Die fundamentalen Anzahlen und Ausartungen der cubischen Plancurven nullten Geschlechts.

Von

H. SCHUBERT in Hamburg.

(Zweite Abhandlung der „Beiträge zur abzählenden Geometrie.“)

(Man vergleiche Band X, p. 1 bis 5.)

Die vorliegende, zweite Abhandlung der „Beiträge zur abzählenden Geometrie“ schliesst sich auch in der *Numerirung* der Abschnitte und Paragraphen an die erste, in Band X, p. 1 bis 116, veröffentlichte Abhandlung an, so dass die Citate, welche nichts weiter als eine Abschnittsnummer oder Paragraphennummer enthalten, auf die vorliegende und auch auf die erste Abhandlung zu beziehen sind. Als Vorläufer dieser Abhandlung ist die Mittheilung anzusehen, welche ich im Mai des Jahres 1875 durch die Gött. Nachr. veröffentlicht habe. Beispielsweise ist die zweite Tabelle des § 50. schon dort veröffentlicht.

Der hier vorliegende Abschnitt IV. bespricht die von Chasles und Zeuthen begründete Anzählbestimmung, bei welcher man die Anzahlen von *höheren* Gebilden auf die Anzahlen von *einfacheren* Gebilden *reducirt*. Diese Reduction wird durch Beispiele (§ 32. u. § 34.) erläutert. § 35. enthält ferner die Erweiterung der Zeuthen'schen*) Formeln für einstufige, in fester Ebene liegende Plancurvensysteme auf Plancurvensysteme *im Raume*. § 36. und § 37. bestimmen die im Folgenden benutzten *Kegelschnittanzahlen*.

Der Abschnitt V. bestimmt Anzahlen der *cubischen Plancurve mit Spitze*, der Abschnitt VI. Anzahlen der *cubischen Plancurve mit Doppelpunkt*. Bei der Reduction dieser Anzahlen auf die Anzahlen der Ausartungen der behandelten Curven sind die in Abschnitt III. entwickelten *Correspondenzformeln* benutzt (§ 40. und § 53.). Auch leisten die

*) Zeuthen giebt diese Formeln in § 24. seiner Abhandlung „*Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver*“ (Videnak. Selsk. (5) IV, p. 287 bis 393). Diese Abhandlung soll kurz mit „*Alm. Eg.*“ citirt werden.

in Abschnitt II. abgeleiteten *Incidenzformeln**) vortreffliche Dienste, sowohl dadurch, dass sie die auf die *allgemeinen* Curven bezüglichen *Anzahlen von einander abhängig* machen (§ 38. und § 52.), wie auch dadurch, dass sie die scheinbar mühsame Berechnung der *Ausartungsanzahlen erleichtern* (§ 43. bis § 47. und § 56.). Die Ausartungen sind fast sämtlich durch eine gewisse *homographische Abbildung* aus der allgemeinen Curve erzeugt (§ 41. und § 54.). Bei der numerischen Ausrechnung ergeben sich zugleich genug Mittel, um die *Grade gewisser Gleichungen* zu erkennen, durch welche die Punkte, Tangenten, singulären Punkte und singulären Strahlen in ihrer Lage von einander abhängen (§ 51. und § 53.).

Die erste Tabelle in § 50. und die erste Tabelle in § 57. enthalten alle diejenigen auf die cubischen Plancurven bezüglichen Anzahlen, welche man kennen muss, um die *cubische Raumcurve* analog zu behandeln. Dies soll in der dritten Abhandlung geschehen, welche hoffentlich dieser zweiten Abhandlung schnell folgen wird.

IV. Abschnitt.

Allgemeine und vorbereitende Erörterungen.

§ 31.

Die Chasles-Zeuthen'sche Methode.

Die abzählende Geometrie hat als äusseres Ziel die Beantwortung aller Fragen von folgender Form:

„Wievieldeutig ist ein Gebilde Γ von gegebener Definition und mit der Constantenzahl c durch eine einzelne oder zusammengesetzte c -fache Bedingung bestimmt?“

Zwar beanspruchen die Zahlen, welche diese Frage beantworten, an und für sich kein dauerndes Interesse, obwohl sie, analytisch aufgefasst, die Grade gewisser, meist interessanter Eliminationsgleichungen sind, zu deren Aufstellung die Mittel der Algebra nur in wenigen Fällen ausreichen. Wohl aber verdienen die Wege, welche zu jenen Zahlen führen, das Interesse der Geometer dadurch, dass sie einen sonst kaum zu erreichenden Einblick in wichtige, analytisch oft noch nicht erkannte Eigenschaften des behandelten Gebildes Γ gewähren.

*) So bezeichne ich von jetzt an die in § 9. und § 10. entwickelten allgemeinen Formeln, indem ich mit Grassmann, Sturm und Andern *incident* nenne:

- a) einen Punkt und einen Strahl, wenn der Punkt im Strahle liegt,
- b) eine Ebene und einen Strahl, wenn der Strahl in der Ebene liegt,
- c) eine Ebene und einen Punkt, wenn der Punkt in der Ebene liegt,
- d) zwei Strahlen, wenn sie sich schneiden.

Die von Chasles 1864 (*Comptes rendus*) begründete, dann namentlich von Zeuthen durch dessen *Alm. Eg.* weiter ausgebaut Methode zur Bestimmung jener Anzahlen besteht wesentlich in der Aufstellung von Formeln, welche die gesuchten, dem Gebilde Γ zukommenden Anzahlen auf die als bekannt vorausgesetzten Anzahlen *anderer* einfacherer Gebilde von *kleinerer Constantenzahl* zurückführen.

Freilich lässt sich diese Zurückführung bisweilen dadurch umgehen, dass man durch *Moduln* (§ 2., p. 10) die gesuchten Anzahlen abhängig von anderen, aber *ebenfalls* Γ *angehörigen* und schon berechneten Anzahlen darstellen kann. So kann man z. B. immer durch gewisse *fundamentale* Anzahlen alle übrigen fundamentalen Anzahlen ausdrücken, und zwar vermöge der Moduln, welche der Verfasser im II. Abschnitt vom allgemeinsten Standpunkte aus aufgestellt hat. So kann man ferner bei Curven und Flächen die Anzahlen, welche sich auf die Berührungsbedingungen beziehen, durch andere Anzahlen darstellen (cf. § 28., Brill, *Math. Annalen* Bd. VIII, p. 534, und des Verfassers Mittheilung in den *Gött. Nachr.*, Juli 1877, § 2.). Bei manchen Gebilden hat man sogar Gruppen von endlichvielen Bedingungen gefunden, durch welche allein *jede* andere Bedingung ausgedrückt werden kann, und in Folge dessen *Productensätze* (§ 26.) aufgestellt, d. h. die Formeln angegeben, welche die Zahl der zwei gegebenen Systemen *gemeinsamen* Elemente als Function von Anzahlen darstellen, deren jede auf das eine oder das andere der beiden Systeme *allein* Bezug nimmt. Derartige Gebilde sind z. B. der Punkt (Bezout's Fundamentalsatz der Algebra), die Ebene, der Strahl (Halphen), das aus Strahl und darauf liegendem Punkte bestehende Gebilde, das Punktepaar (der Verfasser in den *Gött. Nachr.* Juli 1877), und unter gewissen, von Halphen bemerkten Einschränkungen auch der Kegelschnitt und die Fläche zweiten Grades.

Für höhere Gebilde jedoch ist man vorzugsweise auf die oben zuerst erwähnte, immer mögliche *Chasles-Zeuthen'sche Reduction* der gesuchten Anzahlen auf Anzahlen *anderer* Gebilde von kleinerer Constantenzahl angewiesen. Beispielsweise führt man bei dieser Abzählungsmethode die Anzahlen, welche sich auf die im Folgenden vorzugsweise behandelte cubische Plancurve mit Spitze beziehen, auf diejenigen Anzahlen zurück, welche dem Punkte, der Ebene, dem Strahle, dem Kegelschnitte und den aus ihnen zusammengesetzten Gebilden angehören.

Die Formeln, welche diese Reductionen ermöglichen, haben zwei algebraische Quellen, erstens *das Princip von der Erhaltung der Anzahl* (§ 7.), und zweitens *das Chasles'sche Correspondenzprincip*. Aus dem ersten Princip fließen die wichtigen *Incidenzformeln* des II. Abschnitts, aus dem zweiten Princip die allgemeinen *Correspondenzformeln*,

welche zwischen den Grundbedingungen eines Paares von Hauptelementen und denen seiner Coincidenz bestehen (Abschnitt III.). An diese letzten Formeln schliessen sich die Correspondenzformeln an, welche der Verfasser in den Math. Annalen Bd. XII, p. 180, für *Gruppen* von n Punkten und n Strahlen aufgestellt hat. Inwiefern die Incidenzformeln und die Correspondenzformeln die Chasles-Zeuthen'sche Reduction ermöglichen, wollen wir jetzt erörtern.

Man betrachte ein gewisses Paar von Hauptelementen, welches auf jedem Gebilde Γ mit der Constantenzahl c ein β -stufiges System erzeugen möge, und schreibe diesem Paare eine $(\beta + a)$ -fache Grundbedingung zu. Dann legt man dadurch dem Gebilde Γ eine a -fache Bedingung auf. Da ferner das allgemeine Γ ein $(\beta - 1)$ -stufiges System von Coincidenzen jenes Paares enthält, so giebt eine $(\beta + a - 1)$ -fache, aber der *Coincidenz* zugeschriebene Grundbedingung ebenfalls eine a -fache Bedingung für Γ . So würden also aus den Correspondenzformeln des III. Abschnitts für ein zu Grunde gelegtes, a -stufiges System von Gebilden Γ viele Formeln abgeleitet werden können, welche *nur* a -fache Bedingungen enthielten, wenn nicht in einem solchen Systeme im Allgemeinen *speciellere* Gebilde Γ vorkämen, bei denen die *Stufe des Systems der Coincidenzen* grösser als $\beta - 1$ ist. Wenn nun auf einem *specielleren* Gebilde Γ nicht wie im Allgemeinen ein $(\beta - 1)$ -stufiges, sondern ein $(\beta + \gamma - 1)$ -stufiges System von Coincidenzen jenes Hauptelementenpaares liegt, so wird auch im Allgemeinen ein a -stufiges System von Gebilden Γ ein $(a - \gamma)$ -stufiges System solcher *besonderen* Gebilde Γ enthalten müssen. *Deshalb treten in die Formeln zwischen a -fachen Bedingungen für Γ im Allgemeinen auch $(a - \gamma)$ -fache Bedingungssymbole, welche aber specielleren Gebilden Γ mit einer um γ verminderten Constantenzahl angehören.* Das Analoge ist auch der Fall bei der Anwendung von Correspondenzformeln für *Punktgruppen*, oder bei der Anwendung des Princip's von der Erhaltung der Anzahl. Jedes solche *speciellere* Γ mit einer um γ verminderten Constantenzahl soll *rücksichtlich* der gewählten Correspondenz zwischen den auf Γ liegenden Hauptelementen γ -stufig *ausgeartet* heissen (courbes singulières in den Alm. Eg.). Ist ein Gebilde Γ_2 durch die Correspondenz b_2 eine γ_2 -stufige Ausartung eines gewissen Gebildes Γ_1 , welches selbst wieder durch die Correspondenz b_1 eine γ_1 -stufige Ausartung des Gebildes Γ ist, so ist Γ_2 als ein Gebilde Γ zu bezeichnen, welches durch die beiden Correspondenzen b_1 und b_2 $(\gamma_1 + \gamma_2)$ -stufig *ausgeartet* ist. Z. B. ist der Kegelschnitt, dessen Punkte zwei zusammenfallende Gerade, und dessen Tangenten zugleich zwei zusammenfallende Strahlbüschel bilden, $(1 + 1)$ -stufig *ausgeartet*, und zwar durch die Correspondenz zwischen je zwei Kegelschnittpunkten und durch die Correspondenz zwischen je zwei Kegelschnitttangenten. Da wir im

Folgenden fast nur mit einstufigen Ausartungen zu thun haben werden, so werden wir unter Ausartung schlechthin immer eine *einstufige* verstehen.

Es wird nicht überflüssig sein, im nächsten Paragraphen einige Beispiele anzuführen, welche zeigen sollen, in welcher Weise sich bei der Ableitung von Formeln zwischen Bedingungssymbolen die ausgearteten Gebilde geltend machen.

§ 32.

Beispiele für das Eintreten von Ausartungen in die Formeln zwischen Bedingungen.

Erstes Beispiel.

Das Gebilde Γ sei ein Kegelschnitt, und es bezeichne für denselben:

μ die Bedingung, seine Ebene soll durch einen gegebenen Punkt gehen,

ν , er soll eine gegebene Gerade schneiden,

ρ , er soll eine gegebene Ebene berühren,

P , er soll durch einen gegebenen Punkt gehen,

x , er soll eine gegebene Ebene so schneiden, dass die Tangente des Schnittpunkts durch einen gegebenen Punkt gehe,

y , er soll eine gegebene Gerade so schneiden, dass die Tangente des Schnittpunkts eine gegebene Gerade schneide.

Wir fassen nun je zwei Punkte eines Kegelschnitts als Punktpaar zusammen. Dann besitzt ein gegebenes, zweistufiges Kegelschnittssystem ein vierstufiges System solcher Punktpaare. Auf dieses System wenden wir die Formel (9) aus § 16. an, welche dort hieß:

$$c^3d + c^2d^2 + cd^3 = \epsilon b g_p + \epsilon b^2 g + \epsilon b^3.$$

Es fragt sich nun, welche Bedingung ein Kegelschnitt erfüllen muss, damit eins seiner ∞^2 Punktpaare die Bedingungen c^3d , c^2d^2 u. s. f. erfüllt. Die Bedingung c^3d wird von jedem Kegelschnitt erfüllt, welcher durch den Punkt von c^3 geht, d. h. welcher die Bedingung P erfüllt, und zwar *zweimal*, weil die Ebene von d ihn in zwei Punkten schneidet. Analog findet man, dass $2P$ für cd^3 , ν^2 für c^2d^2 , und, wenn von Ausartungen zunächst abgesehen wird, x für $\epsilon b g_p$, y für $\epsilon b^2 g$, P für ϵb^3 zu setzen ist. Doch ist in dem zweistufigen Kegelschnittssysteme ein *einstufiges* System specieller Kegelschnitte möglich, deren jeder ein *zweistufiges* System von Coincidenzen dadurch zu fassen vermag, dass jeder seiner ∞^1 Punkte nicht bloß in einer, sondern in ∞^1 Richtungen einen unendlich nahen Punkt besitzt. Bei einem solchen Kegelschnitt bilden also die Punkte zwei zusammenfallende Gerade, und in Folge dessen die Tangenten zwei Strahlbüschel, deren

Scheitel auf der Doppelgeraden liegen, und deren Ebenen in die Ebene des Kegelschnitts fallen. Jeder Kegelschnitt von dieser Beschaffenheit würde also *rücksichtlich der Correspondenz zweier Kegelschnittpunkte einstufig ausgeartet sein*.

Bezeichnet $\eta\mu$ die Zahl derjenigen Kegelschnitte des Systems, welche so ausgeartet sind und dabei ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicken, ηn die Zahl derer, welche so ausgeartet sind und dabei ihre Doppelgerade eine gegebene Gerade schneiden lassen, so umfasst dass Coincidenzsymbol $\varepsilon b g_p$ auch die Zahl $\eta\mu$, und $\varepsilon b^2 g$ auch die Zahl ηn . Also erhält man schliesslich die allgemeingültige Formel:

$$2P + v^2 + 2P = x + y + P + \eta\mu + \eta n.$$

Nun ist aber nach den allgemeinen Lageformeln (§ 10.):

$$P = \mu\nu - 2 \cdot \mu^2$$

und, wie § 36. und § 37. lehren wird:

$$\begin{aligned} x &= \mu\nu + \mu\rho - 2\mu^2, & y &= \frac{1}{2}\nu\rho + \mu\nu - 2\mu^2, \\ \eta\mu &= (2\nu - \rho - 2\mu)\mu, & \eta n &= (2\nu - \rho - 2\mu)\frac{1}{2}\nu. \end{aligned}$$

Die Substitution dieser Moduln in die eben abgeleitete Formel ergibt eine Bestätigung.

Zweites Beispiel.

Das Gebilde Γ sei eine cubische Plancurve mit Spitze. Es bedeute für dieselbe:

- μ die Bedingung, dass ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt geht,
- w , dass ihre Wendetangente eine gegebene Gerade schneide,
- q , dass ihre Rückkehrtangente dies thue,
- y , dass der Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente in einer gegebenen Ebene liege.

Wir setzen nun ein einstufiges Curvensystem voraus und fassen auf jeder Curve desselben die Wendetangente mit der Rückkehrtangente als Strahlenpaar zusammen. Dann erhalten wir ein einstufiges System solcher Strahlenpaare. Auf dieses System wenden wir die Formel (56) des § 20. an. Dann haben wir w für $g\sigma$, q für $h\sigma$, $\mu + y$ für $\beta\sigma$ zu setzen. Das Coincidenzsymbol kann nur von solchen Curven erfüllt werden, auf denen Wendetangente und Rückkehrtangente zusammenfallen. Enthält das System φ solcher Curven, so gilt also die Formel:

$$w + q - \mu - y = \varphi.$$

Demgemäss ist jede durch φ mitgezählte Curve *hinsichtlich der Correspondenz zwischen Wendetangente und Rückkehrtangente ausgeartet*.

