor vermehrt wird, welcher dem Quadrate des Parameters der Zwillingsaxe gleich ist oder der Summe der Quadrate derjenigen Indices, welche der Formel (A) gemäß für die Indices von [400] in Zwillingsstellung erscheinen.

Überhaupt lassen sich leicht für jede gegebene Zwillingsaxe die betreffenden Transformationsgleichungen aufstellen, denen die Determinante:

$$\begin{vmatrix} r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 & 2r_1 r_2 & 2r_1 r_3 \\ 2r_1 r_2 & -r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 & 2r_2 r_3 \\ 2r_1 r_3 & 2r_2 r_3 & -r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 \end{vmatrix}$$

entspricht, was direct aus der Relation (A) hervorgeht.

Für den Fall der Zwillingsaxe [111] gilt somit die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = D_1,$$

was schon oben angegeben wurde.

Für den Fall der Zwillingsaxe [310] gilt die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = D_2,$$

was ebenfalls schon oben erwähnt ist.

Diese Determinanten sind gleich $(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^3$, also $D_1 = 27 = 3^3$ und $D_2 = 1000 = 10^3$.

Alle diese Relationen gelten in gleicher Weise für sämtliche isotrope Complexe.

Von verschiedenen incommensurablen Complexen, wenn solche wirklich vorhanden sind, zeichnet sich jeder natürlich noch durch specielle, ihm allein eigene Relationen aus.

Der kubische Complex zeichnet sich z. B. dadurch aus, daß als senkrechte Hauptausgangsflächen die Flächen (100), (010), (001) angenommen

werden können, also sämtlich Flächen, welche als tetragonal-isotrop bezeichnet werden können.

Da jeder Complex überhaupt durch die Parameter zweier senkrechter Zonen bestimmt werden kann, so folgt daraus, daß überhaupt jeder Complex, in welchem es zwei tetragonal-isotrope, zu einander senkrechte Zonen gibt, mit dem kubischen commensurabel oder, vom Standpunkte der reinen Syngonielehre aus, mit demselben identisch ist d. h. als kubischer Complex bezeichnet werden darf.

Falls also andere Complexe außer dem kubischen existieren, so kann in keinem derselben zu einer tetragonal-isotropen Fläche (d. h. $P = 1$) eine zu ihr senkrechte tetragonal-isotrope Fläche vorhanden sein, und nicht nur keine tetragonal-isotrope, sondern überhaupt keine Fläche, welche einen Parameter besitzt, der identisch ist mit einem der Parameter der Flächen, welche der Zone $[100]$ des kubischen Complexes angehören, trotzdem, daß solcher Parameter eine unendliche Zahl vorhanden ist.

Wenn wir also zwei incommensurable isotrope Complexe vergleichen, so ist in tetragonal-isotropen Zonen beider keine einzige Fläche gemeinschaftlich, d. h. in beiden Complexen sind in diesen Zonen lauter verschiedene Flächen vorhanden, welche sich durch die Größe des Parameters von einander unterscheiden. Und dies bezieht sich nicht allein auf tetragonal-isotrope, sondern auf beliebige Zonen überhaupt.

Daraus folgt a) daß überhaupt in jeder Zone nicht sämtliche Parameter vertreten sind, und b) daß somit für verschiedene Complexe keineswegs gleiche Relationen zwischen den Indices der Zone und den Indices der dieselben zusammensetzenden Flächen bestehen.

Da aber diese Relation durch die sogenannte Zonengleichung gegeben wird, so folgt daraus, daß es für jeden Complex eine besondere, für denselben charakteristische Zonengleichung gibt, welche für sämtliche andere Complexe keine Geltung hat.

Der kubische Complex kann also durch die Zonengleichung:

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 = 0$$

charakterisiert werden, und für sämtliche andere Complexe ist diese Gleichung nicht mehr anwendbar.

Speciell im kubischen Complex sind sämtliche überhaupt denkbare Zonen vertreten, deren Parameter gleich sind der Summe der Quadrate dreier ganzer Zahlen. Der Einfachheit wegen verstehen wir aber unter Indices nur drei Zahlen, welche keine gemeinschaftlichen Factoren besitzen. Infolgedessen sind als überhaupt denkbare Parameter der isotropen Complexe nicht sämtliche dreifach quadratische Zahlen anzunehmen, sondern einige davon sind ausgeschlossen.

Wie von mir schon mehrfach angegeben, gehört hierzu folgende Zahlenreihe:

Parameter:	4	2	3	5	6	9(1)	10	11	13	14	17	—	18(2)
Indices:	100	110	111	210	211	221	310	311	320	321	322	410	411
	19	21	22	25(1)	26	—	27(3)	29	—	30	33	—	34
	331	421	332	430	431	510	511	432	520	521	441	522	433
	35	37	38	—	41	—	—	42	43	45(5)	46	49	50(2)
	531	610	532	611	443	540	621	541	533	542	631	632	543
	—	53	—	54(6)	—	57	—	58	59	—	61	—	62
	711	641	720	552	721	544	722	730	553	731	643	650	651
	—	—	66	—	—	67	69	—	70	73	—	74	—
	740	810	554	741	811	733	742	821	653	661	830	743	750
	77	—	78	81(1)	—	82	—	83	—	85	—	86	—
	654	832	752	744	841	833	910	753	911	760	920	655	761
	—	—	—	90(10)	—	91	93	94	—	97	—	98	—
	843	922	850	754	851	931	852	763	932	665	940	853	941
													771

Unter Zahlen, welche überhaupt als Parametergröße erscheinen, fehlen solche, welche durch $4n$ und $8n - 1$ bezeichnet werden können. Das Fehlen dieser Zahlen ist sehr leicht zu beweisen. Für das Fehlen von $4n$ wurde schon früher von mir der Beweis geliefert¹⁾, welcher darauf beruht, daß die Summe der Quadrate zweier ungerader Zahlen nicht durch 4 teilbar sein kann, und daß von drei Indices (p_1, p_2, p_3), welchen ein gerader Parameter zukommt, zwei derselben ungerade Zahlen sein müssen.

Wenn also der dritte Index p_3 eine gerade Zahl ist, so ist dessen Quadrat durch 4 teilbar und für $p_1^2 + p_2^2$ ist dies keineswegs der Fall, folglich ist auch $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ ebenfalls durch 4 nicht teilbar.

Ebenso leicht ist der zweite Satz zu beweisen.

Wäre die Relation $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 8n - 1$ möglich, so würde auch die Relation $p_1^2 + p_2^2 + (2k - 1)^2 = 8n - 1$ bestehen, da einer der Indices notwendigerweise eine ungerade Zahl ist. Also $p_1^2 + p_2^2 = 2(4n - 1) - 4(k^2 - k)$. Daraus ersehen wir, daß die beiden Zahlen p_1 und p_2 nicht zugleich gerade sein können. Auch ist unmöglich anzunehmen, daß eine von ihnen gerade und die andere ungerade ist, da in diesem Falle $8n - 1$ selbst eine gerade Zahl gewesen wäre.

Nun nehmen wir an, daß sämtliche Indices p_1, p_2, p_3 ungerade Zahlen sind. Dann hätte die Relation:

$$(2k - 1)^2 + (2l - 1)^2 + (2m - 1)^2 = 8n - 1$$

$$\text{oder} \quad 4[(k^2 - k) + (l^2 - l) + (m^2 - m)] + 4 = 8n$$

$$\text{oder} \quad k(k - 1) + l(l - 1) + m(m - 1) + 1 = 2n$$

statthaben müssen.

¹⁾ Diese Zeitschr. 36, 215.