Drittes Beispiel.

In § 7., p. 24 ist als Beispiel für die Anwendung des Principis von der Erhaltung der Anzahl die für alle zweistufigen *Elementarsysteme* von Plancurven C_3^3 gültige Formel:

$$v^2 = P + x + 3c_j + 6\mu^2$$

aufgestellt. Bei Zugrundelegung eines *beliebigen* zweistufigen Systems würde der rechten Seite dieser Formel die Zahl aller derjenigen hinreichend oft gerechneten Curven hinzuzufügen sein, welche ∞^1 vielfache Punkte besitzen, und den Ort dieser vielfachen Punkte eine gegebene Gerade schneiden lassen. Zu den *so ausgearteten* Curven gehören also alle diejenigen, deren Punkte auf drei Geraden liegen, von denen zwei, oder welche alle drei zusammenfallen.

Viertes Beispiel.

Das Gebilde Γ sei eine Fläche zweiter Ordnung, und es bezeichne für sie:

μ die Bedingung, durch einen gegebenen Punkt zu gehen,

γ' die Bedingung, eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte zu berühren,

x die Bedingung, eine gegebene Gerade zu enthalten.

Wir setzen nun ein dreistufiges Flächensystem voraus, und legen die Gerade der Bedingung γ' durch den Punkt der Bedingung μ . Dann giebt das Princip von der Erhaltung der Anzahl die schon in den Math. Annalen Bd. X, p. 352 abgeleitete Formel:

$$\mu\gamma' = x + 2m^2\sigma + u\varepsilon,$$

wo $m^2\sigma$ die Zahl derjenigen ausgearteten Flächen bedeutet, welche ihre Punkte auf einer Doppelebene haben, und diese Doppelebene durch eine gegebene Gerade schicken, und wo $u\varepsilon$ die Zahl derjenigen ausgearteten Flächen bedeutet, welche ihre Punkte auf zwei Ebenen haben, und eine dieser Ebenen durch eine gegebene Gerade schicken.

§ 33.

Die Eintheilung der Ausartungen.

Nach der obigen Definition hat der Begriff *Ausartung* eines Gebildes nur *rücksichtlich* der aufgestellten Correspondenzen oder der ausgeführten Lage-Specialisirungen, nicht aber an und für sich einen Sinn. In *irgend einer* Rücksicht kann *jedes* die Definition eines Gebildes Γ erfüllendes Individuum als ein ausgeartetes Gebilde Γ betrachtet werden. Im Folgenden aber können nur gewisse Sorten von Ausartungen auftreten. Dies rührt daher, dass nur die *Elemente der Plücker'schen Oerter* (§ 6.) den Correspondenzformeln oder dem

Principe von der Erhaltung der Anzahl unterworfen werden sollen. Bei dieser Einschränkung treten unter ∞^c Gebilden Γ immer nur ∞^{c-1} als ausgeartet auf, und in die Formeln treten keine andern Bedingungen ein, als solche, die wir in § 6. fundamental genannt haben. Deshalb nennen wir auch jene auf Plücker'sche Oerter bezüglichen Ausartungen *fundamentale*. Auf einer fundamentalen Ausartung eines Gebildes Γ müssen also entweder mindestens zwei Elemente der Plücker'schen Oerter nullter Stufe *coincidiren*, die dies bei dem allgemeinen Γ nicht thun, oder es muss auf ihr mindestens ein Ort von höherer als der nullten Stufe existiren, der *zerfallen* ist, d. h., *sich in mehrere selbstständige Oerter aufgelöst hat, deren Gradsumme gleich seinem Grade ist*. Da wir im Folgenden fast nur mit *einstufigen fundamentalen* Ausartungen zu thun haben werden, so soll unter Ausartung schlechthin immer nur eine solche speciellere verstanden werden, es müsste denn das Gegentheil ausdrücklich gesagt sein. Diese auf einem einstufigen Systeme in endlicher Anzahl vorhandenen Ausartungen spielen hinsichtlich des Systems etwa dieselbe Rolle, wie hinsichtlich einer Curve die gewöhnlichen Plücker'schen Singularitäten.

Meist verursacht das Zerfallen eines Plücker'schen Orts oder das Coincidiren von sonst getrennt liegenden Hauptelementen das Zerfallen noch anderer Oerter oder das Coincidiren noch anderer Hauptelemente. Hierfür einige Beispiele, die theils bekannt sind, theils im Folgenden vorkommen.

1) Das Zerfallen des Tangentenorts eines Kegelschnitts bedingt das Zerfallen des Punktorfs.

2) Das Zerfallen des Tangentenorts einer Fläche zweiten Grades in zwei zusammenfallende Strahlenaxen bedingt das Zerfallen des Punktorfs in zwei Punktfelder, und auch das Zerfallen des Orts der Tangentialebenen in zwei Ebenenbündel.

3) Das Zerfallen des Punktorfs einer Plancurve C_3^3 in einen Kegelschnitt und eine Gerade bedingt nicht blos das Zerfallen des Tangentenorts, sondern auch die Coincidenz von Wendepunkt und Spitze, sowie die Coincidenz von Wendetangente und Rückkehrtangente.

4) Die Coincidenz eines Wendepunkts mit dem Doppelpunkt einer C_3^4 bedingt das Zerfallen des Tangentenorts, nicht aber nothwendig das Zerfallen des Punktorfs.

5) Es kann aber auch vorkommen, dass bei Plancurven die Coincidenz singulärer Elemente weder das Zerfallen des Punktorfs noch das des Tangentenorts verursacht. Hierfür bietet die Plancurve vierter Ordnung sechsten Ranges mit drei Doppelpunkten ein Beispiel. Wenn bei dieser die drei Doppelpunkte *coincidiren*, so braucht weder ihr Punktorf noch ihr Tangentenort zu zerfallen. (Alm. Eg. Nr. 39.)

Wegen der eben durch Beispiele erläuterten Eigenschaft der Ge-

bilde, dass ihr Ausarten in einer Rücksicht meist auch ein Ausarten in anderen Rücksichten nach sich zieht, ist es weniger zweckmässig, die Ausartungen nach den Correspondenzen u. s. w. zu unterscheiden, als vielmehr, sie nach dem Zerfallen und der gegenseitigen Lage der Plücker'schen Oerter einzutheilen. Demgemäss werden wir zwei Gebilde Γ nur dann als *verschieden ausgeartet* bezeichnen, wenn sie bei einer genauen Beschreibung der Lage ihrer *sämmtlichen* Plücker'schen Oerter *verschiedene Definitionen* nöthig machen. Zu beachten ist dabei, dass zwei Ausartungen einer Plancurve, welche hinsichtlich des zerfallenden Punktorts und des zerfallenden Tangentenorts derselben Definition genügen, doch als verschieden gelten müssen, sobald die Lage der singulären Punkte und der singulären Tangenten bei beiden verschieden ist. (Man vergleiche die Ausartungen δ_1 und δ_2 der C_3^3 in § 41.)

Bisher hatte man in der Geometrie bei einer Curve Ausarten und Zerfallen ihres Punktorts meist identificirt, und selten darauf geachtet, in wiefern auf den ausgearteten Gebilden Γ die Γ charakterisirenden Plücker'schen Zahlen erhalten bleiben, z. B., wo auf einer cubischen Raumcurve, die in einen Kegelschnitt und eine ihn schneidende Gerade zerfallen ist, der Ort vierten Grades ihrer Tangenten oder der Ort dritten Grades ihrer Schmiegungebenen zu finden ist. Die Untersuchungen der abzählenden Geometrie drängen aber darauf hin, den Begriff der Ausartung so allgemein zu fassen, wie es oben geschehen ist, und in die Eigenthümlichkeiten eines Gebildes dadurch einzudringen, dass man die *genauen Definitionen seiner verschiedenen Ausartungen aufsucht*. Dieses hat der Verfasser namentlich für die Plancurve C_3^3 (§ 41.) und für die cubische Raumcurve (dritte Abhandlung der Beitr.) gethan. Es wird sich zeigen, dass die Beschreibung der *sämmtlichen* fundamentalen Ausartungen der C_3^3 13 verschiedene Definitionen nöthig macht, oder kurz, indem das Wort Ausartung Sammelwort wird, dass die C_3^3 13 Ausartungen hat, ferner auch, dass die cubische Raumcurve 11 Ausartungen besitzt. (Dritte Abhandlung der „Beitr.“)

Es ist wünschenswerth, dass verschieden definirte Ausartungen auch durch verschiedene Symbole gekennzeichnet werden. Wir setzen daher im Einklang mit unserer im ersten Abschnitt entwickelten Terminologie Folgendes fest:

1) Alle Ausartungen eines Gebildes Γ , welche hinsichtlich des Zerfallens und der Lage der Plücker'schen Oerter zu einander ein und dieselbe Definition erfüllen, werden durch ein gemeinsames Symbol zusammengefasst.

2) Ein Ausartungssymbol, z. B. a , bedeutet zugleich auch die *Zahl* derjenigen Ausartungen, welche, einem vorliegenden Systeme angehörig, die dem Symbole a zugehörige Definition erfüllen.

3) Das Symbol az , wo a eine b -stufige Ausartung, z eine $(a-b)$ -

fache Bedingung bedeutet, bezeichnet die *Zahl* derjenigen Ausartungen α , welche, einem a -stufigen Systeme angehörig, die Bedingung z erfüllen.

Herr Zeuthen hat in den Alm. Eg. nur *elementare* Systeme von Plancurven betrachtet, und deshalb auch nur die in ihnen vorkommenden Ausartungen, die er „ordinaires“ nennt, zu behandeln brauchen. Setzt man aber, wie es im Folgenden geschehen ist, fundamentale Systeme voraus, so wird die Zahl der zu berücksichtigenden Ausartungen bedeutend vergrößert. Wir theilen daher mit Rücksicht auf unsere Unterscheidung der elementaren und der singulären Bedingungen (§ 6., p. 20) die fundamentalen Ausartungen noch weiter ein, und zwar in *Gattungen* gemäss der folgenden Definition:

„Ist zur Bestimmung der sämtlichen Plücker'schen Oerter einer Ausartung ausser elementaren Bedingungen eine mindestens n -fache *singuläre* Bedingung erforderlich, so heisst diese Ausartung n -ter *Gattung*.“

Demgemäss deckt sich der Zeuthen'sche Begriff „gewöhnliche Ausartung“ mit unserm Begriff „Ausartung nullter Gattung.“ Die letzten drei der in Lindemann's Vorles. v. Clebsch auf p. 417 erwähnten 4 Ausartungen der C_3^3 können bei fester Ebene durch eine sechsfache elementare Bedingung nicht bestimmt werden. Eine fünffache *elementare* Bedingung bestimmt sie jedoch nicht vollständig. Es muss vielmehr ausser der fünffachen elementaren Bedingung noch eine einfache, auf die Singularitäten bezügliche Bedingung gegeben sein. Diese drei Ausartungen sind daher nicht nullter, sondern *erster Gattung*.

§ 34.

Die Berechnung der Ausartungsanzahlen im Allgemeinen.

Bei der Ableitung der Formeln zwischen a -fachen Bedingungen einerseits und den mit $(a-1)$ -fachen Bedingungen multiplicirten Ausartungssymbolen andererseits ist zu beachten, dass diejenigen Formeln allgemeiner und deshalb vorzuziehen sind, bei denen a *kleiner* ist, und bei denen das vorausgesetzte System *allgemeiner* ist, weil man dann mit recht vielen Bedingungen symbolisch multipliciren darf, und deshalb auch viele Beziehungen zwischen Anzahlen gewinnen kann. Wir werden daher bei der Aufsuchung der fundamentalen Anzahlen eines Gebildes vorzugsweise solche Formeln ableiten, welche die *einfachen* Bedingungen mit den Ausartungsanzahlen verknüpfen, und welche zugleich für *alle fundamentalen* Systeme gültig sind.

Wir setzen nun voraus, man kenne die genaue Beschreibung der sämtlichen fundamentalen Ausartungen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, welche in einem durch die Bedingung y definirten einstufigen Systeme vorkommen

können, und man habe ferner so viele für dieses System gültige Formeln entwickelt, dass daraus die einfache fundamentale Bedingung z als Function von den Ausartungszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ allein dargestellt werden kann. Dann kann man die Zahl der die zusammengesetzte Bedingung yz erfüllenden Gebilde berechnen, sobald man nur die Ausartungssymbole

$$y\alpha_1, y\alpha_2, \dots$$

zu berechnen vermag. Damit ist dann das Problem der Bestimmung der fundamentalen Anzahlen eines Gebildes Γ zurückgeführt auf das Problem der Bestimmung der fundamentalen Anzahlen seiner fundamentalen Ausartungen. Wir besprechen daher jetzt das letztgenannte Problem.

Die Ausartungen eines Gebildes Γ genügen einerseits der Definition des letztern hinsichtlich der Plücker'schen Gradzahlen vollkommen, nur dass ihre Constantenzahl durch das Ausarten um 1 verringert ist. Andererseits aber können sie doch immer wegen der auf ihnen vorhandenen neuen Coincidenzen oder des bei ihnen stattfindenden Zerfallens von Oertern so aufgefasst werden, als ob sie aus einfacheren Gebilden mit kleinerer Constantenzahl zusammengesetzt wären.

Für diese letztern oder jede beliebige, aus ihnen gebildete Gruppe wollen wir den Namen *Theilgebilde* einführen. So sind z. B. die Theilgebilde der sämtlichen fundamentalen Ausartungen:

- 1) des Kegelschnitts die drei Hauptelemente (§ 36.);
- 2) der Plancurve C_3^3 dieselbe wie bei 1) und ausserdem der Kegelschnitt (§ 41.);
- 3) der C_3^4 dieselben wie bei 2) und die C_3^3 (§ 53. u. 54.);
- 4) der C_3^6 dieselben wie bei 3) und die C_3^4 ;
- 5) der cubischen Raumcurve dieselben wie bei 4) und ausserdem die dem Kegelschnitt, der C_3^3 und der C_3^4 dualistisch entsprechenden Kegel;
- 6) des linearen Complexes der Strahl;
- 7) der linearen Congruenz die drei Hauptelemente und die lineare Congruenz mit unendlich nahen erzeugenden Axen.

Die genaue Beschreibung einer Ausartung α eines Gebildes Γ von der Constantenzahl c wird immer Aufschluss darüber geben, in welcher Weise α eine gewisse fundamentale Bedingung z zu erfüllen vermag. Im Allgemeinen wird man annehmen müssen, dass α dies sowohl dadurch vermag, dass ein α angehöriges Theilgebilde die Bedingung z_1 erfüllt, wie auch dadurch, dass dasselbe oder ein anderes Theilgebilde die Bedingung z_2 erfüllt, u. s. f. Dadurch spaltet sich die α auferlegte Bedingung z , und man hat:

$$\alpha z = \alpha z_1 + \alpha z_2 + \alpha z_3 + \dots$$

Berücksichtigt man dieses für jede Einzelbedingung, welche in einer

α zugeschriebenen $(c-1)$ -fachen Bedingung u steckt, so erhält man schliesslich αu ausgedrückt durch eine Summe von Anzahlen, deren jede von gewissen, als bekannt vorauszusetzenden Anzahlen der *Theilgebilde* abhängt. Dadurch reducirt sich die Bestimmung der fundamentalen Anzahlen einer Ausartung α auf die Bestimmung gewisser Anzahlen der auf α liegenden *Theilgebilde*. Zur Erläuterung einer solchen Reduction diene das folgende *Beispiel*.

Wie in der dritten Abhandlung näher besprochen werden soll, besitzt die cubische Raumcurve eine Ausartung ω von folgender Beschaffenheit. Die Punkte von ω bilden einen Kegelschnitt und eine Gerade N , welche diesen Kegelschnitt in einem Punkte R schneidet, der Tangentenort von ω wird durch die Tangenten jenes Kegelschnitts, und durch die Strahlen zweier zusammenfallender Strahlbüschel gebildet, deren Scheitel R ist, und deren Ebene durch N geht, dabei aber den Kegelschnitt berührt. Aus dieser Beschreibung folgt, dass die Bedingung v , die Raumcurve soll eine gegebene Gerade schneiden, sich für die ω spaltet, und zwar in die Bedingung n , dass die ω ihren *Kegelschnitt* die gegebene Gerade schneiden lässt, und in die Bedingung N , dass die ω ihre Gerade N die gegebene Gerade schneiden lässt. Daher ist:

$$v\omega = n\omega + N\omega.$$

Ferner folgt aus jener Beschreibung, dass die Bedingung q , die Raumcurve soll eine gegebene Ebene berühren, sich für ω spaltet, und zwar in die Bedingung r , dass der Kegelschnitt die gegebene Ebene berühre, in die Bedingung S , dass der eine der beiden oben erwähnten, zusammenfallenden Strahlbüschel einen in der gegebenen Ebene liegenden Strahl enthalte, und in die Bedingung S' , dass der andere der beiden zusammenfallenden Strahlbüschel einen in der gegebenen Ebene liegenden Strahl enthalte. Jede der beiden Bedingungen S und S' ist aber ersetzbar durch die Bedingung R , dass der Punkt R auf der gegebenen Ebene liege.