Da aber jedes der Producte $k(k-1)$, $l(l-1)$, $m(m-1)$ notwendigerweise eine gerade Zahl ist, so ist die letzte Relation unmöglich¹⁾.

Wie gesagt, sind die Parameter in jeder beliebigen Zone durchaus nicht vollständig vertreten. Z. B. für die wichtigste, tetragonal-isotrope Zone des kubischen Complexes gilt die diese Zahl beschränkende Relation

$$4 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 = 0.$$

Mit anderen Worten haben die hierzu gehörenden Indices die Form $(0 p_2 p_3)$; und nun sind jetzt nur diejenigen Parameter zulässig, welche durch die Formel $(p_2^2 + p_3^2)$ repräsentiert werden, wo p_2 und p_3 keine gemeinschaftlichen Factoren besitzen.

Hierzu gehört folgende Zahlenreihe:

Parameter:	4	2	5	10	13	17	25(1)	26	29	34	37	44	50(2)
Zonenindices:	40	44	24	34	32	44	43	54	52	53	64	54	74
	53	58	64	65	—	73	74	82	85	—	89	97	
	72	73	65	74	84	83	75(3)	94	76	92	85	94.	

Diese Zahlenreihe stellt nur einen particulären Fall der oben angegebenen Zahlenreihe der dreifach-quadratischen Zahlen dar, da eine aus diesen drei Zahlen stets gleich 0 angenommen werden kann, und dann kommt eine Zahl dieser zweiten Reihe zustande.

Infolgedessen gelten auch für diese Reihe die Sätze über das Fehlen der Parameter $4n$ und $8n-1$. Außerdem fehlen noch sehr viele andere Zahlen.

Zum Beispiel fehlen sämtliche Zahlen der Formel $3n^2$. Dies ist sehr leicht zu beweisen.

Wäre die Relation:

$$p_1^2 + p_2^2 = 3n^2$$

gültig, so hätten wir auch $p_1^2 + p_2^2 + n^2 = 4n^2$ gehabt, und dies ist, wie bewiesen, unmöglich²⁾.

Diese Folgerung ist von hoher Wichtigkeit, da gerade diese Relation für den hexagonal-isotropen Complex charakteristisch ist; in dem letzteren

1) In Anbetracht der weiter folgenden Auseinandersetzung wollen wir noch den Beweis für die Unmöglichkeit der Gleichung $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 7n^2$ erbringen. Wie eben bewiesen, kann n nur eine ungerade Zahl sein; also: $7n^2 = 7(2n'-1)^2 = 7(4n'^2 - 4n') + 7 = 4 \cdot 7 \cdot n'(n'-1) + 7 = 7 \cdot 8n'' + 7 = 8n''' - 1$, und die Unmöglichkeit davon wurde ebenfalls bewiesen.

2) Dieser Satz ist leicht zu verallgemeinern und der Beweis zu erbringen, daß überhaupt die Gleichheit $p_1^2 + p_2^2 = 3n$ eine unmögliche ist.

Da keine von beiden Zahlen p_1 und p_2 durch 3 teilbar sein kann (sonst würde 3 der gemeinschaftliche Factor für die beiden sein), so lassen die beiden sich in der Form $(3e \pm 1)$ darstellen.

Also $(3c_1 \pm 1)^2 + (3c_2 \pm 1)^2 = 3n$ oder $3(c_1^2 + 2c_1 + c_2^2 + 2c_2) + 2 = 3n$, und dies ist unmöglich, da 2 den Factor 3 nicht besitzen kann.

ist eine zu der tetragonal-isotropen Zone senkrechte hexagonal-isotrope Zone vorhanden.

In dem kubischen Complexe fehlen hexagonal-isotrope Flächen in tetragonal-isotropen Zonen vollständig.

Wäre eine einzige solche vorhanden, so würden die beiden Complexe, der kubische und der hexagonal-isotrope, identisch resp. commensurabel. Die Unmöglichkeit dieser Annahme dient als Beweis der Incommensurabilität der beiden Complexe.

Ebenso kann man den Beweis erbringen, daß in dem kubischen Complexe tetragonal-isotrope Flächen in hexagonal-isotropen Zonen vollständig fehlen.

Hexagonal-isotropen Zonen kommt der Parameter 3 zu. Hierzu gehört auch die einfachste Zone [111]; für die Flächen $(p_1 p_2 p_3)$ dieser Zone haben wir die Relation:

$$4 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 + 4 \cdot p_3 = 0 \quad \text{resp.} \quad p_1 = -(p_2 + p_3).$$

Nun nehmen wir an, daß eine solche Fläche $(p_1 p_2 p_3)$ vorhanden ist, für welche $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n^2$, also $(a + b)^2 + a^2 + b^2 = n^2$.

Von den drei Indices p_2, p_3 und $-(p_2 + p_3)$ können weder alle ungerade, noch zwei derselben gerade Zahlen sein; zwei von ihnen sind also ungerade und einer eine gerade Zahl. Wollen wir annehmen, daß a und b ungerade Zahlen sind, dann haben wir

$$2(a^2 + b^2) + 2ab = n^2 = 4m^2 \quad \text{oder} \quad (a + b)^2 - ab = 2m^2.$$

Von diesen drei Gliedern sind $(a + b)^2$ und $2m^2$ gerade, und ab eine ungerade Zahl, und dies ist eine Unmöglichkeit.

Dieser letzte Satz hat eben dieselbe Bedeutung wie der vorige. Wäre eine einzige Fläche der hexagonal-isotropen Zone tetragonal-isotrop, so würde damit bewiesen, daß der kubische Complex mit dem hexagonal-isotropen identisch ist. Da aber die Incommensurabilität dieser beiden Complexe schon durch den obigen Satz bewiesen wurde, so wäre genauer dieser Satz als eine der unendlich vielen Folgerungen anzusehen, welche in der Incommensurabilität ihren Grund finden.

Wenden wir jetzt unsere Aufmerksamkeit dem hexagonal-isotropen Complexe zu.

Die einfachste Formel zur Berechnung der Winkel in diesem Complexe wurde in dieser Zeitschr. 36, 249 gegeben. Sie ist der bekannten Formel der kubischen Krystalle

$$\text{tang } (rr') = \frac{k\sqrt{P}}{r_1 r_1' + r_2 r_2' + r_3 r_3'} \quad (\text{C})$$

ganz analog und lautet:

$$\text{tang } (rr') = \frac{k\sqrt{P}}{r_1 r_1' + r_2 r_2' + r_3 r_3'}. \quad (\text{C}')$$

In beiden bedeuten r_1, r_2, r_3 resp. r'_1, r'_2, r'_3 die Indices zweier gegebener Flächen r und r' ; k ist der Polfactor und P der Parameter der Zone beider Flächen.

Der einzige wesentliche Unterschied besteht darin, daß in der zweiten Formel die Indices einer Fläche (natürlich gleichgültig ob der Fläche r oder r'), z. B. r' , durch die Subindices r' ersetzt worden sind, d. h. in die Formel anstatt r'_1, r'_2, r'_3 die Zahlen r_1', r_2', r_3' zu setzen sind, wobei

$$r_1' : r_2' : r_3' = 3r_1' : 4r_2' - 2r_3' : -2r_2' + 4r_3'. \quad (D)$$

Auch der Parameter P in diesem Complexe wird nicht vermittle der Formel

$$P = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \quad \text{wo} \quad p_1 : p_2 : p_3 = \begin{vmatrix} r_2 & r_3 \\ r_2' & r_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} r_3 & r_1 \\ r_3' & r_1' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1' & r_2' \end{vmatrix} \quad (E)$$

berechnet, welche für den kubischen Complex Geltung hat, sondern vermittle der Formel

$$P = p_1 p_1 + p_2 p_2 + p_3 p_3,$$

wo $\underline{p}$ aus p nach (D) berechnet wird, oder $\underline{p}$ aus p nach der Formel

$$p_1 : p_2 : p_3 = 2p_1 : 2p_2 + p_3 : p_2 + 2p_3 \quad (D')$$

wobei

$$p_1 : p_2 : p_3 = \begin{vmatrix} r_2 & r_3 \\ r_2' & r_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} r_3 & r_1 \\ r_3' & r_1' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1' & r_2' \end{vmatrix}. \quad (E')$$

Wir wollen die Berechnung nach diesen Formeln an einigen Beispielen demonstrieren.