Also ist:

$$q\omega = r\omega + R\omega + R\omega = r\omega + 2R\omega.$$

Durch symbolische Multiplication erhält man aus dieser und der vorigen Formel alle Ausartungssymbole von der Form $\omega v^a q^{11-a}$ als Functionen der Symbole $\omega n^b r^c N^d R^{11-b-c-d}$, und damit die Berechnung der Ausartungszahlen ω zurückgeführt auf Anzahlen, die sich auf die *Theilgebilde* von ω , den Kegelschnitt und die drei Hauptelemente beziehen. Speciell ist:

$$\omega v^{10} q = \omega(n+N)^{10} (r+2R),$$

und hieraus erhält man, nach Weglassung aller Symbole, die gleich null sind,

$$\begin{aligned}\omega \nu^{10} \rho &= \omega [10_2 \cdot N^2 n^8 (2R)] \\ &+ \omega [10_3 \cdot N^3 n^7 (r+2R)] \\ &+ \omega [10_4 \cdot N^4 n^6 (r+2R)].\end{aligned}$$

Jedes der hier vorkommenden 5 Symbole lässt sich nun leicht durch die als bekannt (§ 36. u. 37.) vorausgesetzten, dem Kegelschnitt und dem Strahle angehörigen Anzahlen ausdrücken. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}\omega n^8 N^2 R &= 92 \cdot 2, \\ \omega n^7 r N^3 &= 2 \cdot 116 \cdot 2, \\ \omega n^7 R N^3 &= 2 \cdot 92, \\ \omega n^6 r N^4 &= 2 \cdot 116, \\ \omega n^6 R N^4 &= 2 \cdot 18,\end{aligned}$$

wo die fettgedruckten Zahlen 92, 116, 18 angeben, wieviel Kegelschnitte bezüglich

8 gegebene Gerade schneiden,

7 gegebene Gerade schneiden, und eine gegebene Ebene berühren,

6 gegebene Gerade schneiden, und durch einen gegebenen Punkt gehen.

Durch Substitution dieser Anzahlen erhält man schliesslich:

$$\omega \nu^{10} \rho = 180240.$$

In dem eben besprochenen Beispiele konnten wir $2R\omega$ statt $S\omega + S'\omega$ setzen, weil wegen der Coincidenz der beiden Strahlbüschel die Bedingungen S und S' für ω identisch waren. Analog kann man bei allen solchen Coincidenzen verfahren, und demnach folgenden Satz aussprechen:

„Wenn auf einer Ausartung α eines Gebildes Γ n Theilgebilde $e_1, e_2, e_3, \dots e_n$ in dem Gebilde e vereinigt zu denken sind, so ist die Γ zugeschriebene Bedingung, dass irgend eines dieser n Theilgebilde eine gewisse Bedingung z erfüllen soll, für die Ausartung gleich dem n -fachen der Bedingung, dass das Gebilde e dieselbe Bedingung erfüllen soll.“

Es mögen z. B. auf einer Ausartung α einer Planeurve n^{ter} Ordnung die Punkte n zusammenfallende Gerade bilden, es möge ν die Bedingung bedeuten, dass die Planeurve eine gegebene Gerade schneiden soll, und g die Bedingung bezeichnen, welche α dadurch erfüllt, dass die die n Geraden in sich vereinigende Gerade eine gegebene Gerade schneidet. Dann ist:

$$\nu \alpha = n \cdot g \alpha,$$

also auch:

$$\begin{aligned}\nu^2 \alpha &= n^2 \cdot g^2 \alpha, & \nu^3 \alpha &= n^3 \cdot g^3 \alpha, \\ \nu^4 \alpha &= n^4 \cdot g^4 \alpha, & \nu^5 \alpha &= 0, \text{ u. s. f.}\end{aligned}$$

Um bei der Beschreibung der Ausartungen der Plancurven und Raumcurven eine kurze Ausdrucksweise zu ermöglichen, führen wir einige Termini ein, welche sich an die in § 6., p. 21 gegebenen Festsetzungen über den Gebrauch der Wörter *Ordnung*, *Rang*, *Classe* anlehnen. Wir wollen nämlich bei ausgearteten Plancurven und Raumcurven die Theilgebilde des Punkorts *Ordnungscurooen*, die des Tangentenorts *Rangcurven* nennen. Ferner sollen die Theilgebilde des Orts der Schmiegungebenen einer ausgearteten Raumcurve *Classencurven* heissen. Sind diese Curven ersten Grades, so bezeichnen wir sie bezüglich mit den Namen *Ordnungsgerade*, *Rangbüschel*, *Classenaxe*. Der Scheitel des Rangbüschels soll *Rangpunkt*, seine Ebene *Rangebene* heissen. Bei einer Plancurve fällt jede Rangebene natürlich mit der Ebene der Curve zusammen, und man wird also dann, ohne Irrthum zu veranlassen, statt Rangbüschel auch nur *Rangpunkt* sagen dürfen („sommet“ bei Chasles und Zeuthen).

Mit Hülfe dieser Definition kann man einige Folgerungen aus dem Satze, welcher oben aus der Spaltung der Bedingungen bei Ausartungen abgeleitet ist, kurz so aussprechen:

„Eine Ausartung ist r -fach zu rechnen, wenn sie entweder

- a) eine r -fache Ordnungsgerade hat, und diese s gegebene Gerade schneidet, oder, wenn sie
- b) eine r -fache Classenaxe hat, und diese s gegebene Gerade schneidet, oder, wenn sie
- c) einen r -fachen Rangpunkt hat, und durch diesen s gegebene Ebenen gehen, oder, wenn sie
- d) eine r -fache Rangebene hat, und auf dieser s gegebene Punkte liegen, oder, wenn sie
- e) einen r -fachen Rangbüschel hat, und diesem s gegebene Tangenten angehören.“

Aus den voranstehenden allgemeinen Erörterungen über die Berechnung eines Ausartungssymbols αu geht hervor, dass dieselbe nur unter den folgenden beiden Voraussetzungen möglich ist.

1) Man muss über die Natur der Ausartung α so genau Bescheid wissen, dass man angeben kann, in welcher Weise jede der in u steckenden Einzelbedingungen durch α erfüllt wird. Denn dann kann man die gesuchte Zahl αu als Function von Anzahlen darstellen, die den Theilgebilden von α angehören.

2) Man muss diese letztern, den Theilgebilden angehörigen Anzahlen schon kennen.

Die zweite Voraussetzung kann man durch einen systematischen Gang der Untersuchung erfüllen, indem man von einfachen Gebilden mit kleiner Constantenzahl allmählich aufsteigt zu höheren Gebilden

mit grösserer Constantenzahl. So erfordert die Berechnung der Ausartungssymbole der cubischen Raumcurve die Kenntniss vieler Anzahlen, welche den cubischen Plancurven dritten und vierten Ranges angehören. So hat die Berechnung der auf cubische Flächen bezüglichen Anzahlen mit der Berechnung der Anzahlen zu beginnen, welche der Cayley'schen Regelfläche angehören.

Die erste der beiden Voraussetzungen aber ist schwerer zu erfüllen. Zwar werden bei jedem Gebilde *gewisse* Ausartungen immer von vornherein leicht erkannt werden können, aber durchaus nicht alle. Es ist selten möglich, aus den analytischen Darstellungen eines Gebildes die genaue Beschreibung *aller* seiner Ausartungen abzuleiten. Zum Glück aber giebt die Möglichkeit der Berechnung *einer und derselben Anzahl aus mehreren ganz verschiedenen Gruppen von Ausartungssymbolen* Mittel genug an die Hand, um über die Art und Weise der Erfüllung einer Bedingung durch eine Ausartung, und damit auch über die eigenthümliche Verkettung der Plücker'schen Oerter auf ihr, genauen Aufschluss zu erhalten. Eine derartige Auffindung der genauen Definition einer Ausartung wollen wir *aposteriorisch* nennen. Freilich ist man oft im Stande, sich *einige* Kenntniss über Ausartungen eines Gebildes dadurch zu verschaffen, dass man dieselben aus dem allgemeinen Gebilde durch eine gewisse *Abbildung* (§ 41.) erzeugt. Ausserdem aber werden immer noch Bestimmungen *aposteriori* nothwendig sein. Namentlich wird man die Sicherheit, dass *keine Ausartung vergessen ist*, nicht anders als *aposteriori* erlangen können.

§ 35.

Ausdehnung der Anzahlen-Bestimmung von Plancurven in fester Ebene auf Plancurven im Raume.

Herr Zeuthen hat in den Alm. Eg. Nr. 24 Formeln angegeben, welche für ein zu Grunde gelegtes einstufiges System von Plancurven *in fester Ebene* die einfachen Grundbedingungen mit den Anzahlen gewisser im System vorhandener Ausartungen verbinden. Da diese Formeln allgemeingültig werden, sobald man nur den rechten Seiten die Vielfachen der noch nicht berücksichtigten Ausartungen hinzufügt, so bilden sie *das Fundament für den Formelapparat*, welcher zur Bestimmung aller fundamentalen Anzahlen jeder beliebigen Plancurve nach der Chasles-Zeuthen'schen Methode nothwendig ist. Wir geben in diesem Paragraphen nur die auch von Zeuthen schon kurz angedeutete *Erweiterung* dieser Formeln *von Plancurven in bestimmter Ebene auf Plancurven in nicht bestimmter Ebene*.

Wir bezeichnen mit μ , μ^2 , μ^3 die Bedingung, dass die Ebene der Plancurve bezüglich durch einen gegebenen Punkt geht, durch eine gegebene Gerade geht, gegeben ist. Dann kann man sagen, dass die

Zeuthen'schen Formeln aus den hier entwickelten durch sbl. Mult. mit μ^3 hervorgehen.

Jede der Zeuthen'schen Formeln folgt aus einer oder mehreren Anwendungen des Chasles'schen Correspondenzprinzips in der Punktaxe oder im Strahlbüschel. Wir setzen nun bei einem räumlichen Plancurvsystem als die Träger der Correspondenz statt der Punktaxe und des Strahlbüschels bezüglich einen Strahlbüschel und einen Ebenenbüschel. Dann erhalten wir bei analoger Bezeichnung dieselben Formeln, wie Herr Zeuthen, *nur dass wir* auf der linken Seite jeder aus dem Correspondenzprincip im Strahlbüschel resultirenden Formel *ein gewisses Vielfaches der Bedingung, welche wir oben μ genannt haben, subtrahiren müssen*. Da eine Wiederholung der Zeuthen'schen Formeln in ihrer vollen Gestalt wegen der vielen Symbole, die dann definirt werden müssten, zu viel Raum kosten würde, so beschränken wir uns darauf, die eben genannten Vielfachen von μ hier anzugeben, und zwar jedes *hinter derselben Nummer*, welche Zeuthen an der citirten Stelle vor die zugehörige Formel gesetzt hat. Für diejenigen Leser, denen die Alm. Eg. nicht zugänglich sein sollten, sei bemerkt, dass dieselben auch in Lindemann's „Vorl. v. Clebsch“ p. 413–415 angegeben sind, und dass die hier *nachgesetzten Nummern* die Nummern der Formeln bei Lindemann sind. Wie bei Zeuthen bedeutet

n die Ordnung der Plancurve,

n' ihr Rang,

d die Zahl der Doppelpunkte,

d' die Zahl der Doppeltangenten,

e die Zahl der Spitzen,

e' die Zahl der Wendetangenten.

Tabelle der den Zeuthen'schen Formeln hinzuzufügenden Vielfachen von μ .

3) $n(n-1)$,	14) 3' 0,
4) 0,	15) 4' nd' ,
5) 0,	16) 5' ne' ,
6) 0,	17) 6' $d(d'-1)$,
7) 0,	19) 7' $e'd'$,
8) 0,	18) 8' $e'(e'-1)$,
9) $n'(n-2)$,	20) 9' $n'(n'-2)$,
10) $d(n-2)$,	21) 10' $d'(n'-2)$,
11) $e(n-2)$,	22) 11' $e'(n'-2)$,
12) $n'(n-2)(n-3)$,	23) 12' $n(n'-2)(n'-3)$,
13) $d(n-2)(n-3)$,	24) 13' $d'(n'-2)(n'-3)$,

14) $e(n-2)(n-3).$	25) $14') \quad e'(n'-2)(n'-3).$
15) $2d(2d-1).$	15') $0.$
16) $2n'.$	16') $n^2.$
22) $2nd.$	
23) $ne.$	
24) $n \cdot \frac{1}{2} d(d-1).$	
25) $nde.$	
26) $n \cdot \frac{1}{2} e(e-1).$	

Beispielsweise leiten wir die linke Seite der Formel 14) ab. Dabei wollen wir jedoch, der Kürze wegen, nicht das Correspondenzprincip in seiner ursprünglichen Gestalt, sondern die Punktpaarformel anwenden, welche aus der Punktpaarformel erster Dimension (§ 16., I) durch sbl. Mult. mit g hervorgeht, also:

$$c^2 + d^2 + g_e - g_p = \varepsilon g.$$

Es bezeichne v die Bedingung, dass die Plancurve n^{ter} Ordnung mit e Spitzen eine gegebene Gerade schneide, c die Bedingung, dass irgend eine ihrer e Spitzen auf einer gegebenen Ebene liege. Wir denken uns nun durch jede Spitze jeder Curve des einstufigen Systems alle möglichen in der Curvebene liegenden Geraden gezogen. Jede dieser Geraden bestimmt noch $n-2$ weitere Schnittpunkte, und je zwei dieser letztern fassen wir als Punktpaar zusammen. Dann giebt es von solchen Punktpaaren auf jeder Curve ein einstufiges System, im Curvensysteme also ein zweistufiges System. Auf dieses System wenden wir die obige Formel an. Dann ist zu setzen:

$$c^2 = d^2 = v \cdot e(n-3), \quad g_e = c(n-2)(n-3), \quad g_p = \mu \cdot e(n-2)(n-3),$$

so erhalten wir als linke Seite von Formel 14):

$$2v \cdot e(n-3) + c(n-2)(n-3) - \mu \cdot e(n-2)(n-3).$$

Wir fassen nun die oben angegebenen Erweiterungen der Zeuthen'schen Formeln auf Plancurven im Raume zusammen mit dem Satze, welcher am Schluss des § 10. ausgesprochen ist. Dann erhalten wir das folgende wichtige Resultat:

„Kennt man bei irgend einer Plancurve die Formeln zwischen den Grundbedingungen und den Ausartungssymbolen, sowie die Ausartungen selbst so vollständig, dass man dadurch die fundamentalen Anzahlen *bei fester Ebene* berechnen kann, so braucht man nur noch zu den Formeln gewisse Vielfache der Bedingung μ hinzuzufügen, und die allgemeinen Formeln des § 10. genügend zu berücksichtigen, um auch den Weg zur Bestimmung *aller* fundamentalen Anzahlen derselben Plancurve *bei beweglicher Ebene* zu erhalten.“

Die folgenden Untersuchungen setzen demgemäss meist von vornherein Plancurven im Raume voraus.

§ 36.

Die charakteristischen Anzahlen des Kegelschnitts.

Wir streben nach der Berechnung der fundamentalen Anzahlen der cubischen Plancurve C_3^3 mit Spitze (Abschnitt V). Die Theilgebilde der Ausartungen der C_3^3 bestehen aber aus Punkten, Ebenen, Strahlen und Kegelschnitten. Wir haben daher zunächst zu prüfen, ob uns die Anzahlen bekannt sind, welche sich auf die so zusammengesetzten Gebilde beziehen. Diese Anzahlen lassen sich sämmtlich ausdrücken durch die *elementaren Anzahlen des Kegelschnitts* und die *axiomatischen Anzahlen* vom Werthe 1, welche angeben, wie vieldeutig die Hauptelemente durch fundamentale Bedingungen bestimmt sind, z. B., wie viel Ebenen durch einen gegebenen Punkt und eine gegebene Gerade gehen. Wir beschäftigen uns daher mit den elementaren Kegelschnittanzahlen. Dieselben sind zuerst von Chasles (Comptes rendus 1867) angegeben. Nach der oben erörterten Methode erhält man sie ohne Schwierigkeit, da der Kegelschnitt nur zwei Ausartungen δ und ε besitzt, und da deren Theilgebilde nur aus Hauptelementen bestehen.

Die Ausartung δ besteht aus zwei Ordnungsgeraden, welche sich in einem doppelten Rangpunkte schneiden, die Ausartung ε besteht aus einer doppelten Ordnungsgeraden, auf welcher zwei einfache Rangpunkte liegen.

Wie immer bei Plancurven, bezeichnen μ , ν , ϱ bezüglich die Bedingungen, dass die Curve ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicke, eine gegebene Gerade schneide, eine gegebene Ebene berühre. Die 3 Zahlen μ , ν , ϱ sind mit den beiden Zahlen δ und ε durch zwei für jedes einstufige System gültige Gleichungen verbunden, welche aus Nr. 3 und Nr. 3' der auf den Raum erweiterten Zeuthen'schen Formeln (§ 35.) folgen, nämlich:

$$2\nu - \varrho - 2\mu = \varepsilon,$$

$$2\varrho - \nu = \delta,$$

woraus folgt:

$$\nu = \frac{1}{3}(2\varepsilon + \delta + 4\mu),$$

$$\varrho = \frac{1}{3}(\varepsilon + 2\delta + 2\mu).$$

Alle übrigen Zeuthen'schen Formeln geben für den Kegelschnitt $0=0$.