1. Gesucht der Winkel zwischen (1000) und (2121):

$$\underline{p}_1 : \underline{p}_2 : \underline{p}_3 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \times & \times & \times & \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{matrix} = 0 : \bar{2} : 4;$$

$$p_1 : p_2 : p_3 = 2 \cdot 0 : 2 \cdot \bar{2} + 4 : \bar{2} + 2 \cdot 4 = 3(0 : \bar{1} : 0),$$

und wieder:

$$p_1 : p_2 : p_3 = 3 \cdot 0 : 4 \cdot \bar{1} - 2 \cdot 0 : -2 \cdot \bar{1} + 4 \cdot 0 = 0\bar{4}2;$$

also

$$P = 0 \cdot 0 + \bar{4} \cdot \bar{1} + 2 \cdot 0 = 4;$$

außerdem $r_1' : r_2' : r_3' = 3 \cdot 4 : 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 : -2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 3(100).$

Folglich:

$$\tan(r r') = \frac{3\sqrt{0 \cdot 0 + \bar{1} \cdot \bar{4} + 0 \cdot 2}}{3(4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2)} = 1 = \tan 45^\circ 0' 0''.$$

2. Gesucht der Winkel zwischen (1000) und (2110):

$$\underline{p}_1 : \underline{p}_2 : \underline{p}_3 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \times & \times & \times & \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{matrix} = 0 : \bar{1} : 4;$$

$$p_1 : p_2 : p_3 = 2 \cdot 0 : 2 \cdot \bar{1} + 4 : \bar{1} + 2 \cdot 4 = 0 : \bar{1} : 4,$$

und wieder:

$$p_1 : p_2 : p_3 = 3 \cdot 0 : 4 \cdot \bar{1} - 2 \cdot 1 : -2 \cdot \bar{1} + 4 \cdot 1 = 0 : \bar{6} : 6;$$

$$\text{also } P = 0 \cdot 0 + \bar{1} \cdot \bar{6} + 1 \cdot 6 = 12; \text{ außerdem } r_1' : r_2' : r_3' = 3(100).$$

Folglich:

$$\tan(r r') = \frac{\sqrt{12}}{3(1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ 0' 0''.$$

3. Gesucht der Winkel zwischen (1000) und (2330):

$$p_1 : p_2 : p_3 = \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \times & \times & \times & \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array} = 0 : \bar{3} : 3 = 3(0\bar{1}1);$$

$$p_1 : p_2 : p_3 = 3(2 \cdot 0 : 2 \cdot \bar{1} + 1 : \bar{1} + 2 \cdot 1) = 3(0 : \bar{1} : 1),$$

und wieder:

$$p_1 : p_2 : p_3 = 3 \cdot 0 : 4 \cdot \bar{1} - 2 \cdot 1 : -2 \cdot \bar{1} + 4 \cdot 1 = 0 : \bar{6} : 6;$$

$$\text{also } P = 0 \cdot 0 + \bar{1} \cdot \bar{6} + 1 \cdot 6 = 12; \text{ außerdem } r_1' : r_2' : r_3' = 3(100).$$

Folglich:

$$\tan(r r') = \frac{3\sqrt{12}}{3(1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3)} = \sqrt{3} = \tan 60^\circ 0' 0''.$$

4. Gesucht der Winkel zwischen (1000) und (1110):

$$p_1 : p_2 : p_3 = \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \times & \times & \times & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} = 0 : \bar{1} : 1;$$

$$p_1 : p_2 : p_3 = 2 \cdot 0 : 2 \cdot \bar{1} + 1 \cdot 1 : 1 \cdot \bar{1} + 2 \cdot 1 = 0 : \bar{1} : 1,$$

und wieder:

$$p_1 : p_2 : p_3 = 3 \cdot 0 : 4 \cdot \bar{1} - 2 \cdot 1 : -2 \cdot \bar{1} + 4 \cdot 1 = 0 : \bar{6} : 6;$$

$$\text{also } P = 0 \cdot 0 + \bar{1} \cdot \bar{6} + 1 \cdot 6 = 12; \text{ außerdem } r_1' : r_2' : r_3' = 3(100).$$

Folglich:

$$\tan(r r') = \frac{\sqrt{12}}{3(1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1)} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \tan 49^\circ 6' 24''.$$

5. Gesucht der Winkel zwischen (1000) und (1121):

$$p_1 : p_2 : p_3 = \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \times & \times & \times & \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} = 0 : \bar{2} : 1;$$

$$p_1 : p_2 : p_3 = 2 \cdot 0 : 2 \cdot \bar{2} + 1 : \bar{2} + 2 \cdot 1 = 3(0\bar{1}0);$$

und wieder:

$$p_1 : p_2 : p_3 = 3 \cdot 0 : 4 \cdot \bar{1} - 2 \cdot 0 : -2 \cdot \bar{1} + 4 \cdot 0 = 0 : \bar{4} : 2;$$

$$\text{also } P = 0 \cdot 0 + \bar{1} \cdot \bar{4} + 0 \cdot 2 = 4; \text{ außerdem } r_1' : r_2' : r_3' = 3(100).$$

Folglich:

$$\tan(r r') = \frac{3\sqrt{4}}{3(1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2)} = 2 = \tan 63^\circ 26' 6''.$$

6. Gesucht der Winkel zwischen $(010\bar{1})$ und $(231\bar{2})$:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ & \times & \times & \times \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} 3 = 1 : 0 : \bar{2};$$

$$p_1 : p_2 : p_3 = 2 \cdot 1 : 2 \cdot 0 + \bar{2} : 0 + 2 \cdot \bar{2} = 2(1\bar{1}\bar{2}),$$

und wieder:

$$p_1 : p_2 : p_3 = 3 \cdot 1 : 4 \cdot \bar{1} - 2 \cdot \bar{2}; - 2 \cdot \bar{1} + 4 \cdot \bar{2} = 3 : 0 : \bar{6};$$

also

$$P = 1 \cdot 3 + \bar{1} \cdot 0 + \bar{2} \cdot \bar{6} = 15;$$

$$\text{au\ss} \text{erdem } r_1' : r_2' : r_3' = 3 \cdot 0 : 4 \cdot 1 - 2 \cdot 0 : - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 2(02\bar{1}).$$

Folglich:

$$\text{tang}(rr') = \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{2(0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1)} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \text{tang } 37^\circ 45' 40,5''.$$

7. Gesucht der Winkel zwischen $(010\bar{1})$ und (2110) :

$$p_1 : p_2 : p_3 = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ & \times & \times & \times \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} 1 = 1 : 0 : \bar{2};$$

$$p_1 : p_2 : p_3 = 2 \cdot 1 : 2 \cdot 0 + \bar{2} : 0 + 2 \cdot \bar{2} = 2(1\bar{1}\bar{2}),$$

und wieder:

$$p_1 : p_2 : p_3 = 3 \cdot 1 : 4 \cdot \bar{1} - 2 \cdot \bar{2}; - 2 \cdot \bar{1} + 4 \cdot \bar{2} = 3 : 0 : \bar{6};$$

also

$$P = 1 \cdot 3 + \bar{1} \cdot 0 + \bar{2} \cdot \bar{6} = 15;$$

$$\text{au\ss} \text{erdem } r_1' : r_2' : r_3' = 3 \cdot 0 : 4 \cdot 1 - 2 \cdot 0; - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 2(02\bar{1}).$$

Folglich:

$$\text{tang}(rr') = \frac{2\sqrt{15}}{2(0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1)} = \sqrt{15} = \text{tang } 75^\circ 31' 21''.$$

Natürlich werden auch hier die Zonen durch die Parameter eindeutig bestimmt⁴⁾. Aber schon eine einfache Zusammenstellung der Parameter weist auf wesentliche Unterschiede hin.

Wie schon in früheren Arbeiten des Verfassers dargetan wurde, besitzen wir folgende Zahlenreihe:

Parameter:	3	4(1)	7	12(3)	15	16(1)	19	24(6)	28(7)	31
Indices:	1000	0110	1110	0121	1121	2110	1220	2121	0231	1231
---	39	—	40(10)	43	48(3)	51	52(13)	—	55	—
	60(15)									
	3110	1330	3121	2231	3220	2330	1242	0341	4110	1341
	3231	4121								
	64(1)	67	75(3)	76	—	79	—	—	84(24)	—
	87	—								
	2341	1440	3242	0352	4231	1352	3341	5110	0451	4330
	4451	5121								

4) Da aber durch den Parameter zugleich die charakteristischen Winkel bestimmt werden, so folgt, daß durch einen gegebenen Winkel der Parameter der Zone auf eben demselben Wege gefunden werden kann, wie dies für kubische Complexe der Fall ist und in dem »Beitrag zur Syngonielehre« erklärt wurde. Durch die Zonenparameter werden zugleich die Indices der Zonen bestimmt.

88(22)	91	—	96(6)	100(1)	103	—	—	111	—	—	112(7)
2352	3440	5220	2451	4341	1550	3352	5231	1363	3451	5330	2550
—	115	120(30)	—	123	124(31)	127	—	—	—	—	132(33)
6110	1462	2363	6121	5242	0561	1561	3550	4352	5341	4451	
136	—	139	—	147	148(37)	—	151	—	—	—	156(39)
2561	6231	3462	5440	1660	0473	4550	1473	3561	5352	7110	0572
—	159	—	—	160(10)	—	163	168(42)	172(43)	175(7)	—	
4363	1572	5451	7121	2473	6341	7220	2572	0671	1671	3473	
—	183	—	—	184(46)	—	187	192(3)	195	—	196(1)	—
7231	3572	5363	7330	6352	2671	5162	6451	1484	7242	0583	4473
—	—	199	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4561	8110	1770	1583	3671	7341	5561	...				

Der Vergleich dieser Tabelle mit der des kubischen Complexes zeigt die Anwesenheit solcher Parameter, welche dort fehlen, und die Abwesenheit solcher, welche dort vorhanden sind.

Man bemerkt hier das Erscheinen mancher Glieder beider dort fehlenden Zahlenreihen $4n$ und $8n - 1$, z. B. 12, 24, 48, ... auch 7, 15, 31, ... Andererseits fehlen hier die Parameter $5n^2$, $14n^2$, ... Am merkwürdigsten ist aber das Fehlen des Parameters $2n^2$.

Es ist leicht, den Beweis zu liefern, daß solche Parameter in diesem Complexe nicht möglich sind.

Wir müssen aber zuerst den allgemeinen Ausdruck für die isotropen Complexe allgemeinsten Art auffinden.

Gemäß dem oben Gesagten ist ersichtlich, daß wir dazu drei beliebige senkrechte Flächen als Ausgangsflächen wählen können; nur müssen wir die ihnen zukommenden Parameter wissen. Seien diese Parameter P_1 , P_2 und P_3 , so wird der allgemeinste Ausdruck für den beliebigen Parameter des betreffenden Complexes:

$$P = P_1 a^2 + P_2 b^2 + P_3 c^2. \quad (G)$$

Um also über die Möglichkeit von P zu entscheiden, ist nur zu erkennen, ob solche ganze Zahlen a , b , c ausgewählt werden können, daß sie bei gegebenen Größen von P_1 , P_2 , P_3 dieser Gleichung Genüge leisten. Ist dies der Fall, so gehört P zu den möglichen Parametern; sonst ist der Parameter für den gegebenen Complex unmöglich.

Nun können wir den hexagonal-isotropen Complex durch zwei senkrechte Zonen bestimmen, von welchen die eine tetragonal- ($P = 1$) und die andere hexagonal-isotrop ($P = 3$) ist; als Folge davon ist die dritte, zu beiden senkrechte Zone wieder eine hexagonal-isotrope.

Für diesen Complex erhält also die Gleichung (G) die Form:

$$P = 3a^2 + 3b^2 + c^2. \quad (G')$$

Falls also der Parameter 2 wirklich ein unmöglicher ist, so ist auch die Gleichung $3a^2 + 3b^2 + c^2 = 2n^2$ eine unmögliche, und das wird sofort ersichtlich, wenn man dieser Gleichung die Form:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 2(c^2 + n^2)$$

zuerteilt. Daraus sieht man nämlich, daß $c^2 + n^2$ hätte den Factor 3 besitzen müssen, und oben (S. 344) wurde gerade bewiesen, daß dies unmöglich ist¹⁾.

Somit fehlt dem hexagonal-isotropen Complex der für den kubischen Complex so wichtige Teilcomplex mit dem Parameter 2. Es gibt also im hexagonal-isotropen Complex keine einzige Zone, für welche, als charakteristische, die Winkel $54^\circ 44' 8''$ oder $35^\circ 15' 52''$ aufgetreten wären.

Auch ist sofort die Unmöglichkeit des Parameters 5 zu ersehen, denn aus der Gleichung $3a^2 + 3b^2 + c^2 = 5n^2$ würde die Gleichung $3a^2 + 3b^2 + 6c^2 = 5(n^2 + c^2)$; also fehlen dem Complex sämtliche Zonen mit den charakteristischen Winkeln $24^\circ 5' 44,5''$ und $65^\circ 54' 18,5''$.

Andererseits, wie erwähnt, erscheinen hier Zonen, welche dem kubischen Complex fehlen. Die einfachste dieser Zonen ist die mit dem Parameter 7, also mit den charakteristischen Winkeln $20^\circ 42' 17''$ und $69^\circ 17' 43''$ und deren mehrfachen.

Tetragonal-isotrope Zonen spielen hier eine große Rolle, da denselben so wichtige Complexflächen zugehören, wie $[0110]$, $[2110]$, $[2341]$ usw. Der hexagonal-isotropen Zone gehören diejenigen an mit den Indices $[4000]$, $[0121]$, $[2330]$ usw. Einige Winkel dieser beiden Zonen sind besonders in den oben angeführten Beispielen vertreten.

Unter anderem ersehen wir aus den angeführten Beispielen, daß der Winkel $\begin{Bmatrix} 1000 \\ 2110 \end{Bmatrix}$ gleich $30^\circ 0' 0''$, und $\begin{Bmatrix} 1000 \\ 2330 \end{Bmatrix}$ gleich $60^\circ 0'$. Dieses Verhältnis folgt direct aus dem oben angegebenen Satze über die zweizählige Symmetrieaxe der isotropen Complexe, da $[4000]$ und $[2330]$ beide hexagonal-isotrop sind, also die gleichen Complexflächen darstellen; die Bisectrix von ihnen ist $[2110]$, welche tetragonal-isotrop ist, ebenso wie $[0101]$; folglich muß auch der Winkel beider letzteren durch eine Complexaxe halbiert werden. Und dies ist direct aus den Beispielen 6) und 7) ersichtlich; man sieht, daß die Bisectrix beider Axen die Indices $[2312]$ besitzt und die Hälfte des Winkels $37^\circ 48' 40,5''$ beträgt.