Die beiden, eben angegebenen Gleichungen reichen aus, um die Kegelschnittzahlen $\mu^m \nu^n \varrho^r$, ($m+n+r=8$) aus den Ausartungsanzahlen

$$\delta \mu^m \nu^n \varrho^r \text{ und } \varepsilon \mu^m \nu^n \varrho^r, (m+n+r=7)$$

zu berechnen. Als Beispiel für die Berechnung der Ausartungsanzahlen selbst mögen dienen:

$$\delta v^6 \rho = 2^1 \cdot [6_1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6_3 \cdot 2 \cdot 2] = 140,$$

$$\delta \mu^2 v^3 \rho^2 = 2^2 \cdot [3_2 \cdot 2] = 24,$$

$$\varepsilon \mu v^2 \rho^4 = 2^2 \cdot [4_3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4_4 \cdot 2] = 40.$$

Im letzten Beispiel steht der Coefficient 2^2 , weil eine *doppelte* Ordnungsgerade zwei gegebene Gerade schneidet (§ 34.); die Combinationszahlen 4_3 resp. $\frac{1}{2} \cdot 4_2$ geben an, auf wie vielfache Weise sich 4 Ebenen zu 3 und 1 resp. zu 2 und 2 gruppieren lassen; die fettgedruckte Zahl 2 ist die Zahl der Geraden, welche 4 gegebene Geraden schneiden.

Liegen nun die elementaren Ausartungssymbole berechnet vor, so bestimmt man vermittelst der obigen Formeln zunächst die Zahlen v und ρ der Systeme, welche $\mu^3 v^n \rho^r$, ($n+r=4$), als definirende Bedingung enthalten, weil bei diesen $\mu=0$ ist. So gewinnt man die 6 Anzahlen $\mu^3 v^n \rho^r$, ($n+r=5$). Diese geben dann die Zahlen μ für die Systeme $\mu^2 v^n \rho^r$, ($n+r=5$). Mit ihrer Hülfe erhält man aus jenen Formeln die Anzahlen $\mu^2 v^n \rho^r$, ($n+r=6$). In derselben Weise gelangt man von diesen Anzahlen zu den 8 Anzahlen $\mu v^n \rho^r$, ($n+r=7$), und endlich von den letztgenannten zu den 9 Anzahlen $v^n \rho^r$, ($n+r=8$). So erhält man jede elementare Kegelschnittanzahl, bei der sowohl n wie r von null verschieden ist, *zweimal*, nämlich aus einem System als Zahl v , aus einem andern Systeme als Zahl ρ . Eine solche mehrfache Bestimmung einer und derselben Anzahl aus verschiedenen Ausartungsanzahlen ist durch unsere Abzählungsmethode oft ermöglicht, und kann dann einerseits zur Controle der Rechnung, andererseits auch zu einem Rückschlusse über die Beschaffenheit der Ausartungen ausgenutzt werden.

Die Kegelschnittzahlen $\mu^n v^n \rho^r$ sind schon mehrfach publicirt (in deutschen Journalen jedoch nur durch des Verfassers Abhandlung in Crelle-Borch. Journal, Bd. 71). Wir wiederholen sie hier zur Bequemlichkeit der Leser, weil sie später fortwährend benutzt werden.

Tabelle der charakteristischen Kegelschnittanzahlen.

			$v^8 = 92$
		$\mu v^7 = 34$	$v^7 \rho = 116$
	$\mu^2 v^6 = 8$	$\mu v^6 \rho = 52$	$v^6 \rho^2 = 128$
$\mu^3 v^5 = 1$	$\mu^2 v^5 \rho = 14$	$\mu v^5 \rho^2 = 76$	$v^5 \rho^3 = 104$
$\mu^3 v^4 \rho = 2$	$\mu^2 v^4 \rho^2 = 24$	$\mu v^4 \rho^3 = 72$	$v^4 \rho^4 = 64$
$\mu^3 v^3 \rho^2 = 4$	$\mu^2 v^3 \rho^3 = 24$	$\mu v^3 \rho^4 = 48$	$v^3 \rho^5 = 32$
$\mu^3 v^2 \rho^3 = 4$	$\mu^2 v^2 \rho^4 = 16$	$\mu v^2 \rho^5 = 24$	$v^2 \rho^6 = 16$
$\mu^3 v \rho^4 = 2$	$\mu^2 v \rho^5 = 8$	$\mu v \rho^6 = 12$	$v \rho^7 = 8$
$\mu^4 \rho^5 = 1$	$\mu^2 \rho^6 = 4$	$\mu \rho^7 = 6$	$\rho^8 = 4$

§ 37.

Die sonstigen, im Folgenden benutzten Kegelschnittanzahlen.

Ausser μ , ν , ϱ hat der Kegelschnitt, wie jede Plancurve, noch folgende 4 elementare Bedingungen:

P , durch einen Punkt zu gehen,

ϱ' , eine Tangente durch einen gegebenen Punkt zu schicken,

t , einen Strahl eines gegebenen Strahlbüschels zu berühren,

T , einen gegebenen Strahl zu berühren,

Diese 4 Bedingungen lassen sich bei jeder Plancurve durch μ , ν , ϱ ausdrücken, gemäss den Incidenz-Formeln des § 10. (p. 36). Man hat in unserem Falle $a = 2$ zu setzen, und erhält die Moduln:

$$P = \mu\nu - 2\mu^2,$$

$$\varrho' = 2\mu,$$

$$t = \mu\varrho,$$

$$T = \mu^2\varrho - 2\mu^3.$$

Hieraus erhält man von Anzahlen, die nicht schon aus der Tabelle des § 36. unmittelbar ersichtlich sind, nur noch folgende.

Tabelle der Zahlen $P\nu^n\varrho^r$, $P\mu\nu^n\varrho^r$, $P^2\nu^n\varrho^r$ und $T\nu^n\varrho^r$.

$P\nu^6 = 18$			
$P\nu^5\varrho = 24$	$P\mu\nu^5 = 6$		$T\nu^5 = 12$
$P\nu^4\varrho^2 = 28$	$P\mu\nu^4\varrho = 10$	$P^2\nu^4 = 4$	$T\nu^4\varrho = 20$
$P\nu^3\varrho^3 = 24$	$P\mu\nu^3\varrho^2 = 16$	$P^2\nu^3\varrho = 6$	$T\nu^3\varrho^2 = 16$
$P\nu^2\varrho^4 = 16$	$P\mu\nu^2\varrho^3 = 16$	$P^2\nu^2\varrho^2 = 8$	$T\nu^2\varrho^3 = 8$
$P\nu\varrho^5 = 8$	$P\mu\nu\varrho^4 = 12$	$P^2\nu\varrho^3 = 8$	$T\nu\varrho^4 = 4$
$P\varrho^6 = 4$	$P\mu\varrho^5 = 6$	$P^2\varrho^4 = 8$	$T\varrho^5 = 2$

Um alle für die späteren Berechnungen nothwendigen Kegelschnittanzahlen zu gewinnen, haben wir ausser den elementaren Bedingungen noch diejenigen Bedingungen zu berücksichtigen, welche sich für eine Plancurve dadurch ergeben, dass *das aus einer Tangente und ihrem Berührungspunkte bestehende Gebilde* alle möglichen Grundbedingungen erfüllt. Ist g die Tangente, c ihr Berührungspunkt, so hat dieses Gebilde die folgenden mehrfachen Grundbedingungen:

$$\begin{aligned} c^2, & \quad cg, \quad g_p, \quad g_c, \\ c^3, & \quad cg, \quad cg_p, \quad cg_c, \quad g_s, \\ c^2g, & \quad c^2g_p, \quad c^2g_s, \quad cg_s, \quad G, \\ c^3g_p, & \quad c^2g_s, \quad cG. \end{aligned}$$

Durch die allgemeinen Lageformeln des § 9. lassen sich auf gewisse

dieser Symbole alle übrigen zurückführen, so dass nur folgende übrig bleiben:

$$\begin{aligned} c^2, & \quad g_p, g_e, \\ c^3, & \quad c g_e, g_s, \\ c^2 g_e, & \quad G, \\ c G. & \end{aligned}$$

Nun ergeben aber $c^2, g_p, g_e, c^3, g_s, G$ dem Kegelschnitte Bedingungen, welche schon oben betrachtet sind, nämlich:

c^2 giebt ν , g_p giebt ρ' , g_e giebt ρ , c^3 giebt P , g_s giebt t , G giebt T .
So bleiben nur noch die Symbole

$$c g_e, c^2 g_e, c G$$

übrig, welche dem Kegelschnitt bezüglich die Bedingungen liefern:

- 1) x , dass er eine Ebene in einem Punkte einer auf ihr gegebenen Geraden berühre,
- 2) y , dass er eine Ebene in einem auf ihr gegebenen Punkte berühre,
- 3) z , dass er eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühre.

Die elementaren Moduln von x, y, z erhält man durch das Princip von der Erhaltung der Anzahl, wie folgt,

1) Man betrachte die zusammengesetzte Bedingung $\nu \rho$, und lege die Gerade von ν in die Ebene von ρ . Dann wird $\nu \rho$ zweimal von jedem Kegelschnitt erfüllt, welcher die Ebene von ρ in einem Punkte der Geraden von ν berührt, d. h., welcher die Bedingung x erfüllt. Bei Curven höherer Ordnung könnte $\nu \rho$ auch noch in anderer Weise erfüllt werden, bei Kegelschnitten jedoch nicht. Also ist:

$$(1) \quad x = \frac{1}{2} \nu \rho.$$

In ähnlicher Weise erhält man:

$$(2) \quad \begin{aligned} y &= \frac{1}{2} P \rho \quad \text{oder} \\ y &= \frac{1}{2} (\mu \nu - 2 \mu^2) \rho = \frac{1}{2} \mu \nu \rho - \mu^2 \rho. \end{aligned}$$

3) Man betrachte die zusammengesetzte Bedingung μy , und lege den Punkt von μ in die Ebene von y . Dann wird μy erstens von jedem Kegelschnitt erfüllt, welcher in der Ebene von y liegt, und dabei durch den Punkt von y geht, welcher also $\mu^3 \nu$ erfüllt, zweitens aber auch von jedem Kegelschnitt, welcher die Verbindungslinie des Punktes von μ mit dem Punkte von y in letzterem berührt, d. h., welcher z erfüllt. Also ist:

$$(3) \quad \begin{aligned} z &= \mu y - \mu^3 \nu \quad \text{oder} \\ z &= \mu \left(\frac{1}{2} \mu \nu \rho - \mu^2 \rho \right) - \mu^3 \nu = \frac{1}{2} \mu^2 \nu \rho - \mu^3 \nu - \mu^3 \rho. \end{aligned}$$

Aus den Incidenzformeln des § 9. erhält man nun die Moduln aller Bedingungen, die ausserdem noch berücksichtigt werden sollten.

So folgen aus den 4 Formeln:

$$\begin{aligned}cg &= c^2 + g_e, \\cg_p &= c^3 + g_s, \\c^2g &= c^3 + cg_e, \\cg_s &= c^2g_p + G\end{aligned}$$

bezüglich die folgenden 4 Resultate:

4) Die Bedingung, ein Kegelschnitt soll eine Ebene so schneiden, dass die Tangente des Schnittpunkts eine gegebene Gerade schneidet, hat den Modul:

$$v + \varrho.$$

5) Die Bedingung, ein Kegelschnitt soll eine Ebene so schneiden, dass die Tangente des Schnittpunkts durch einen gegebenen Punkt geht, hat den Modul:

$$P + t = \mu v + \mu \varrho - 2\mu^2.$$

6) Die Bedingung, ein Kegelschnitt soll eine Gerade so schneiden, dass die Tangente des Schnittpunkts eine gegebene Gerade schneidet, hat den Modul:

$$P + x = \frac{1}{2}v\varrho + \mu v - 2\mu^2.$$

7) Die Bedingung, ein Kegelschnitt soll eine Ebene so berühren, dass der Berührungspunkt auf einer in der Ebene gegebenen Geraden liegt, während die zugehörige Tangente durch einen in der Ebene gegebenen Punkt geht, hat den Modul:

$$T + y = \frac{1}{2}\mu v \varrho - 2\mu^3.$$

Ein Theil der eben angegebenen Moduln ist von Halphen im Bull. de la Soc. math. de Fr. Bd. 2, p. 26 angegeben, ein Theil der darauf bezüglichen Anzahlen schon von Chasles in den Comptes rendus des Jahres 1867 zusammengestellt.

Beachtenswerth ist, dass ausser den elementaren Bedingungen P, ϱ', t, T auch die unter 4) und 5) genannten Bedingungen bei jeder Plancurve *elementare* Moduln besitzen, während die fünf ausserdem behandelten Bedingungen nur beim Kegelschnitt diese Eigenschaft haben.

Beispielsweise berechnen wir mit Hülfe des Moduls von z die Zahlen

$$zv^r \varrho^r, (n+r=4),$$

und erhalten:

$$zv^4 = 4, \quad zv^3\varrho = 6, \quad zv^2\varrho^2 = 4, \quad zv\varrho^3 = 2, \quad z\varrho^4 = 1.$$

Die obigen Moduln werden später bei der Berechnung der Ausartungen,

welche Kegelschnitte zu Theilgebilden haben, fortwährend benutzt; und zwar sollen dann, der bessern Uebersicht wegen, nur die hier und in § 36. numerisch gegebenen 59 Zahlen wirklich geschrieben werden, die übrigen Zahlen dagegen in nicht ausgerechneter Form durch die Moduln dargestellt werden.

V. Abschnitt.

Die cubische Plancurve mit Spitze.

§ 38.

Die fundamentalen Einzelbedingungen der C_3^3 und die Beziehungen zwischen ihnen.

Wir steuern jetzt darauf hin, nach der im IV. Abschnitt auseinandergesetzten Methode alle fundamentalen Anzahlen der C_3^3 zu bestimmen. Wir stellen daher zunächst die schon in § 6. beispielsweise angegebenen *fundamentalen Einzelbedingungen* dieser Curve zusammen. Dieselben zerfallen in *elementare* und *singuläre*, die elementaren Einzelbedingungen wieder in *wesentliche* und *unwesentliche* (§ 10., p. 37). Die drei wesentlichen sind:

μ = die Ebene der C_3^3 soll durch einen gegebenen Punkt gehen;

ν = die C_3^3 soll eine gegebene Gerade schneiden;

ρ = die C_3^3 soll eine gegebene Ebene berühren.

Durch diese Bedingungen lassen sich die unwesentlichen elementaren Bedingungen mittelst der Incidenzformeln des § 10. (p. 36 unten) ausdrücken. Man erhält, da Ordnung und Rang der C_3^3 gleich 3 sind, folgendes Resultat.

1) Die Bedingung μ_ρ , die C_3^3 soll ihre Ebene durch eine gegebene Gerade schicken, hat den Modul:

$$\mu_\rho = \mu^2.$$

2) Die Bedingung M , die C_3^3 soll in einer gegebenen Ebene liegen, hat den Modul:

$$M = \mu^3.$$

3) Die Bedingung P , die C_3^3 soll durch einen gegebenen Punkt gehen, hat den Modul:

$$P = \mu \nu - 3\mu^2.$$

4) Die Bedingung ρ' , die C_3^3 soll eine Tangente durch einen gegebenen Punkt schicken, hat den Modul:

$$\rho' = 3\mu.$$

5) Die Bedingung t , die C_3^3 soll eine Tangente in einem gegebenen Strahlbüschel besitzen, hat den Modul:

$$t = \mu \rho.$$

6) Die Bedingung T , die C_3^3 soll eine gegebene Gerade berühren, hat den Modul:

$$T = \mu^2 \rho - 3 \mu^3.$$

Hiernach brauchen bei der Bestimmung der Fundamentalzahlen der C_3^3 von den elementaren Bedingungen nur

$$\mu, \nu, \rho$$

und die aus ihnen zusammengesetzten Bedingungen berücksichtigt zu werden.

Die Symbole der singulären Einzelbedingungen der C_3^3 ergeben sich nach der Bezeichnungsregel in § 5., p. 19, wenn wir festsetzen, dass immer bezeichnet werden soll mit

c die Spitze,

v der Wendepunkt,

y der Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente,

w die Wendetangente,

q die Rückkehrtangente,

z die Verbindungsgerade von Spitze und Wendepunkt.