Aus allen diesen Beispielen ersehen wir aufs deutlichste, wie grundverschieden die Verteilung der gleichen Zonen in beiden Complexen, dem kubischen und dem hexagonal-isotropen, ist. In dem letzteren fehlen

1) Auf demselben Wege läßt sich die Unmöglichkeit des Parameters 5 beweisen. Unter der Annahme $3a^2 + 3b^2 + c^2 = 5n^2$ hätten wir weiter $3(a^2 + b^2) = 5n^2 - c^2 = 6n^2 - (n^2 + c^2)$, also die Summe $(n^2 + c^2)$ durch 3 teilbar gewesen wäre, was, wie oben bewiesen, unmöglich ist.

zu einander senkrechte tetragonal-isotrope Flächen. Aber solche erscheinen in hexagonal-isotropen Zonen und treten hier als Bisectricen von je zwei hexagonal-isotropen Flächen auf, wie (2110) in bezug auf (1000) und (2330) , wie $(010\bar{1})$ in bezug auf $(021\bar{1})$ und $(01\bar{1}2)$, während im kubischen Complex hexagonal-isotrope Flächen in hexagonal-isotropen Zonen vollständig fehlen; zwei hexagonal-isotrope Flächen, z. B. $(1\bar{1}1)$ und $(\bar{1}11)$, befinden sich in der Zone mit dem Parameter 2 und werden auch durch die Fläche $(4\bar{1}0)$ mit dem Parameter 2, als einer Bisectrix, halbiert.

Wie oben erwähnt, ist für jeden besonderen Complex eine ihm allein zukommende Zonengleichung charakteristisch.

Um aber diese Frage in ihrer Allgemeinheit zu discutieren, wenden wir uns einer näheren Charakteristik der Complexe allgemeiner Art zu.

Fig. 1.

Im allgemeinen ist der Complex eindeutig bestimmt, wenn die Parameter zweier Axen und der Winkel zwischen den beiden gegeben sind. Solche Auffassung der isotropen Complexe ist die complicirteste, da derselben gemäß die Krystalle als triklone behandelt werden. Ist dem Parameter A der charakteristische Winkel CAB , und dem Parameter B der charakteristische Winkel CBA zugeordnet, so wird dadurch auch die dritte Axe C eindeutig bestimmt, und derselben ist der charakteristische Winkel ACB , folglich auch ein bestimmter Parameter zugeordnet.

Wenn aber ein solcher Complex möglich ist, so muß auch der Winkel AB für eine Zone charakteristisch sein, deren Axe C' (AC' und BC' rechte Winkel). Somit kommen wir zu einfacherer und zugleich mehr zuverlässiger Bestimmung durch die Parameter A und C' zweier senkrechter Zonenaxen. Diese zwei Parameter bestimmen auch den Parameter der dritten, zu beiden senkrechten Zonenaxe D .

Der Einfachheit wegen wollen wir die drei Ausgangsparameter durch a_1, a_2, a_3 bezeichnen, wo diese ganze, keine gemeinschaftlichen Factoren besitzende Zahlen sind. Diese Zahlen (da die Parameter den Quadraten der Tangenten der charakteristischen Winkel gleich sind) sind die Quadrate der Relationen $\frac{c_2}{c_3}, \frac{c_3}{c_1}, \frac{c_1}{c_2}$ (worin c_1, c_2, c_3 die betreffenden Axeneinheiten sind). Infolge dessen ist $a_1 a_2 a_3 = 1$ oder $a_3 = \frac{1}{a_1 a_2}$, und, durch Hinzufügung des Factors $(a_1 a_2)^2$, auch $a_3 = a_1 a_2 \dots$; ferner umgekehrt $c_1 : c_2 : c_3 = \sqrt{a_3} : 1 : \frac{1}{\sqrt{a_2}}$ oder (durch Division mit $\frac{1}{\sqrt{a_1 a_3}}$):

$$c_1 : c_2 : c_3 = \frac{1}{\sqrt{a_1}} : \frac{1}{\sqrt{a_2}} : \frac{1}{\sqrt{a_3}}.$$

Nun können wir solchen Complex nach den für rhombische Krystalle geltenden Formeln behandeln, indem die Indices p_1, p_2, p_3 , welche auf gewöhnlichem Wege der Formenentwicklung sich ableiten lassen, durch die Zahlen $p_1\sqrt{a_1}, p_2\sqrt{a_2}, p_3\sqrt{a_3}$ ersetzt werden.

Auf diese Weise erhalten wir den allgemeinen Ausdruck für die Tangente zweier beliebiger Flächen (resp. Axen) des Complexes:

$$\tan(pq) = \frac{k\sqrt{r_1^2 a_2 a_3 + r_2^2 a_3 a_1 + r_3^2 a_1 a_2}}{p_1 q_1 a_1 + p_2 q_2 a_2 + p_3 q_3 a_3},$$

wo r_1, r_2, r_3 sich aus der Determinante $\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$ als Teildeterminante derselben auffinden lassen und k der dabei möglicherweise entstehende gemeinschaftliche Factor ist.

Stehen p und q zu einander senkrecht, so können wir sagen, daß p zur Zone q gehört, oder umgekehrt, q zur Zone p . In diesem Falle besteht die Gleichung:

$$p_1 q_1 a_1 + p_2 q_2 a_2 + p_3 q_3 a_3 = 0,$$

und diese ist die Zonengleichung für den Complex allgemeinsten Art. Für den kubischen Complex sind alle drei Zahlen a_1, a_2, a_3 gleich der Einheit, also besteht die bekannte Gleichung:

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = 0.$$

Für den hexagonal-isotropen Complex sind zwei von diesen Zahlen, z. B. a_1 und a_2 , gleich 3, und a_3 gleich 4 zu setzen. Folglich ist die Zonengleichung:

$$3p_1 q_1 + 3p_2 q_2 + p_3 q_3 = 0.$$

Wollen wir einige Beispiele verschiedener Repräsentation des kubischen und des hexagonal-isotropen Complexes betrachten. Zuerst die zweite einfachere Art der Repräsentation.

Der kubische Complex ist am einfachsten durch zwei senkrechte tetragonal-isotrope Zonen zu charakterisieren, also $a_1 = 1, a_2 = 1$ anzunehmen, und dann ist auch $a_3 = 1$. Aber wir können auch $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$, oder $a_2 = 3, 4, 10, 13$ u. s. f. annehmen, da diese Zahlen sich auf die Flächen $(011), (021), (031), (032)$ beziehen, welche in dem kubischen Complex der Zone $[400]$ angehören. Auch können wir $a_1 = 2$ und a_2 etwa 4, 2, 3, 6, . . . annehmen, da z. B. zur Zone $[011]$ die Flächen $(400), (0\bar{1}1), (1\bar{1}1), (2\bar{1}1)$ gehören; wir können noch $a_1 = 3$ und a_2 etwa 2, 6, 14, . . . annehmen, da der Zone $[111]$ die Flächen $(1\bar{1}0), (\bar{1}\bar{1}2), (\bar{3}21)$ u. s. f. zukommen.