Die eben genannten 3 Punkte und 3 Strahlen bilden die Ecken und Seiten eines Dreiecks, welches wir das *Singularitätendreieck* nennen wollen. Demselben gehören, den obigen Bezeichnungen gemäss, folgende *singuläre Einzelbedingungen* an:

a) *wesentliche*:

$$c, c_g, v, v_g, y, y_g, w, w_e, q, q_e, z, z_e;$$

b) *unwesentliche*:

$$C, V, Y, w_p, w_s, W, q_p, q_s, Q, z_p, z_s, Z.$$

Natürlich gelten für jede Ecke und jede Seite des Singularitätendreiecks die in § 8. gegebenen Beziehungen zwischen den Grundbedingungen eines Hauptelementes, also z. B.

$$v_g = v^2, \quad ww_e = w_s, \quad q^2 = q_p + q_e, \quad C = c^3.$$

Für c_g, v_g, y_g werden wir daher immer bezüglich c^2, v^2, y^2 , und für C, V, Y bezüglich c^3, v^3, y^3 schreiben. Dagegen darf für w_e, q_e, z_e nur dann w^2, q^2, z^2 geschrieben werden, wenn eine feste Ebene vorausgesetzt, d. h. mit μ^3 symbolisch multiplicirt ist. Nach den Incidenzformeln lassen sich die unwesentlichen singulären Bedingungen durch die wesentlichen ausdrücken, wie hier folgt (§ 10., p. 36):

$$c^3 = \mu c^2 - \mu^2 c + \mu^3,$$

$$v^3 = \mu v^2 - \mu^2 v + \mu^3,$$

$$y^3 = \mu y^2 - \mu^2 y + \mu^3,$$

$$w_p = \mu w - \mu^2,$$

$$q_p = \mu q - \mu^2,$$

$$\begin{aligned}
x_p &= \mu x - \mu^2, \\
w_s &= \mu w_e - \mu^3, \\
q_s &= \mu q_e - \mu^3, \\
z_s &= \mu z_e - \mu^3, \\
W &= \mu^2 w_e - \mu^3 w, \\
Q &= \mu^2 q_e - \mu^3 q, \\
Z &= \mu^2 z_e - \mu^3 z.
\end{aligned}$$

So ist das Problem der Bestimmung *aller* fundamentalen Anzahlen der C_3^3 zurückgeführt auf das Problem, alle diejenigen zehnfachen Symbole numerisch zu bestimmen, welche aus den Potenzen von μ , ν , ϱ und aus den Bedingungen

$$c, c^2, v, v^2, y, y^2, w, w_e, q, q_e, z, z_e$$

zusammengesetzt sind.

Doch kann die Zahl der zu berechnenden Symbole noch weiter reducirt werden. Man beachte nämlich, dass jede Ecke des Singularitätendreiecks auf jeder von zwei Seiten desselben liegt, und wende dann die Incidenzformeln an, welche die Grundbedingungen eines Strahls mit denen eines in dem Strahle liegenden Punktes verbinden (§ 9, I.). Dadurch erhält man:

$$\begin{aligned}
cq &= c^2 + q_e, \\
cz &= c^2 + z_e, \\
vz &= v^2 + z_e, \\
vw &= v^2 + w_e, \\
yw &= y^2 + w_e, \\
yq &= y^2 + q_e,
\end{aligned}$$

und ausserdem alle Formeln, welche aus diesen durch symbolische Multiplicationen und geeignete Eliminationen hervorgehen, z. B.

$$\begin{aligned}
cq_p &= c^3 + q_e, \\
v^2 w_p &= v^3 w + W.
\end{aligned}$$

§ 39.

Die durch ein einstufiges Curvensystem gebildeten Paare von Punkten und Strahlen.

Um Formeln erster Dimension für die C_3^3 zu gewinnen, setzen wir ein ganz beliebiges, *einstufiges*, fundamentales System von Curven C_3^3 voraus, und betrachten die in demselben liegenden Systeme derjenigen einer und derselben Curve zugehörigen 25 Hauptelementenpaare, welche in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind. Die jedem Paare nachgesetzte römische Nummer bezeichnet die Stufe des

Systems, welches von dem Paare in einem einstufigen Curvensysteme erzeugt wird.

Tabelle der 25 Paare.

- 1) Punkt c und Punkt v , I.
- 2) Strahl w und Strahl q , I.
- 3) v und y , I.
- 4) q und z , I.
- 5) y und c , I.
- 6) z und w , I.
- 7) c und ein Curvenpunkt, II.
- 8) w und eine Tangente, II.
- 9) v und ein Curvenpunkt, II.
- 10) q und eine Tangente, II.
- 11) y und ein Curvenpunkt, II.
- 12) z und eine Tangente, II.
- 13) Ein Curvenpunkt und der einfache Schnittpunkt der in ihm berührenden Tangente, II.
- 14) Eine Tangente und die von ihrem Berührungspunkt ausgehende andere Tangente, II.
- 15) Zwei Curvenpunkte, III.
- 16) Zwei Tangenten, III.
- 17) c und eine Tangente, II.
- 18) w und ein Curvenpunkt, II.
- 19) v und eine Tangente, II.
- 20) q und ein Curvenpunkt, II.
- 21) y und eine Tangente, II.
- 22) z und ein Curvenpunkt, II.
- 23) c und w , I.
- 24) v und q , I.
- 25) y und z , I.

Die ersten 22 der hier aufgezählten Paare sind so beschaffen, dass jedes mit einer geraden Nummer versehene *dem vorangehenden feld-dualistisch**) entspricht. Die 3 letzten Paare dagegen entsprechen sich *selbst* feld-dualistisch.

*) Ich möchte im Anschluss an die in § 4. eingeführte Terminologie *feld-dualistisch* diejenige dualistische Verwandtschaft nennen, welche in einer Ebene zwischen ihrem Punktfelde und ihrem Strahlenfelde besteht, *bündel-dualistisch* diejenige, welche in einem Punkte zwischen seinem Ebenenbündel und seinem Strahlenbündel besteht, *raum-dualistisch* oder dualistisch schlechthin diejenige, welche im Raume zwischen seinem Punktraume und seinem Ebenenraume besteht.

Auf jedes der von den 25 Paaren erzeugten 25 Systeme soll eine von den Formeln angewendet werden, welche im III. Abschnitt aus dem Chasles'schen Correspondenzprincip abgeleitet sind. Welche Formeln jedesmal anzuwenden sind, ist aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich, bei welcher die Bezeichnung des III. Abschnitts benutzt ist.

a) Auf die einstufigen Systeme von Punktpaaren, also auf 1), 3), 5) ist anzuwenden die Punktpaarformel erster Dimension, also

$$c + d - g = \varepsilon \quad (\S 16., I.).$$

b) Auf die zweistufigen Systeme von Punktpaaren, also auf 7), 9), 11), 13) ist anzuwenden die Formel, welche aus der Formel bei a) durch Multiplication mit g hervorgeht, also

$$c^2 + d^2 + g_e - g_p = \varepsilon g.$$

c) Auf das dreistufige System von Punktpaaren, also auf 15), ist anzuwenden die Formel, welche aus der Formel bei a) durch Multiplication mit g_e hervorgeht, also

$$c g_e + d g_e - g_s = \varepsilon g_e.$$

d) Auf die einstufigen Systeme von Strahlenpaaren, also auf 2), 4), 6) ist anzuwenden die Strahlenpaarformel erster Dimension für zwei sich schneidende Strahlen, also

$$g\sigma + h\sigma - \mu\sigma - c\sigma = \varepsilon\sigma \quad (\S 20., I.).$$

e) Auf die zweistufigen Systeme von Strahlenpaaren, also auf 8), 10), 12), 14) ist anzuwenden die Formel, welche aus der Formel bei d) durch Multiplication mit c hervorgeht, also

$$g_e\sigma + h_e\sigma + c^2\sigma - \mu c\sigma = \varepsilon\sigma c.$$

f) Auf das dreistufige System von Strahlenpaaren, nämlich auf 16) ist anzuwenden die Formel, welche aus der Formel bei e) durch Multiplication mit c hervorgeht, also

$$c g_e\sigma + c h_e\sigma + \mu^3\sigma - \mu^2 c\sigma = \varepsilon\sigma c^2.$$

g) Auf die einstufigen Systeme der aus Punkt und Strahl bestehenden Paare, also auf 23), 24), 25) ist die in § 23., Nr. 4. für solche Paare aufgestellte Formel erster Dimension anzuwenden, nämlich

$$c + g - \mu = \varepsilon.$$

h) Auf die drei unter 17), 19), 21) genannten zweistufigen Systeme von Paaren ist anzuwenden die Formel, welche aus der Formel bei g) durch Multiplication mit g hervorgeht, also

$$c g + g_e - \mu^2 = \varepsilon g.$$

i) Auf die drei unter 18), 20), 22) genannten zweistufigen Systeme von Paaren ist anzuwenden die Formel, welche aus der bei g) durch Multiplication mit c hervorgeht, also

$$c g + c^2 - \mu c = \varepsilon c.$$

Natürlich würde auch in jedem der 25 Fälle eine ein- oder mehrmalige Anwendung des ursprünglichen Chasles'schen Correspondenzprincips zum Ziele führen. Doch wären dann in jedem einzelnen Falle immer wieder die Ueberlegungen nothwendig, welche im III. Abschnitt bei der Erweiterung des Correspondenzprincips *allgemein* und deshalb *ein für alle Mal* gemacht sind.

Einige unter den 25 Fällen erledigen sich durch die allgemeinen Formeln des § 35. für $n = 3$, $n' = 3$, $d = 0$, $d' = 0$, $e = 1$, $e' = 1$.

§ 40.

Die Formeln für einstufige fundamentale Curvensysteme.

Die 25 Formeln, welche aus den im vorigen Paragraphen besprochenen Anwendungen resultiren, sind hier mit denselben Nummern wie dort zusammengestellt. Die Zahl der Coincidenzen ist immer rechts vom Gleichheitszeichen geschrieben. Hinsichtlich der Curven, welche in Bezug auf jede der 25 Formeln ausgeartet sind, ist Folgendes zu bemerken.

Herr Zeuthen und Herr Maillard haben bei ihrer Bestimmung (cf. die allgemeine Einleitung in Bd. X) der elementaren Anzahlen der C_3^3 für eine feste Ebene gezeigt, dass diese Curve nur eine einzige Ausartung nullter Gattung besitzt, d. h. nur eine Ausartung von solcher Beschaffenheit, dass sie durch elementare Bedingungen allein vollständig bestimmbar ist. Wir bezeichnen diese Ausartung und also auch ihre Anzahl in einem einstufigen Systeme mit σ . Sie lässt sich mit Hülfe der in § 34. eingeführten Definitionen der Ordnungscurve und Rangcurve kurz so beschreiben.

„ σ hat einen Ordnungskegelschnitt, der zugleich Rangkegelschnitt ist, und von einer einfachen Ordnungsgeraden in einem einfachen Rangpunkte berührt wird. Die Spitze, der Wendepunkt und der Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente fallen in den Rangpunkt, die Wendetangente, die Rückkehrtangente und der Verbindungsstrahl von Spitze und Wendepunkt fallen in die Ordnungsgerade.“

Die Zahlen σ führen wir sofort in jede der 25 Formeln ein. Aber die Zahl aller Curven, welche sonst noch in Bezug auf die mit der Nr. i) versehene Formel ausgeartet sind, bezeichnen wir zunächst mit α_i , indem wir auf die Zusammensetzung jeder der 25 Zahlen α_i aus Anzahlen für verschiedene Ausartungen hier noch nicht eingehen wollen. Jede Zahl α_i soll der *singuläre Defect* derjenigen Formel heissen, welche die Nummer i) trägt. Bei Voraussetzung eines *elementaren Systems* ist natürlich der singuläre Defect jeder Formel gleich Null.

Tabelle der 25 Formeln.

- 1) $c + v - z = \sigma + \alpha_1,$
- 2) $w + q - y - \mu = \sigma + \alpha_2,$
- 3) $v + y - w = \sigma + \alpha_3,$
- 4) $q + z - c - \mu = \sigma + \alpha_4,$
- 5) $y + c - q = \sigma + \alpha_5,$
- 6) $z + w - v - \mu = \sigma + \alpha_6,$
- 7) $v + c - \mu = 2q + \alpha_7,$
- 8) $q + w - \mu = 2v + \alpha_8,$
- 9) $v + 2v - 2\mu = w + 2\sigma + \alpha_9,$
- 10) $q + 2q - 2\mu = c + 2\sigma + \alpha_{10},$
- 11) $v + 3y - 3\mu = 4\sigma + \alpha_{11},$
- 12) $q + 3z - 3\mu = 4\sigma + \alpha_{12},$
- 13) $2v + q - 3\mu = 2q + w + \alpha_{13},$
- 14) $2q + v - 3\mu = 2v + c + \alpha_{14},$
- 15) $2v + 2v - 6\mu = q + 3c + \alpha_{15},$
- 16) $2q + 2q = v + 3w + \alpha_{16},$
- 17) $3c + q = 3q + \sigma + \alpha_{17},$
- 18) $3w + v - 3\mu = 3v + \sigma + \alpha_{18},$
- 19) $3v + q = 3w + \sigma + \alpha_{19},$
- 20) $3q + v - 3\mu = 3c + \sigma + \alpha_{20},$
- 21) $3y + q = 2w + q + \sigma + \alpha_{21},$
- 22) $3z + v - 3\mu = 2c + v + \sigma + \alpha_{22},$
- 23) $c + w - \mu = 2\sigma + \alpha_{23},$
- 24) $v + q - \mu = 2\sigma + \alpha_{24},$
- 25) $y + z - \mu = 2\sigma + \alpha_{25},$

Hier bedeutet also z. B. α_1 die Zahl aller derjenigen in dem gegebenen einstufigen Systeme vorhandenen, hinlänglich oft gezählten Ausartungen von höherer als der nullten Gattung, bei denen Spitze und Wendepunkt zusammenfallen, α_{13} die Zahl aller derjenigen, welche eine Tangente durch eine gegebene Gerade so schicken, dass ihr Berührungspunkt mit ihrem einfachen Schnittpunkte zusammenfällt.

Aus den 25 Formeln der obigen Tabelle erhält man auf mehrfache Weise jede der 7 Zahlen

$$2\sigma, 3c, 6v, 3y, 3w, 6q, 3z$$

als eine Function von μ , ν , ρ , welche um eine Function der Zahlen α vermindert ist. So gewinnt man 7 Hauptformeln, welche wir bezüglich σ -Formel, c -Formel, v -Formel u. s. w. nennen wollen. Die in jeder dieser 7 Hauptformeln auftretende Function der Zahlen α soll wieder ihr *singulärer Defect* heissen, und bezüglich mit

$$\alpha_\sigma, \alpha_c, \alpha_v, \alpha_y, \alpha_w, \alpha_q, \alpha_z$$

bezeichnet werden.

Tabelle der 7 Hauptformeln.

$$26) \quad 2\sigma = \nu + \rho - 3\mu - \alpha_\sigma,$$

$$27) \quad 3c = 4\nu - \rho - 6\mu - \alpha_c,$$

$$28) \quad 3w = 4\rho - \nu - \alpha_w,$$

$$29) \quad 6v = 7\rho - \nu - 3\mu - \alpha_v,$$

$$30) \quad 6q = 7\nu - \rho - 9\mu - \alpha_q,$$

$$31) \quad 3y = 2\rho + \nu - 3\mu - \alpha_y,$$

$$32) \quad 3z = 2\nu + \rho - 3\mu - \alpha_z.$$

§ 41.

Erzeugung der Ausartungen durch homographische Abbildung.

Jede der im vorigen Paragraphen eingeführten Zahlen α ist eine Summe von Anzahlen, von denen jede angiebt, wieviel Ausartungen von gewisser Definition in dem gegebenen, fundamentalen, einstufigen Systeme vorhanden sind. Derartiger Definitionen giebt es nun im Ganzen 12 verschiedene, mit andern Worten, die C_3^3 hat *ausser der Ausartung σ noch 12 andere fundamentale Ausartungen*. Die genaue Beschreibung derselben erhält man sehr leicht aus der allgemeinen C_3^3 durch eine gewisse homographische Abbildung*), welche jetzt besprochen werden soll.

Man nehme in fester Ebene einen Punkt S als *Centrum*, einen Strahl r als *Axe der Homographie* an, und bestimme dann das Bild A' jedes Punktes A in folgender Weise. Man ziehe den Strahl SA , welcher r in R_a schneide, und bestimme A' so, dass das Doppelverhältniss:

$$\frac{SA}{R_a A} : \frac{SA'}{R_a A'}$$

einen constanten Werth λ erhalte. Daraus folgt, dass man den Ort der Bilder aller Punkte eines Strahls a , oder kurz, das *Bild des Strahls a*

*) Auf diese Methode, die Ausartungen der C_3^3 aufzufinden, hat mich Herr Zeuthen brieflich aufmerksam gemacht, als ich dieselben schon auf dem mühsameren Wege a posteriori gefunden hatte.

erhält, indem man den Schnittpunkt von a und r mit S verbindet, und zu dem Verbindungsstrahle s_a , zu a und zu r denjenigen vierten Strahl construirt, welcher durch das Doppelverhältniss λ diesen 3 Strahlen so zugehört, wie A' zu R_a , A , S gehörte. Speciell erhält man das Bild der Tangente des Bildes A' eines Curvenpunktes A , indem man den Punkt, wo die A angehörige Tangente die Axe r schneidet, mit A' verbindet. Ueberhaupt wird bei der homographischen Abbildung einer Plancurve Ordnung und Rang erhalten, und das Bild jedes singulären Punktes oder Strahls wird im Allgemeinen wieder ein Punkt oder Strahl mit der nämlichen Singularität.