Als Beispiele zweiter Art der Repräsentation können dienen zwei tetragonal-isotrope Zonen mit den Winkeln $70^\circ 34' 44''$, $48^\circ 41' 22''$, $36^\circ 52' 12''$, $28^\circ 4' 20''$, $22^\circ 37' 16''$, $18^\circ 55' 28,8''$, da solche Winkel von (100) resp. mit $(122), (212), (430), (15.8.0), (12.5.0), (35.12.0)$ gebildet werden.

Den hexagonal-isotropen Complex können wir durch zwei senkrechte Zonen mit den Parametern 3 und 3, 3 und 4, 3 und 7, auch 4 und 3, 4 und 15, 4 und 6 u. s. f. repräsentieren, da zu (1000) die Flächen (0121), (010 $\bar{7}$), (0132), und zu (010 $\bar{7}$) die Flächen (1000), (1121), (2121) senkrecht stehen.

Für diesen Complex ist aber auch unter den Repräsentationen zweiter Art noch eine einfachere auszuwählen, z. B. durch zwei tetragonal-isotrope Zonen mit den Winkeln 60° (010 $\bar{7}$ und 0110) oder eine compliciertere mit dem Winkel $75^\circ 31' 21''$ (010 $\bar{7}$ und 2110) oder durch zwei hexagonal-isotrope Zonen mit den Winkeln 60° (0121 und 021 $\bar{7}$), oder $26^\circ 33,9'$ (1000 und 4121) u. s. f.; auch durch eine tetragonal- und eine hexagonal-isotrope Zone mit dem Winkel $30^\circ 0' 0''$ (1000 und 2110 resp. 0121 und 2341) u. s. f.

Aus allem vorhergehenden ist nicht nur klar geworden, daß der kubische und hexagonal-isotrope Complex incommensurabel sind, sondern zugleich, daß unendlich viele isotrope Complexe sui generis existieren, welche sich sämtlich unter einander incommensurabel verhalten.

Dazu ist es z. B. hinreichend, zwei solche senkrechte Zonenachsen auszuwählen, welche weder im kubischen, noch im hexagonal-isotropen zugleich vorhanden oder wenigstens nicht senkrecht sind; jeder Zonenaxe entspricht nur eine bestimmte Reihe von senkrechten Axen.

Wollen wir ein Beispiel solcher Complexe betrachten.

Nehmen wir als den Complex bestimmend zwei senkrechte Zonenachsen mit den Parametern 2 und 7. Dieser Complex kann weder dem kubischen, noch dem hexagonal-isotropen commensurabel sein; dem ersten nicht, weil demselben überhaupt Zonenachsen mit dem Parameter 7 fehlen, dem zweiten nicht, da demselben die Zonenachsen mit dem Parameter 2 fehlen.

Die erste Entwicklung in II. Periode ist in der Fig. 2a dargestellt. Diese Entwicklung ist aus der Sphärenteilung ersichtlich; anstatt der Indices der zu entwickelnden Flächen, welche irrational sind, sind die Parameter sämtlicher Flächen beider Perioden angezeigt.

Man ersieht sogleich, wie zahlreiche schon so einfache Flächen vortreten sind, wie diejenigen mit dem Parameter (1), z. B. die Flächen mit den Indices $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, 0 (Parameter $2 + 7 = 1 \cdot 3^2$), $\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{14}$ (Parameter $2 + 14 = 1 \cdot 4^2$), $3\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{14}$ (Parameter $18 + 7 + 56 = 1 \cdot 9^2$), $\sqrt{2}$, $3\sqrt{7}$, $2\sqrt{14}$ (Parameter $2 + 63 + 56 = 1 \cdot 11^2$). Auch ist der Parameter 2 schon wieder in der Fläche $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{7}$, $\sqrt{14}$ (Parameter $8 + 28 + 14 = 2 \cdot 5^2$) erschienen. Zugleich sieht man, daß zu der Zonenaxe mit dem Parameter 1 u. a. die Zonenaxe mit dem Parameter 14 senkrecht steht, was natürlich für die Zonen mit dem Parameter 1 und 2 nicht der Fall sein kann (da sonst dieser Complex dem kubischen gleich gewesen wäre).

Dieser Complex ist also demjenigen gleich resp. commensurabel, welcher durch zwei Zonenaxen mit dem Parameter 1 und 14 bestimmt werden kann, also durch die Parameter 1, 14 und 14. Da dem Parameter 1 die Axe zugeordnet ist, welche in dem Complex als vierzählige Symmetrieaxe auftritt, so kann man sagen: würde dieser letzte Complex in natürlichen Krystallen erscheinen (was natürlich nicht der Fall sein kann), so wären die Krystalle als solche der tetragonalen Sygonie zum Vorschein gekommen.

Die Entwicklung dieses Complexes ist in der Fig. 2b angedeutet.

Fig. 2.

In dieser Entwicklung ist schon ersichtlich geworden, daß in der Zonenaxe mit dem Parameter 4 schon diejenige mit dem Parameter 7 senkrecht vorkommt. Demselben Complex ist also der Complex mit den Parametern 4, 7 und 7 commensurabel.

Diese dritte Entwicklung ist in der Fig. 2c angedeutet. Diese Entwicklung des Complexes ist schon die einfachste unter allen dreien, und, wie man sieht, sind im großen und ganzen die Parameter der ersten zwei Perioden durch geringere Zahlen vertreten⁴⁾.

4) Die Aufstellung jedes neuen zu früheren incommensurablen Complexes führt zur Entdeckung unendlich vieler Sätze, betreffend die Relationen der Zonenaxen zur Zonenfläche aller Complexes, indem alle Parameter, welche wir in einer Zone in ihren Flächen auffinden, sich kein einziges Mal in allen übrigen Complexen wiederholen, in welchen solche Zonenaxen vertreten sind.

Z. B. die Aufstellung des eben besprochenen Complexes führt zu folgenden Sätzen: Weder im kubischen, noch im hexagonal-isotropen Complex sind in tetragonal-isotropen Zonen die Flächen mit den Parametern 7, 14, 35, 70, ... möglich. Auch im kubischen Complex sind in der Zone mit dem Parameter 14 (z. B. 312) die Flächen mit den Parametern 1, 2, 7, 15, 30, 57, ... unmöglich; und in dem hexagonal-isotropen Complex in der Zone mit dem Parameter 7 (z. B. 1140) die Flächen 1, 2, 14,

Bei den angenommenen Entwicklungsformen der Complexe sind aber sämtliche Flächen durch fast lauter irrationale Indices ausgezeichnet (als Ausnahme erscheint in den beiden letzteren Repräsentationen die Fläche 004). Aber es ist sehr gut möglich, die Flächen jeder der unendlichen Reihe von Complexen durch lauter rationale Indices auszuzeichnen.

Dazu ist notwendig, als krystallographische Axen mit gleichen Axeneinheiten drei Zonenaxen anzunehmen, welchen gleiche Parameter zukommen. Das ist auch für den kubischen Complex der Fall, da allen seinen drei Zonenaxen der Parameter 4 zukommt. Wenn aber in dem kubischen Complex (in einfachster Repräsentation) solche drei Axen unter einander senkrecht stehen, so ist dies für die übrigen Complexe keineswegs der Fall, denn nehmen wir wirklich drei senkrechte krystallographische Axen mit gleichen Axeneinheiten, so ist die directe Folgerung dieser Annahme, daß allen drei Axen, als Zonenaxen, der Parameter 4 zukommt. Die Sache ändert sich nicht, wenn wir den drei Axeneinheiten nicht gleiche, sondern überhaupt rationale Längen zuerteilen; der Complex bleibt dann derselbe, d. h. der kubische. Alles dies sind die dem kubischen, und diesem allein zukommenden Eigenschaften, durch welche sie denselben charakterisieren können.

In allen übrigen Complexen stehen die Zonenaxen mit gleichen Parametern und Axeneinheiten keineswegs unter einander senkrecht. Trotzdem werden in sämtlichen isotropen Complexen durch solche Repräsentation die Flächen rational ausgedrückt. Dies ist daraus ersichtlich, daß der gleiche irrationale Factor aller drei Indices sämtlicher Complexflächen stets der gemeinschaftliche wird und also beseitigt werden kann.

Wie oben bewiesen wurde, sind die Bisectricen zwischen je zwei krystallographischen Axen auch solche rationaler Zonenaxen des Complexes.

Durch drei Axen werden direct auch drei durch diese Axen hindurchgehende Complexflächen bestimmt. Obgleich diese Winkel den betreffenden Axen zugeordnet sind, indem dieselben zu möglichen Zonenwinkeln dieser Axen gehören, so können dieselben ungleich sein, was sogar als der allgemeine Fall betrachtet werden kann. Nur der rechte Winkel kann stets vertreten sein, aber höchstens in der Anzahl zwei.

Drei gegebene Axen bestimmen ein Trigonoëder, welches als ein centrales Trigonoëder eines mesosphärischen trigonalen Isoëders betrachtet werden kann, indem sämtliche dreiseitige Flächen dieses Polyëders unter einander (also die Flächen eines Isoëders und zwar eines trigonalen darstellen) und der Einheitsfläche (d. h. der Fläche, welche durch gleiche

14, 22, 29, 30, 58, 113, ... unmöglich. Ebenfalls sind in der Zone mit dem Parameter 2 (z. B. 110) des kubischen Krystalles die Flächen mit den Parametern 7, 14, 21, 42, ... unmöglich.

Axeneinheiten auf allen drei Axen bestimmt wird) gleich sind. Das Polyöder ist ein mesosphärisches, da seine Flächen zwei concentrischen Kugeln zugleich um- und eingeschrieben sind. Daß das Polyöder ein Isoöder ist, folgt daraus, daß alle drei Flächen des Trigonoëders Symmetrieebenen des Complexes sind. Wenn aber, wie dies im allgemeinen der Fall ist, die inneren Winkel des Trigonoëders irrationale sind, so kommt dem Polyöder eine unendliche Anzahl gleicher Flächen zu, welche sogar unendliche mal die Kugel umfassen würde. Das Isoöder ist also von unendlich großem Grade¹⁾.

Ganz besondere Complexe entstehen, wenn diese Isoöder von einer endlichen Anzahl der Flächen sind und zugleich zu den Polyedern des I. Grades gehören. Dies ist der Fall, wenn alle drei inneren Winkel rationale sind, also die Axen des Trigonoëders Symmetriearien des Complexes sind, deren Zähligkeit mehr als 2 betragen kann.

Da aber in isotropen Complexen überhaupt als solche Axen nur 3-, 6- und 4-zählige Symmetriearien auftreten können mit den respectiven Parametern 3 und 4, so gehören hierzu nur zwei Hauptfälle.

1. Der Parameter der Axen ist gleich 4, und die inneren Winkel des centralen Trigonoëders sind entweder 90° oder 45° .

Nun ist leicht zu beweisen, daß in diesem Falle keiner der drei Winkel gleich 45° sein kann.

Die Annahme, daß alle drei Winkel gleich 45° sind, ist einfach aus dem Grunde unmöglich, weil dann die Summe der inneren Winkel des Trigonoëders (also zugleich des zugeordneten sphärischen Dreiecks) 135° , also weniger als 180° , betragen würde. Sind zwei Winkel von der Größe 45° und nur der dritte ein rechter, so hätten wir für diese Summe 180° , und das Trigonoöder selbst (resp. das sphärische Dreieck) wäre gleich Null. Wenn endlich nur ein Winkel 45° beträgt, und beide andere rechte sind, so ist leicht zu beweisen, daß alle drei Parameter nicht gleich 4 sein können, sondern einer von den dreien gleich 2 wäre. Somit gehört hierzu der kubische Complex allein mit drei rechten Winkeln (das zugeordnete mesosphärische Isoöder ist das Oktaöder).

2. Der Parameter der Axen ist gleich 3, und die inneren Winkel sind entweder 30° , 60° , 90° oder 120° .

Die Combinationen von a) 30° , 30° und 30° , b) 30° , 30° , 60° , c) 30° , 90° und 90° , d) 30° , 30° , 120° , e) 30° , 60° , 60° , f) 30° , 60° , 90° sind von vornherein ausgeschlossen, natürlich auch g) 90° , 90° , 90° und h) 120° , 120° und 120° .

Überhaupt sind aus allen denkbaren Combinationen nur diejenigen

1) Über die Polyöder von höherem Grade ist im Abschnitt V der »Elemente der Gestaltenlehre« die Rede (Ref. in dieser Zeitschr. 21, 693).

zulässig, welche einem trigonalen mesosphärischen Isoëder mit 3- resp. 6-zähliger Symmetrieaxe entsprechen. Nun wurde vom Verfasser schon früher bewiesen, daß hierzu allein mesosphärische hexagonale und trigonale Bipyramiden gehören¹⁾, und diesen Isoëdern entsprechen die betreffenden inneren Winkel 60° , 90° , 90° resp. 120° , 90° , 90° .

Z. B. die mögliche Combination 120° , 60° und 60° würde den kubischen Complex charakterisiert haben, in dem als Axen $[111]$, $[\bar{1}\bar{1}1]$, $[\bar{1}1\bar{1}]$ ausgewählt würden. Aber doch würde diese Combination unzulässig, da derselben kein mesosphärisches Isoëder überhaupt entspricht, a fortiori dasjenige, welches 3- resp. 6-zählige Symmetrieaxe besitzen würde.

Nun aber ist dieser, die Ableitung abschließende Fall der des hexagonal-isotropen Complexes, in dem als Axen die Axen $[1000]$, $[0121]$ und $[021\bar{1}]$ resp. $[1000]$, $[021\bar{1}]$, $[0\bar{1}12]$ angenommen werden, alle drei hexagonal-isotrope, d. h. mit dem Parameter 3; von diesen beiden Combinationen entspricht die erste der Grothschen und die zweite der Bravais'schen Aufstellung der Complexes (in gewöhnlichen Grothschen Indices).

Also unter allen denkbaren Complexen sind nur zwei durch das Vorhandensein von mehr als 2-zähligen Symmetrieaxen und zugleich durch rationalen Ausdruck sämtlicher Flächen ausgezeichnet: der kubische und der hexagonal-isotrope. Die Eigenschaften dieses letzteren Complexes wurden schon umständlich genug in der Arbeit »Zonale Verhältnisse des Berylls und der Krystalle des hypohexagonalen Typus überhaupt«²⁾ untersucht.

Charakteristisch ist auch, daß die beiden besonderen Complexes durch sämtliche Combinationen der zu einander senkrechten tetragonal- resp. hexagonal-isotropen Zonenaxen charakterisiert werden können. Solcher Combinationen sind nur folgende möglich: 1) 4 und 4, 2) 4 und 6, 3) 6 und 6. Die erste Combination charakterisiert den kubischen und die beiden anderen den hexagonal-isotropen Complex. Daraus entstehen zwei mögliche Combinationen von drei senkrechten Zonenaxen: 1) mit den Parametern 4, 4 und 4 (kubischer Complex) und 2) 4, 3 und 3 (hexagonal-isotroper Complex).

Zum Schluß suchen wir die zulässigen Aufstellungen und die zugeordneten Zonengleichungen für den hexagonal-isotropen Complex auf.