Wir setzen nun speciell $\lambda = 0$ und untersuchen die dadurch entstehenden Bilder einer festen Plancurve C_3^3 für die Fälle, dass die Axe der Homographie r zu der C_3^3 eine allgemeine und feste Lage hat, und dass das Centrum S der Homographie *alle möglichen Lagen zu der C_3^3 einnimmt*. Die so gewonnenen Bilder der C_3^3 und die ihnen dualistisch entsprechenden geben die sämtlichen fundamentalen Ausartungen der C_3^3 ausser σ . Die Ecken und Seiten des Singularitäten-dreiecks der festen C_3^3 bezeichnen wir wieder mit den in § 38. für sie eingeführten Buchstaben, also mit

$$c, v, y, w, q, z.$$

1) S liegt nicht auf der C_3^3 und auch nicht auf w oder q oder z . Dann bilden die Bilder der sämtlichen Punkte der C_3^3 drei mit der Axe r zusammenfallende Gerade. Von S gehen an die C_3^3 drei Tangenten, welche r in drei ausgezeichneten Punkten schneiden. Jeder durch einen dieser 3 Punkte gezogene Strahl ist nämlich als Tangente aufzufassen, weil für jeden solchen Strahl $\lambda = 0$ wird. Die drei ausgezeichneten Punkte sind also *Rangpunkte*. Die Bilder der Punkte c, v, y liegen auf r und sind von den drei Rangpunkten verschieden. Dagegen fallen die Wendetangente, die Rückkehrtangente und der Verbindungsstrahl von Spitze und Wendepunkt bei dem Bilde der C_3^3 mit r zusammen. Das so entstehende Bild*) ist eine ausgeartete C_3^3 , welche in der Folge immer mit ε_2 bezeichnet werden soll.

2) S liegt auf w , ohne v oder y zu sein. Dann bilden die Punkte des Bildes wieder drei Gerade, welche mit r zusammenfallen. Die von S ausgehende Wendetangente schneidet r in einem *zweifachen* Rangpunkte, in den zugleich das Bild von v und von y fällt. Ausser der Wendetangente geht von S nur noch eine Tangente aus, welche r in einem *einfachen* Rangpunkte schneidet. Das Bild von c ist ein Punkt auf r , welcher nicht mit den Rangpunkten zusammenfällt. Das Bild

*. Der Leser zeichne sich die Ausartungen nach den gewonnenen Beschreibungen auf.

von w geht durch den doppelten Rangpunkt, ohne mit r zusammenzufallen. Die Bilder von q und von z fallen mit r zusammen. Die so entstandene Ausartung der C_3^3 bekommt das Symbol η_2 .

3) S liegt auf q , ohne c oder y zu sein. Dann wird r wieder eine dreifache Ordnungsgerade. q schneidet r in einem einfachen Rangpunkte, in welchen zugleich die Bilder von c und y fallen. Ausser der Rückkehrtangente gehen von S noch zwei andere Tangenten aus, welche r in zwei einfachen Rangpunkten schneiden. Das Bild von v ist ein von den Rangpunkten verschiedener Punkt auf r . Das Bild von q ist ein durch das Bild von c gehender, von r verschiedener Strahl. Die Bilder von w und z fallen mit r zusammen. Die entstandene Ausartung der C_3^3 soll ε_1 heissen.

4) S liegt auf z , ohne c oder v zu sein. Dann wird r wieder dreifache Ordnungsgerade mit drei einfachen Rangpunkten, nämlich den Schnittpunkten der drei von S ausgehenden Tangenten. z schneidet r in einem Punkte, welcher die Bilder von c und v vereinigt, während ein durch diesen Punkt gehender, von r verschiedener Strahl das Bild von z giebt. Das Bild von y ist ein von den übrigen ausgezeichneten Punkten verschiedener Punkt auf r . Die Bilder von w und von q fallen mit r zusammen. Die entstandene Ausartung heisse ε_3 .

5) S ist der Punkt y . Dann ist r wieder eine dreifache Ordnungsgerade. w schneidet r in einem zweifachen, q in einem einfachen Rangpunkte. Der zweifache Rangpunkt ist zugleich das Bild von v , der einfache das von c . Das Bild von w geht durch das Bild von v und ist von r verschieden, das Bild von q geht durch das Bild von c und ist auch von r verschieden. Die Bilder von w und von q schneiden sich in dem Bilde von y . Das Bild von z fällt mit r zusammen. Bei dieser Ausartung, welche η_1 heissen soll, erscheint also das Singulartitätsdreieck nicht specialisirt, sondern in allgemeiner Gestalt.

6) S ist ein Curvenpunkt, jedoch von c und von v verschieden. Jede Gerade durch S schneidet dann die Curve noch in zwei anderen Punkten, deren Bilder auf r fallen. r wird also doppelte Ordnungsgerade. Als Bild von S kann jeder Punkt der in S berührenden Tangente aufgefasst werden. Diese wird also einfache Ordnungsgerade. Ihr Schnittpunkt mit r wird doppelter Rangpunkt. Ausserdem geht von S noch eine andere Tangente an die C_3^3 , welche r in einem einfachen Rangpunkte schneidet. Die Bilder von c , v , y sind Punkte auf r , welche von den Rangpunkten verschieden sind. Die Bilder von w , q , z fallen mit r zusammen. Diese Ausartung heisse δ_2 .

7) S ist der Punkt c . Dann schneidet jede Gerade durch S die Curve nur noch in einem Punkte, dessen Bild auf r fällt. Also wird r einfache Ordnungsgerade. Die Rückkehrtangente q wird zweifache

Ordnungsgerade und schneidet r in einem *dreifachen Rangpunkte*. Das Bild von v liegt auf der einfachen, das von c auf der zweifachen Ordnungsgeraden. Mit der ersteren fällt daher das Bild von w , mit der letzteren das von q zusammen. Das Bild von y fällt in den dreifachen Rangpunkt, und das Bild von z verbindet die Bilder von c und von v . Diese Ausartung entspricht der oben mit η_1 bezeichneten feld-dualistisch, und soll ϑ_1 heissen.

8) S ist der Punkt v . Dann erhalten wir genau wieder die eben beschriebene und mit η_1 bezeichnete Ausartung, nur dass jetzt r die *zweifache* Ordnungsgerade wird.

Aus den eben aufgefundenen 7 Ausartungen

$$\varepsilon_2, \eta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_3, \eta_1, \delta_2, \vartheta_1$$

erhält man durch feld-dualistische Uebersetzung der Beschreibungen, oder auch, indem man das *Centrum* der homographischen Abbildung festhält, der *Axe* alle möglichen Lagen ertheilt und $\lambda = \infty$ setzt, 7 Ausartungen, welche bezüglich folgende Symbole bekommen:

$$\tau_2, \vartheta_2, \tau_1, \tau_3, \delta_1, \delta_1, \eta_1.$$

Hiermit sind zwölf verschiedene Ausartungen erzeugt. Die Symbole für dieselben sind so gewählt, dass solche Ausartungen, deren Beschreibungen hinsichtlich des Punkorts und des Tangentenorts genau übereinstimmen, mit denselben Buchstaben, jedoch verschiedenen Indices bezeichnet sind. Es bestehen nämlich:

- 1) δ_1 und δ_2 aus einer doppelten und einer einfachen Ordnungsgeraden, mit einem doppelten Rangpunkte im Schnittpunkte beider, und einem einfachen Rangpunkte auf der doppelten Ordnungsgeraden;
- 2) τ_1, τ_2, τ_3 aus drei einfachen Ordnungsgeraden, die sich in einem dreifachen Rangpunkte schneiden;
- 3) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ aus einer dreifachen Ordnungsgeraden, auf welcher drei einfache Rangpunkte liegen;
- 4) ϑ_1, ϑ_2 aus einer zweifachen und einer einfachen Ordnungsgeraden, die sich in einem dreifachen Rangpunkte schneiden;
- 5) η_1 und η_2 aus einer dreifachen Ordnungsgeraden, auf welcher ein einfacher und ein zweifacher Rangpunkt liegen.

Mit σ haben wir nunmehr 13 fundamentale Ausartungen der C_3^3 aufgefunden. Diese kommen in den einstufigen, fundamentalen Systemen sämmtlich vor, ausserdem aber keine andern; ein Resultat, welches der Verfasser auf dem am Schluss von § 34, a posteriorisch genannten Wege erkannt hat. Jede der 13 Ausartungen hat also im Raume die Constantenzahl 9. Der Punkort und der Tangentenort ist aber bei

$$\delta_1, \delta_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$$

durch eine 8-fache, bei

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \eta_1, \eta_2$$

durch eine 7-fache elementare Bedingung bestimmt. Folglich sind die erstgenannten 8 Ausartungen *erster Gattung*, die 4 letztgenannten *zweiter Gattung* (Schluss von § 33.). Ferner folgt daraus, dass die Ausartungen die Constantenzahl 9 haben, die wichtige Eigenschaft, dass auf

$$\delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$$

die auf der vielfachen Ordnungsgeraden liegenden 4, 5 oder 6 ausgezeichneten Punkte *keine beliebige Lage* zu einander haben können, und dass ebenso auf

$$\delta_1, \tau_1, \tau_2, \tau_3$$

die durch den vielfachen Rangpunkt gehenden, ausgezeichneten Strahlen in ihrer Lage *nicht von einander unabhängig* sein können. In der That wird die gegenseitige Lage dieser Punkte resp. Strahlen durch gewisse *Gleichungen* bedingt, deren *Gradzahlen* der Verfasser *a posteriori bestimmt*. Diese Gleichungen gewinnen dadurch an Werth, dass sie durch unsere homographische Abbildung auch auf die allgemeine C_3^3 übertragen werden können. Näheres darüber folgt in § 51.

§ 42.

Die singulären Defecte der Formeln des § 40.

Ist ξ eins der Symbole, welche im vorigen Paragraphen für die Ausartungen eingeführt sind, so bezeichnet ξ zugleich auch die Anzahl aller Ausartungen ξ des zu Grunde liegenden, einstufigen, fundamentalen Systems, und ξz , wo z eine a -fache Bedingung ist, die Zahl aller derjenigen Ausartungen eines vorgelegten $(a+1)$ -stufigen Systems, welche die Bedingung z erfüllen. Jede der ersten 25 Zahlen a des § 40. ist natürlich eine Summe der mit gewissen Coefficienten multiplicirten 12 Ausartungssymbole, und zwar sind diese Coefficienten entweder Null oder positive ganze Zahlen. Aus der Beschreibung der Ausartungen ersieht man in jedem der 25 · 12 Fälle leicht, ob der Coefficient Null ist oder nicht. Ist er nicht gleich Null, so kann man sowohl algebraisch, wie auch a posteriorisch leicht ermitteln, welchen Werth er hat.

In der hier folgenden tabellarischen Zusammenstellung der 25 · 12 Coefficienten konnte wegen der Eigenschaft der C_3^3 , dualistisch sich selbst zu entsprechen, fast die Hälfte der Coefficienten gespart werden. Man hat nämlich die Zahlen a der 25 Formeln des § 40. durch die Ausartungsanzahlen vermittelst der nachstehenden Tabelle *nach folgender Regel* zu ersetzen:

„Jede links resp. rechts stehende Zahl a ist gleich der Summe der 12 Producte, deren jedes einen in derselben Horizontalreihe stehenden Coefficienten zum einen Factor und diejenige Ausartungszahl zum andern Factor hat, welche mit diesem Coefficienten in derselben Verticalreihe oben resp. unten steht.“

Tabelle der Coefficienten der Ausartungsanzahlen in den 25 Formeln des § 40.

	δ_1	δ_2	τ_1	τ_2	τ_3	ε_1	ε_2	ε_3	ϑ_1	ϑ_2	η_1	η_2	
α_1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	α_2
α_3	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	α_4
α_5	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	α_6
α_7	1	0	1	1	1	3	1	1	0	0	1	1	α_8
α_9	2	1	0	2	2	2	2	2	0	2	1	3	α_{10}
α_{11}	3	2	3	3	0	3	3	3	1	3	0	3	α_{12}
α_{13}	2	1	3	3	3	5	3	3	1	3	2	4	α_{14}
α_{15}	1	2	0	0	0	6	6	6	1	3	2	6	α_{16}
α_{17}	2	0	3	3	3	3	0	0	0	0	1	0	α_{18}
α_{19}	2	0	0	3	3	0	0	0	0	3	1	3	α_{20}
α_{21}	2	0	3	3	0	1	0	0	1	3	0	2	α_{22}
α_{23}	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	α_{23}
α_{24}	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	α_{24}
α_{25}	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	α_{25}
	δ_2	δ_1	ε_1	ε_2	ε_3	τ_1	τ_2	τ_3	η_1	η_2	ϑ_1	ϑ_2	

Hieraus ergeben sich mit vielen Bestätigungen auch die Werthe der singulären Defecte der 7 Hauptformeln des § 40. Man hat nämlich zu setzen:

$$\alpha_a = 2\delta_1 + 2\delta_2 + 3\tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 + 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 \\ + \vartheta_1 + 3\vartheta_2 + \eta_1 + 3\eta_2,$$

$$\alpha_c = \delta_1 + 2\delta_2 + 6\varepsilon_1 + 6\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 \\ + \vartheta_1 + 3\vartheta_2 + 2\eta_1 + 6\eta_2,$$

$$\alpha_{10} = 2\delta_1 + \delta_2 + 6\tau_1 + 6\tau_2 + 6\tau_3 \\ + 2\vartheta_1 + 6\vartheta_2 + \eta_1 + 3\eta_2,$$

$$\alpha_v = 2\delta_1 + 4\delta_2 + 15\tau_1 + 9\tau_2 + 9\tau_3 + 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 \\ + 5\vartheta_1 + 9\vartheta_2 + \eta_1 + 3\eta_2,$$

$$\alpha_7 = 4\delta_1 + 2\delta_2 + 3\tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 + 15\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2 + 9\varepsilon_3 \\ + \vartheta_1 + 3\vartheta_2 + 5\eta_1 + 9\eta_2,$$

$$\alpha_7 = \delta_1 + 2\delta_2 + 3\tau_1 + 3\tau_2 + 6\tau_3 + 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 \\ + \vartheta_1 + 3\vartheta_2 + 2\eta_1 + 3\eta_2,$$

$$\alpha_7 = 2\delta_1 + \delta_2 + 3\tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 + 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 \\ + 2\vartheta_1 + 3\vartheta_2 + \eta_1 + 3\eta_2.$$

Nach Einführung dieser Werthe in die 7 Hauptformeln hat man hinreichende Mittel, um alle fundamentalen Anzahlen der C_3^3 zu berechnen und zugleich wegen der zahlreichen *Verificationen* Rückschlüsse über die Natur der Ausartungen und etwa zweifelhafte Coefficienten zu machen; vorausgesetzt, dass die sämtlichen fundamentalen Ausartungsanzahlen berechnet vorliegen. Die Berechnung der letztern ist daher unser nächstes Ziel.

§ 43.

Die Berechnung der Anzahlen für die Ausartung nullter Gattung σ .

Indem wir die Beschreibung der Ausartung σ hier wiederholen, führen wir zugleich einige bei der Berechnung benutzte Symbole ein.

Die Ausartung σ besteht aus einem in der Ebene μ gelegenen Ordnungskegelschnitt k , der von einer Ordnungsgeraden a in einem Punkte d berührt wird. k ist zugleich Rangkegelschnitt und d Rangpunkt. Die Ecken c, v, y des Singularitätendreiecks fallen sämtlich mit d , die Seiten w, q, z desselben mit a zusammen. Die Bedingung, dass σ seinen Kegelschnitt eine gegebene Gerade schneiden lasse, heiße n , und die Bedingung, dass σ seinen Kegelschnitt eine gegebene Ebene berühren lasse, heiße r . Jede aus Potenzen von μ, n, r zusammengesetzte i -fache Bedingung heiße k_i .