Bei der ersten der zwei obigen Auffassungen wird eine der hexagonal-isotropen Axen (natürlich gleichgültig, welche von beiden) als 6-zählige Symmetrieaxe aufgefaßt, und als Einheitsfläche erscheint die Fläche (1110) , welche zur Hauptaxe unter dem Winkel $49^\circ 6' 24''$ geneigt ist, wo der

1) Über mesosphärische Polyëder. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, Série VIII, XIV, No. 4, p. 42. Ausführlicher Bulletin 21, Nr. 4.

2) Diese Zeitschr. 35, 75 ff.

erste Index sich auf die Hauptaxe bezieht und die horizontalen Axen der Reihe nach unter 60° gedacht werden (und zwar $02\bar{1}\bar{1}$, $012\bar{1}$, $0\bar{1}12$). Es erweist sich leicht, daß unter den vier Indices p_0, p_1, p_2, p_3 , welche sich auf diese vier Axen beziehen, die Relation besteht: $p_3 = p_2 - p_1$.

Um daraus die Zonengleichung abzuleiten, suchen wir zuerst die Transformationsformeln in bezug auf die Aufstellung g_1, g_2, g_3 mit drei senkrechten Axen; es seien:

$$\begin{array}{cccccc} g & 100 & 010 & 001 & 111 \\ p & 1000 & 0121 & 010\bar{1} & 1110. \end{array}$$

Dann haben wir:

$$p_0 : p_1 : p_2 : p_3 = 2g_1 : g_2 + g_3 : 2g_2 : g_2 - g_3, \quad (a)$$

und umgekehrt:

$$g_1 : g_2 : g_3 = p_0 : p_2 : 2p_1 - p_2. \quad (b)$$

Führen wir diese letzten Werte in die hierzu gehörende allgemeine Formel (G') ein, so finden wir:

$$\begin{aligned} 3p_0g_0 + 3p_2g_2 + (2p_1 - p_2)(2q_1 - q_2) &= 0 \text{ resp.} \\ 3p_0g_0 + 4p_1q_1 + 4p_2q_2 - 2p_1q_2 - 2q_1p_2 &= 0. \end{aligned} \quad (c)$$

Das ist die schon bekannte Zonengleichung für die erste Auffassung und Aufstellung¹⁾.

Bei der zweiten Auffassung wird eine der hexagonal-isotropen Axen als dreizählige Symmetrieaxe des Krystalles genommen, da dabei die mesosphärisch-trigonale Bipyramide der Auffassung zugrunde liegt. Als Einheitsfläche erscheint diejenige mit den Indices ($111\bar{2}$), welche zur Hauptaxe unter dem Winkel $63^\circ 26' 6''$ geneigt ist, wobei der erste Index sich auf die Hauptaxe bezieht und die horizontalen Axen der Reihe nach unter 120° gedacht werden (und zwar $02\bar{1}\bar{1}$, $0\bar{1}2\bar{1}$ und $0\bar{1}\bar{1}2$). Es erweist sich leicht, daß unter den vier Indices p_0, p_1, p_2, p_3 , welche sich auf diese vier Axen beziehen, die Relation $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ besteht.

Um daraus die Zonengleichung abzuleiten, suchen wir zuerst die Transformationsformeln in bezug auf die Aufstellung g_1, g_2, g_3 mit drei senkrechten Axen; es seien

$$\begin{array}{cccccc} g & 100 & 010 & 001 & 111 \\ p & 1000 & 02\bar{1}\bar{1} & 001\bar{1} & 110\bar{1}. \end{array}$$

Dann haben wir:

$$p_0 : p_1 : p_2 : p_3 = 2g_1 : 2g_2 : -g_2 + g_3 : -g_2 - g_3,$$

und umgekehrt:

$$g_1 : g_2 : g_3 = p_0 : p_1 : p_1 + 2p_2.$$

Führen wir diese letzten Werte in die hierzu gehörende allgemeine Formel (G') ein, so finden wir:

¹⁾ Cursus der Krystallographie 3. Aufl., 1904, S. 148.

$$\begin{aligned} & 3p_0q_0 + 3p_1q_1 + (p_1 + 2p_2)(q_1 + 2q_2) = 0 \\ \text{resp.} \quad & 3p_0q_0 + 4p_1q_1 + 4p_2q_2 + 2p_1q_2 + 2p_2q_1 = 0. \end{aligned} \quad (c')$$

Die Zonengleichung (c) bezieht sich also auf die Grothsche und (c') auf die Bravais'sche Aufstellung.

Nimmt man in den Formeln die Indices p und q gleich, so erhält man die Parameter, und zwar

$$\text{bei der ersten Aufstellung: } P = 3p_0^2 + 4p_1^2 + 4p_2^2 - 4p_1p_2, \quad (d)$$

$$- \quad \text{zweiten} \quad - \quad P = 3p_0^2 + 4p_1^2 + 4p_2^2 + 4p_1p_2. \quad (d')$$

Den beiden Formeln (c) und (c') kann man dieselbe Form zuerteilen, wie der Zonenformel für den kubischen Complex, d. h.

$$p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 = 0 \quad \text{resp.} \quad p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 = 0, \quad (e)$$

wenn unter p und q die Subindices verstanden werden. Und dann erhalten wir für diese Subindices die Formeln:

bei der ersten Aufstellung:

$$q_0 : q_1 : q_2 : q_3 = 3q_0 : 4q_1 - 2q_2 : -2q_1 + 4q_2 : 6q_1 + 6q_2 \quad (e)$$

$$\text{und umgekehrt: } q_0 : q_1 : q_2 : q_3 = 2q_0 : 2q_1 + q_2 : q_1 + 2q_2 : -q_1 + q_2; \quad (f)$$

bei der zweiten Aufstellung:

$$q_0 : q_1 : q_2 : q_3 = 3q_0 : 4q_1 + 2q_2 : 2q_1 + 4q_2 : -6q_1 + 6q_2 \quad (e')$$

$$\text{und umgekehrt: } q_0 : q_1 : q_2 : q_3 = 2q_0 : 2q_1 - q_2 : -q_1 + 2q_2 : -q_1 - q_2. \quad (f')$$

Also z. B., um die Zone zu bestimmen, welche bei der ersten Aufstellung durch die Flächen (1110) und (1011) hindurchgeht, haben wir:

$$q_0 : q_1 : q_2 = \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & \times & \times & \times \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} = 10\bar{1}$$

$$\text{und} \quad q_0 : q_1 : q_2 = 2 \cdot 1 : 2 \cdot 0 + 1 \cdot \bar{1} : 1 \cdot 0 + 2 \cdot \bar{1} = 2 : \bar{1} : \bar{2}.$$

Um bei der zweiten Aufstellung die Zone zu bestimmen, welche durch die Flächen (110 $\bar{1}$) und (101 $\bar{1}$) hindurchgeht, haben wir:

$$q_0 : q_1 : q_2 = \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ & \times & \times & \times \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} = 1\bar{1}\bar{1}$$

$$\text{und} \quad q_0 : q_1 : q_2 = 2 \cdot 1 : 2 \cdot \bar{1} - 1 \cdot \bar{1} : -1 \cdot \bar{1} + 2 \cdot \bar{1} = 2 : \bar{1} : \bar{1}.$$

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist der Schluß, daß auch vom Standpunkte der reinen Syngonielehre wir zu derselben Haupteinteilung des Krystallreiches in zwei Typen gelangen, deren typische Vertreter die isotropen Complexe sind, der kubische und der hexagonale, wie dies aus der Theorie der Krystallstructur sich erwies. Durch Anwendung der Methode der zonalen Krystallographie wurde derselbe Schluß auf directe Erfahrung gestützt.