Hiernach spaltet sich die Berührung ν für die Ausartung σ in die beiden Bedingungen a und n , also

$$\sigma\nu = \sigma a + \sigma n,$$

und überhaupt:

$$\sigma\nu^\alpha = \sigma(a+n)^\alpha.$$

Ebenso:

$$\sigma\rho^\alpha = \sigma(d+r)^\alpha.$$

Ferner ist, der Beschreibung gemäss:

$$\sigma c = \sigma v = \sigma y = \sigma d,$$

$$\sigma c^2 = \sigma v^2 = \sigma y^2 = \sigma d^2,$$

$$\sigma w = \sigma q = \sigma z = \sigma a,$$

$$\sigma w_\alpha = \sigma q_\alpha = \sigma z_\alpha = \sigma a_\alpha.$$

Natürlich auch:

$$\sigma c^3 = \sigma d^3, \quad \sigma q_i = \sigma a_i, \text{ u. s. f.}$$

Hiernach kann man alle möglichen fundamentalen Zahlen σ schliesslich durch die folgenden 11 Gruppen von *Stammzahlen* ausdrücken:

$$\begin{aligned} & \sigma k_5 a, \quad \sigma k_8 d, \\ & \sigma k_7 a_p, \quad \sigma k_7 a_e, \quad \sigma k_7 d^2, \\ & \sigma k_8 a_i, \quad \sigma k_8 d^3, \quad \sigma k_8 d a_e, \\ & \sigma k_3 A, \quad \sigma k_3 d^2 a_e, \\ & \sigma k_4 A d. \end{aligned}$$

Die Symbole, welche zu fehlen scheinen, lassen sich durch die allgemeinen Lageformeln auf die eben angegebenen Stammzahlen zurückführen. Z. B.:

$$\begin{aligned} \sigma k_7 a d &= \sigma k_7 a_e + \sigma k_7 d^2, \\ \sigma k_6 a d^2 &= \sigma k_6 d a_e + \sigma k_6 d^3, \\ \sigma k_3 a^3 d &= 2 \sigma k_3 a_i d = 2 \sigma k_3 A + 2 \sigma k_3 d^2 a_e. \end{aligned}$$

Die Stammzahlen lassen sich nun durch die in § 37. und § 38. berechneten Kegelschnittanzahlen leicht ausdrücken. Man beachte dabei nur, dass a den Kegelschnitt k in d berührt. Dann erhält man folgende Tabelle, wo die Symbole rechts vom ersten Gleichheitszeichen nicht auf σ , sondern auf den *Kegelschnitt* zu beziehen sind, und wo die Symbole der §§ 37. und 38. angewandt sind, nur dass statt ν immer n , statt ϱ immer r geschrieben ist.

- 1) $\sigma k_5 a = 2k_5,$
- 2) $\sigma k_8 d = 2k_8,$
- 3) $\sigma k_7 a_p = 2\mu k_7,$
- 4) $\sigma k_7 a_e = r k_7,$
- 5) $\sigma k_7 d^2 = n k_7,$
- 6) $\sigma k_8 a_i = t k_8 = \mu r k_8,$
- 7) $\sigma k_8 d^3 = P k_8 = (\mu n - 2\mu^2) k_8,$
- 8) $\sigma k_8 d a_e = x k_8 = \frac{1}{2} n r k_8,$
- 9) $\sigma k_3 A = T k_3 = (\mu^2 n - 2\mu^3) k_3,$
- 10) $\sigma k_3 d^2 a_e = y k_3 = (\frac{1}{2} \mu n r - \mu^2 r) k_3,$
- 11) $\sigma k_4 A d = z k_4 = (\frac{1}{2} \mu^2 n r - \mu^3 n - \mu^3 r) k_4.$

Damit ist die Berechnung aller fundamentalen Zahlen σ theoretisch geleistet.

Die numerische Ausrechnung ersehe man aus folgenden Beispielen:

1) *Berechnung von $\sigma v^5 \varrho^4$.*

$$\begin{aligned}
\sigma v^5 \varrho^4 &= \sigma(r+d)^4(n+a)^5 \\
&= 4_0 \cdot \sigma r^4 \cdot [\bar{5}_1^*] \cdot n^4 a + \bar{5}_2 \cdot n^3(a_p + a_e) + \bar{5}_3 \cdot 2 \cdot n^2 a_s + \bar{5}_4 \cdot 2 \cdot n A] \\
&+ 4_1 \cdot \sigma r^3 \cdot [\bar{5}_0 \cdot n^5 d + \bar{5}_1 \cdot n^4(d^2 + a_e) + \bar{5}_2 \cdot n^3(a_s + d^3 + d a_e) \\
&\quad + \bar{5}_3 \cdot 2 \cdot n^2(A + d^2 a_e) + \bar{5}_4 \cdot 2 \cdot n A d] \\
&+ 4_2 \cdot \sigma r^2 \cdot [\bar{5}_0 \cdot n^5 d^2 + \bar{5}_1 \cdot n^4(d a_e + d^3) + \bar{5}_2 \cdot n^3(A + 2 d^2 a_e) \\
&\quad + \bar{5}_3 \cdot 2 \cdot n^2 d A] \\
&+ 4_3 \cdot \sigma r \cdot [\bar{5}_0 \cdot n^5 d^3 + \bar{5}_1 \cdot n^4 d^2 a_e + \bar{5}_2 \cdot n^3 A d] \\
&= 4_0 \cdot [\bar{5}_1 \cdot 64 \cdot 2 + \bar{5}_2 \cdot (48 \cdot 2 + 32) + \bar{5}_3 \cdot 2 \cdot 24 + \bar{5}_4 \cdot 2 \cdot 4] \\
&+ 4_1 \cdot [\bar{5}_0 \cdot 104 \cdot 2 + \bar{5}_1 \cdot (104 + 64) + \bar{5}_2 \cdot (24 + 48 + \frac{1}{2} \cdot 64) \\
&\quad + \bar{5}_3 \cdot 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 48 - 4 \cdot 2) + \bar{5}_4 \cdot 2 \cdot 2] \\
&+ 4_2 \cdot [\bar{5}_0 \cdot 128 + \bar{5}_1 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 104 + 28) + \bar{5}_2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 72 - 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 24) \\
&\quad + \bar{5}_3 \cdot 2 \cdot 4] \\
&+ 4_3 \cdot [\bar{5}_0 \cdot 24 + \bar{5}_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 28 + \bar{5}_2 \cdot 6] \\
&= 18816.
\end{aligned}$$

2) *Berechnung von $\sigma q_e \mu^2 \varrho^5$.*

$$\begin{aligned}
\sigma q_e \mu^2 \varrho^5 &= \sigma a_e \mu^2 (r+d)^5 \\
&= \bar{5}_0 \cdot \sigma a_e \mu^2 r^5 + \bar{5}_1 \cdot \sigma a_e d \mu^2 r^4 + \bar{5}_2 \cdot \sigma a_e d^2 \mu^2 r^3 \\
&= \bar{5}_0 \cdot 4 + \bar{5}_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 + \bar{5}_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \\
&= 34.
\end{aligned}$$

3) *Berechnung von $\sigma w q z_e \varrho^5$.*

$$\begin{aligned}
\sigma w q z_e \varrho^5 &= \sigma a a a_e (r+d)^5 = \sigma A (r+d)^5 \\
&= \bar{5}_0 \cdot \sigma A r^5 + \bar{5}_1 \cdot \sigma A d r^4 \\
&= \bar{5}_0 \cdot 2 + \bar{5}_1 \cdot 1 \\
&= 7.
\end{aligned}$$

4) *Berechnung von $\sigma w y v^2 \mu v^3 \varrho$.*

$$\begin{aligned}
\sigma w y v^2 \mu v^3 \varrho &= \sigma a d d^2 \mu (n+a)^3 (r+d) \\
&= \sigma a d^3 \mu (n+a)^3 r \\
&= \bar{3}_0 \cdot \sigma a_e d^2 \mu n^3 r + \bar{3}_1 \cdot \sigma A d \mu n^2 r \\
&= \bar{3}_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 + \bar{3}_1 \cdot 2 \\
&= 14.
\end{aligned}$$

Hierzu fügen wir noch die numerischen Werthe aller derjenigen Zahlen σ , welche *nur* elementare Bedingungen enthalten, und aller derjenigen

*) Hier, wie immer, bezeichne ich die Zahl, welche angiebt, wie oft man aus p Elementen je i absondern kann, mit p_i .

Zahlen σ , welche ausser elementaren Bedingungen nur *eine einfache Singularitätenbedingung*, also entweder a oder d enthalten. Hinsichtlich der Anordnung dieser Zahlen innerhalb der folgenden Tabelle ist zu beachten, dass immer diejenige Zahl, welche einer mit σ multiplicirten α -fachen Bedingung als *ie nachgesetzt ist*, die Bedingung $\nu^{10-\alpha-i} \varrho^{i-1}$ enthält.

Tabelle von Zahlen σ .

$\sigma\mu^3$	= 42, 87, 141, 168, 141, 87, 42.
$\sigma\mu^2$	= 588, 1086, 1584, 1767, 1518, 1053, 606, 294.
$\sigma\mu$	= 4296, 7068, 9222, 9393, 7626, 5156, 3003, 1587, 768.
σ	= 20040, 28344, 31356, 26994, 18816, 11190, 6054, 3051, 1464, 696.
$\sigma a\mu^3$	= 12, 27, 45, 54, 45, 27.
$\sigma a\mu^2$	= 172, 340, 508, 571, 490, 337, 190.
$\sigma a\mu$	= 1272, 2220, 2960, 3037, 2466, 1652, 955, 495.
σa	= 5912, 8840, 9980, 8640, 6008, 3542, 1890, 935, 440.
$\sigma d\mu^3$	= 27, 45, 54, 45, 27, 12.
$\sigma d\mu^2$	= 338, 506, 569, 488, 335, 188, 86.
$\sigma d\mu$	= 2196, 2938, 3017, 2448, 1636, 941, 483, 222.
σd	= 8680, 9844, 8526, 5914, 3466, 1830, 889, 406, 184.

Es bedeutet also z. B. die vierte Zahl hinter $\sigma a\mu$, also 3037, dass es 3037 in eine Curve σ ausgeartete cubische Plancurven mit Spitze giebt, welche ihre Ordnungsgerade eine gegebene Gerade schneiden lassen, ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicken und dabei 4 gegebene Gerade schneiden, sowie 3 gegebene Ebenen berühren.

§ 44.

Die Berechnung der Anzahlen für die Ausartungen zweiter Gattung

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \eta_1, \eta_2.$$

Wir behandeln die Ausartungen *zweiter* Gattung vor denen *erster* Gattung, weil bei den ersteren zwischen den ausgezeichneten Punkten und Strahlen *keine* Lagebeziehungen bestehen und daher die Berechnung erleichtert wird.

Bei allen Ausartungen der C_3^3 bezeichnen wir

- 1) einfache Ordnungsgeraden mit a ,
- 2) die mehrfache Ordnungsgerade mit b ,
- 3) einfache Rangpunkte mit d ,
- 4) den mehrfachen Rangpunkt mit e .

Hiernach kommt, gemäss § 41., den 4 Ausartungen zweiter Gattung folgende Beschreibung zu.

1) Die Ausartung ϑ_1 besitzt eine mit der Wendetangente w identische, einfache Ordnungsgerade a , und eine mit der Rückkehrtangente q identische, zweifache Ordnungsgerade b . Beide schneiden sich in einem dreifachen Rangpunkte e , in welchen also auch y fällt. Die Spitze c ist ein Punkt der zweifachen, der Wendepunkt v ein Punkt der einfachen Ordnungsgeraden. Beide Punkte verbindet z . Hiernach kann eine Zahl ϑ_1 nur dann von Null verschieden sein, wenn sie ausser elementaren Bedingungen entweder die Bedingung cv oder cz oder vz oder z_e oder Bedingungen enthält, welche eine dieser Bedingungen als Factor enthalten, wie etwa $z_e = zz_e$.

2) Die Ausartung ϑ_2 besitzt eine einfache Ordnungsgerade a und eine mit q und mit z zusammenfallende, zweifache Ordnungsgerade b . Beide schneiden sich in einem dreifachen Rangpunkte e , in welchen auch v und y fallen. Die Spitze c ist ein auf b gelegener Punkt, die Wendetangente w ein durch e gehender Strahl. Hiernach kann eine Zahl ϑ_2 nur dann von Null verschieden sein, wenn sie ausser elementaren Bedingungen die Bedingung cv oder eine aus cv ableitbare Bedingung enthält, wie etwa $c^2 w_e$.

3) Die Ausartung η_1 entspricht ϑ_1 feld-dualistisch. Sie besitzt eine in der Ebene μ gelegene dreifache Ordnungsgerade b , welche mit z' zusammenfällt. Auf dieser liegen ein mit v zusammenfallender zweifacher Rangpunkt e und ein mit c zusammenfallender einfacher Rangpunkt d . Die Wendetangente w ist ein Strahl durch d und die Rückkehrtangente q ein Strahl durch e . Beide schneiden sich in y . Hiernach kann eine Zahl η_1 nur dann von Null verschieden sein, wenn sie ausser elementaren Bedingungen entweder die Bedingung wq oder wy oder qy oder y^2 oder Bedingungen enthält, die sich aus einer von diesen Bedingungen ableiten lassen, wie etwa $w_e q_e$.

4) Die Ausartung η_2 entspricht ϑ_2 feld-dualistisch. Sie besitzt eine in der Ebene μ gelegene dreifache Ordnungsgerade b , welche mit q und z zusammenfällt. Auf dieser liegen ein einfacher Rangpunkt d , ferner die Spitze c und endlich ein einfacher Rangpunkt e , welcher mit v und y zusammenfällt und von welchem die Wendetangente w ausgeht. Hiernach kann eine Zahl η_2 nur dann von Null verschieden sein, wenn sie ausser elementaren Bedingungen die Bedingung cw oder eine aus cw hervorgehende Bedingung enthält, wie etwa cW .

Diesen Beschreibungen zufolge kann man immer setzen:

$$\vartheta_1 v^a q^b = \vartheta_1 (a + 2b)^a \cdot (3e)^b,$$

$$\vartheta_2 v^a q^b = \vartheta_2 (a + 2b)^a \cdot (3e)^b,$$

$$\eta_1 v^a q^b = \eta_1 (3b)^a \cdot (d + 2e)^b,$$

$$\eta_2 v^a q^b = \eta_2 (3b)^a \cdot (d + 2e)^b,$$

$$\begin{aligned}\vartheta_1 w &= \vartheta_1 a, & \vartheta_1 q &= \vartheta_1 b, & \vartheta_1 y &= \vartheta_1 e, \\ \vartheta_2 q &= \vartheta_2 z = \vartheta_2 b, & \vartheta_2 v &= \vartheta_2 y = \vartheta_2 e, \\ \eta_1 c &= \eta_1 d, & \eta_1 v &= \eta_1 e, & \eta_1 z &= \eta_1 b, \\ \eta_2 v &= \eta_2 y = \eta_2 e, & \eta_2 q &= \eta_2 z = \eta_2 b.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich ohne Weiteres, was man für die mehrfachen singulären Bedingungen zu setzen hat, z. B.

$$\begin{aligned}\vartheta_1 c w_e q_s &= \vartheta_1 c a_e b_s, \\ \eta_2 q w v^3 &= \eta_2 b w e^3.\end{aligned}$$

Da die beiden Ordnungsgeraden a und b jeder der beiden ϑ durch e gehen und in μ liegen, so können alle mehrfachen, auf a und b bezüglichen Bedingungen durch μ , e und die einfachen Bedingungen a oder b ausgedrückt werden. Ebenso kann man bei η_1 und η_2 alle mehrfachen, auf d oder e bezüglichen Bedingungen durch μ , b und die einfachen Bedingungen d und e ausdrücken. Z. B.

$$\begin{aligned}\vartheta_1 a_e &= \vartheta_1 e a - \vartheta_1 e^2, \\ \vartheta_2 b_s &= \vartheta_2 \mu e b - \vartheta_2 e^3 - \vartheta_2 e \mu^2, \\ \eta_1 d^2 &= \eta_1 b d - \eta_1 b_e, \\ \eta_2 e^3 &= \eta_2 \mu b e - \eta_2 \mu^2 e - \eta_2 b_s.\end{aligned}$$

Ebenso lassen sich auch bei ϑ_1 und ϑ_2 die Potenzen von a und b , und bei η_1 und η_2 die Potenzen von d und e reduciren. Z. B.

$$\begin{aligned}\vartheta_1 a^3 b^2 &= 2 \vartheta_1 a_s b_p + 2 \vartheta_1 a_s b_e \\ &= 2 \vartheta_1 (\mu e a - \mu^2 e - e^3) (\mu b - \mu^2) \\ &\quad + 2 \vartheta_1 (\mu e a - \mu^2 e - e^3) (e b - e^2) \\ &= 2 \vartheta_1 (\mu^2 e a b - \mu^3 e a - \mu^3 e b - \mu e^3 b + \mu^3 e^2) \\ &\quad + 2 \vartheta_1 (\mu e^2 a b - \mu e^3 a - \mu^2 e^2 b + \mu^2 e^2) *), \\ \vartheta_2 a^4 b^3 &= 2 \cdot 2 \cdot \vartheta_2 A b_s \\ &= 4 \vartheta_2 \mu^3 e^2 a b, \\ \eta_2 d^2 e^2 &= \eta_2 (d b - b_e) (e b - b_e) \\ &= \eta_2 b^2 d e - \eta_2 b_s e - \eta_2 b_s d + \eta_2 B.\end{aligned}$$

Analog kann man auch bei ϑ_2 und η_2 die mehrfachen Bedingungen von w und c reduciren. Z. B.

$$\begin{aligned}\vartheta_2 w_e &= \vartheta_2 e w - \vartheta_2 e^2, \\ \eta_2 c^3 &= \eta_2 \mu e b - \eta_2 \mu^2 c - \eta_2 b_s.\end{aligned}$$

Führt man nun die eben besprochenen Reductionen bei allen denkbaren, den Ausartungen ϑ_1 , ϑ_2 , η_1 , η_2 auferlegten, neunfachen funda-

*) Diese Reductionen sind schon in § 13. eingehend behandelt.

mentalenen Bedingungen aus, so gelangt man schliesslich nur zu folgenden, von Null verschiedenen Symbolen:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 \mu^3 e^2 abcv, \quad \vartheta_1 \mu^3 e^2 abvz, \quad \vartheta_1 \mu^3 e^2 abcz, \quad \vartheta_1 \mu^3 e^2 abze, \\ \eta_1 \mu B dewq, \quad \eta_1 \mu Bdeqy, \quad \eta_1 \mu Bdewy, \quad \eta_1 \mu Bdey^2, \\ \vartheta_2 \mu^3 e^2 abcw, \quad \eta_2 \mu^3 e^2 abcw. \end{aligned}$$

Diese Symbole aber haben sämmtlich den Werth 1.

Damit ist die Berechnung aller fundamentalen Anzahlen der Ausartungen zweiter Gattung theoretisch geleistet.

Die numerische Ausrechnung ersehe man aus folgenden Beispielen:

1) Berechnung von $\vartheta_1 \mu^2 v^4 c w v$.

$$\begin{aligned} \vartheta_1 \mu^2 v^4 c w v &= \vartheta_1 \mu^2 (a+2b)^4 a c v \\ &= \vartheta_1 \mu^2 c v (4_1 \cdot a^4 \cdot 2^1 b + 4_2 \cdot a^3 \cdot 2^2 b^2 + 4_3 \cdot a^2 \cdot 2^3 b^3 \\ &\quad + 4_4 \cdot a \cdot 2^4 b^4) \\ &= 4_2 \cdot 2^2 \cdot 2 + 4_3 \cdot 2^3 \cdot 2 \\ &= 112. \end{aligned}$$

2) Berechnung von $\vartheta_2 \mu^2 c w v^3 \varrho$.

$$\begin{aligned} \vartheta_2 \mu^2 c w v^3 \varrho &= \vartheta_2 \mu^2 c (e w - e^2) (a+2b)^3 \cdot 3^1 e \\ &= 3^1 \vartheta_2 \mu^2 e^2 c w (a+2b)^3 \\ &= 3^1 \vartheta_2 \mu^2 e^2 c w (3_1 \cdot 2^1 a^2 b + 3_2 \cdot 2^2 \cdot a b^2) \\ &= 3^1 \cdot [3_1 \cdot 2^1 \cdot 2 + 3_2 \cdot 2^2 \cdot 2] \\ &= 108. \end{aligned}$$

3) Berechnung von $\eta_1 \mu v^4 \varrho^2 y^2$.

$$\begin{aligned} \eta_1 \mu v^4 \varrho^2 y^2 &= \eta_1 \mu (3b)^4 (d+2e)^2 y^2 \\ &= 3^4 \eta_1 2 \mu B (2_1 \cdot 2^1 \cdot d e) y^2 \\ &= 648. \end{aligned}$$

4) Berechnung von $\eta_2 w_p q z v c v \varrho^2$.

$$\begin{aligned} \eta_2 w_p q z v c v \varrho^2 &= \eta_2 (\mu w - \mu^2) b^2 e c (3^1 e) (d+2e)^2 \\ &= 3^1 \eta_2 \mu w c b^2 e^2 (d^2 + 2_1 \cdot 2^1 \cdot d e) \\ &= 3^1 \cdot (2 + 2_1 \cdot 2^1 \cdot 1) \\ &= 18. \end{aligned}$$

Hierzu fügen wir noch die numerischen Werthe einiger Zahlen ϑ und η . Wir ordnen dieselben wieder so, dass diejenige Zahl, welche einer α -fachen Bedingung als i^{te} nachgesetzt ist, die Bedingung v $(10-\alpha-i)$ -mal und die Bedingung ϱ $(i-1)$ -mal enthält.

Tabelle von Zahlen ϑ und η .

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 \mu^3 ecv &= \vartheta_1 \mu^3 ez_0 = \vartheta_2 \mu^3 ecw = 18, 12, 0, 0. \\
\vartheta_1 \mu^3 ebcv &= \vartheta_2 \mu^3 ecw = 152, 108, 36, 0, 0. \\
\vartheta_1 \mu^2 ecv &= \vartheta_2 \mu^2 ecw = 660, 456, 162, 0, 0, 0. \\
\vartheta_1 ecv &= \vartheta_2 ecw = 1240, 720, 216, 0, 0, 0, 0. \\
\vartheta_1 \mu^3 ebcv &= \vartheta_2 \mu^3 ebcw = 5, 3, 0. \\
\vartheta_1 \mu^2 ebcv &= \vartheta_2 \mu^2 ebcw = 44, 30, 9, 0. \\
\vartheta_1 \mu ebcv &= \vartheta_2 \mu ebcw = 194, 132, 45, 0, 0. \\
\vartheta_1 ebcv &= \vartheta_2 ebcw = 340, 192, 54, 0, 0, 0. \\
\vartheta_1 \mu^2 cv &= \vartheta_2 \mu^2 cw = 240, 456, 324, 108, 0, 0. \\
\vartheta_1 \mu^2 acv &= \vartheta_2 \mu^2 acw = 112, 192, 144, 54, 0. \\
\vartheta_1 \mu^2 acv &= \vartheta_2 \mu^2 acw = 64, 48, 18, 0. \\
\vartheta_1 \mu c^3 cv &= \vartheta_2 \mu c^3 cw = 18, 0, 0, 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1 \mu^3 cwq &= \eta_1 \mu^3 cy^2 = \eta_2 \mu^3 ecw = 0, 9, 15, 6. \\
\eta_1 \mu^2 ewq &= \eta_2 \mu^2 ecw = 0, 54, 90, 75, 32. \\
\eta_1 \mu ewq &= \eta_2 \mu ecw = 0, 162, 270, 225, 96, 40. \\
\eta_1 ewq &= \eta_2 ecw = 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0^*). \\
\eta_1 \mu^3 bewq &= \eta_2 \mu^3 becw = 0, 3, 5. \\
\eta_1 \mu^2 bewq &= \eta_2 \mu^2 becw = 0, 18, 30, 25. \\
\eta_1 \mu bewq &= \eta_2 \mu becw = 0, 54, 90, 75, 32. \\
\eta_1 bewq &= \eta_2 becw = 0, 0, 0, 0, 0, 0. \\
\eta_1 \mu^2 wq &= \eta_2 \mu^2 cw = 0, 0, 216, 324, 264, 120. \\
\eta_1 \mu^2 dewq &= \eta_2 \mu^2 decw = 54, 54, 39, 18. \\
\eta_1 \mu^2 e^2 wq &= \eta_2 \mu^2 e^2 cw = 0, 18, 18, 7. \\
\eta_1 \mu^2 dwq &= \eta_2 \mu^2 dcw = 0, 108, 144, 114, 56. \\
\eta_1 \mu d^3 wq &= \eta_2 \mu d^3 cw = 0, 18, 12, 8.
\end{aligned}$$

§ 45.

Die Berechnung der Anzahlen für die beiden Ausartungen δ_1 und δ_2 .

Die in § 41. angegebene Erzeugung der Ausartungen giebt für δ_1 und δ_2 die folgenden Beschreibungen.

Die Ausartungen δ_1 und δ_2 bestehen beide aus einer doppelten Ordnungsgeraden b und einer einfachen Ordnungsgeraden a , welche sich in einem doppelten Rangpunkte c schneiden, während ein anderer Punkt d

*) Ueberhaupt muss jede Zahl η Null sein, zu deren Bestimmung keine die Ebene μ festlegende Bedingung gegeben ist.

auf b einfacher Rangpunkt ist. Bei δ_1 fallen die Ecken c, v, y des Singularitätendreiecks mit e zusammen, während dessen Seiten w, q, z drei durch e gehende Strahlen sind, welche im Allgemeinen von a und b verschieden sind. Bei δ_2 dagegen fallen w, q, z mit b zusammen, während c, v, y drei auf b liegende Punkte sind, die im Allgemeinen von d und e verschieden sind.

Hiernach kann man setzen:

$$\delta v^a = \delta(a+2b)^a,$$

$$\delta q^a = \delta(d+2e)^a,$$

wo in jeder Gleichung das δ ohne Index sowohl als δ_1 wie auch als δ_2 gedeutet werden darf, eine Bezeichnung, die auch im Folgenden angewandt werden soll.

Ferner ist:

$$\delta_1 c = \delta_1 v = \delta_1 y = \delta_1 e,$$

und reciprok:

$$\delta_2 w = \delta_2 q = \delta_2 z = \delta_2 b.$$

Hieraus ergibt sich ohne Weiteres, was bei δ für alle möglichen fundamentalen Bedingungen zu setzen ist. Z. B.

$$\delta_1 v^2 \mu v q w = \delta_1 e^2 \mu (a+2b) (d+2e) w,$$

$$\delta_2 w_a q z c = \delta_2 b_a b b c = \delta_2 B c.$$

Man drücke dann, gemäss den Incidenzformeln bei δ_1 , jede auf w, q, z, a, b, d bezügliche mehrfache Bedingung durch die einfachen Bedingungen w, q, z, a, b, d und durch die Potenzen von e und μ aus. Analog drücke man bei δ_2 jede auf c, v, y, d, e, a bezügliche mehrfache Bedingung durch die einfachen Bedingungen c, v, y, d, e, a und durch die auf b und μ bezüglichen Bedingungen aus. Z. B.

$$\delta_1 w_a q_a = \delta_1 (e w - e^2) (\mu e q - \mu e^2 - \mu^3),$$

$$\delta_2 c^3 a_a = \delta_2 (c b_p - b_a) (e a - e^2).$$

Bei der Reduction der Potenzen von a und b kann man mit Vortheil von den allgemeinen Formeln des § 13. Gebrauch machen. Z. B.

$$\delta a^3 b^2 = 2 \delta a b (\mu^2 e + \mu e^2) - 2 \delta a \mu^2 e^2 - 4 \delta b \mu^2 e^2 + 4 \delta \mu^3 e^2. \quad (\S 13., F. 9)$$

So kann man schliesslich alle fundamentalen Anzahlen von δ_1 auf die 24 Stammzahlen zurückführen, welche in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind. Die zugleich dort beigesetzten numerischen Werthe sind vom Verfasser allmählich a posteriori erschlossen. Sie charakterisiren die Lagebeziehungen, welche bei δ_1 zwischen den 5 von e ausgehenden Strahlen a, b, w, q, z bestehen.

Tabelle der Stammzahlen bei δ_1 .

$$\begin{aligned}
\delta_1 \mu^3 e^2 d a b w &= \delta_1 \mu^3 e^2 d a b q = \delta_1 \mu^3 e^2 d a b z = 1, \\
\delta_1 \mu^3 e^2 d a w q &= \delta_1 \mu^3 e^2 d a w z = \delta_1 \mu^3 e^2 d a q z = 1, \\
\delta_1 \mu^3 e^2 d b w q &= \delta_1 \mu^3 e^2 d b w z = \delta_1 \mu^3 e^2 d b q z = 1, \\
\delta_1 \mu^3 e^2 d w q z &= 1; \\
\delta_1 \mu^3 e d a b w q &= \delta_1 \mu^3 e d a b w z = \delta_1 \mu^3 e d a b q z = 2, \\
\delta_1 \mu^3 e d a w q z &= \delta_1 \mu^3 e d b w q z = 2; \\
\delta_1 \mu e^3 d a b w q &= \delta_1 \mu e^3 d a b w z = \delta_1 \mu e^3 d a b q z = 2, \\
\delta_1 \mu e^3 d a w q z &= \delta_1 \mu e^3 d b w q z = 2; \\
\delta_1 \mu^3 d a b w q z &= 1; \\
\delta_1 e^3 d a b w q z &= 1; \\
\delta_1 \mu^2 e d a b w q z &= 7; \\
\delta_1 \mu e^2 d a b w q z &= 7;
\end{aligned}$$

Von den Stammzahlen, auf welche die sämtlichen Zahlen δ_2 reducirt werden können, stimmen die μ^3 als Factor enthaltenden mit gewissen Stammzahlen der obigen Tabelle überein, weil δ_2 und δ_1 sich feld-dualistisch entsprechen, z. B.

$$\delta_1 \mu^3 b a d e c v = \delta_1 \mu^3 e d a b w q.$$

Die Werthe der auf δ_2 bezüglichen Stammzahlen enthält die folgende Tabelle.

Tabelle der Stammzahlen bei δ_2 .

$$\begin{aligned}
\delta_2 \mu^3 b_e a d e c &= \delta_2 \mu^3 b_e a d e v = \delta_2 \mu^3 b_e a d e y = 1, \\
\delta_2 \mu^3 b_e a d c v &= \delta_2 \mu^3 b_e a d c y = \delta_2 \mu^3 b_e a d v y = 1, \\
\delta_2 \mu^3 b_e a c c v &= \delta_2 \mu^3 b_e a c c y = \delta_2 \mu^3 b_e a e v y = 1, \\
\delta_2 \mu^3 b_e a c v y &= 1; \\
\delta_2 \mu^3 b a d e c v &= \delta_2 \mu^3 b a d e c y = \delta_2 \mu^3 b a d e v y = 2, \\
\delta_2 \mu^3 b a d c v y &= \delta_2 \mu^3 b a c c v y = 2; \\
\delta_2 \mu^3 a d e c v y &= 1; \\
\delta_2 \mu b_e a d e c v y &= 3.
\end{aligned}$$

Ausserdem ist zu beachten, dass jedes auf δ_2 bezügliche Symbol gleich Null ist, wenn es keine die Ebene μ bestimmende Bedingung enthält, also z. B.

$$\delta_2 B a d e c v = 0, \quad \delta_2 b_e a d e c v y = 0.$$

Hiermit ist nun die Berechnung aller Zahlen δ_1 und δ_2 theoretisch geleistet.

Für die Ausrechnung der Zahlen δ lässt sich der Umstand benutzen, dass in der Tabelle der Stammzahlen von δ_1 resp. von δ_2 die Symbole w, q, z , resp. c, v, y beliebig mit einander vertauscht werden können. Man bezeichne daher bei δ_1 mit

$$g_1, g_2, g_3$$

bezüglich die Bedingungen, dass von den drei Strahlen w, q, z einer eine gegebene Gerade schneiden soll, dass jeder von zweien und dass jeder von allen dreien eine gegebene Gerade schneiden soll. Dann hat man von den sämtlichen, auf δ_1 bezüglichen Symbolen nur diejenigen auszuwerthen, welche ausser den elementaren Bedingungen μ, ν, ρ die folgenden Bedingungen enthalten:

$$\begin{aligned} g_1, & \quad g_2, & \quad g_3, \\ e g_1, & \quad e g_2, & \quad e g_3, \\ e^2 g_1, & \quad e^2 g_2, & \quad e^2 g_3, \\ e^3 g_1, & \quad e^3 g_2, & \quad e^3 g_3. \end{aligned}$$

Analoges gilt für δ_2 , wo man die Bedingungen

$$p_1, p_2, p_3$$

einzuführen hat, d. h. die Bedingungen, dass von den drei singulären Punkten c, v, y bezüglich einer auf einer gegebenen Ebene liegen soll, dass jeder von zweien, und dass jeder von allen dreien auf einer gegebenen Ebene liegen soll.

Einige Beispiele mögen die Berechnung der Zahlen δ verdeutlichen.

1) *Berechnung von $\delta_1 \mu \nu^5 \rho^2 w$.*

$$\begin{aligned} \delta_1 \mu \nu^5 \rho^2 w &= \delta_1 \mu \nu^5 \rho^2 g_1 \\ &= \delta_1 \mu (a+2b)^5 (d+2e)^2 g_1 \\ &= \delta_1 \mu d^2 g_1 (\delta_1 \cdot 2^1 \cdot a^4 b + \delta_3 \cdot 2^2 \cdot a^3 b^2 + \delta_5 \cdot 2^3 \cdot a^2 b^3) \\ &\quad + 2 \cdot 2^1 \cdot \delta_1 \mu d e g_1 (\delta_1 \cdot 2^1 \cdot a^4 b + \delta_2 \cdot 2^2 \cdot a^3 b^2 + \delta_3 \cdot 2^3 \cdot a^2 b^3 + \delta_4 \cdot 2^4 \cdot a b^4) \\ &= \delta_1 \cdot 2^1 \cdot 2 + \delta_2 \cdot 2^2 \cdot 4 + \delta_3 \cdot 2^3 \cdot 2 \\ &\quad + 2 \cdot 2^1 \cdot (\delta_1 \cdot 2^1 \cdot 2 + \delta_2 \cdot 2^2 \cdot 4 + \delta_3 \cdot 2^3 \cdot 4 + \delta_4 \cdot 2^4 \cdot 2) \\ &= 2980. \end{aligned}$$

Dieses ist zugleich die Zahl für die Symbole $\delta_1 \mu \nu^5 \rho^2 q$, $\delta_1 \mu \nu^5 \rho^2 z$, $\delta_2 \mu \nu^5 \rho^2 c$, $\delta^2 \mu \nu^5 \rho^2 v$, $\delta_2 \mu \nu^5 \rho^2 y$.

2) *Berechnung von $\delta_2 \nu^2 \rho^4 c q_e$.*

$$\begin{aligned} \delta_2 \nu^2 \rho^4 c q_e &= \delta_2 (a+2b)^2 (d+2e)^4 p_1 b_e \\ &= \delta_2 a^2 p_1 b_e (4_2 \cdot 2^2 \cdot d^2 e^2) \\ &= 4_2 \cdot 2^2 \cdot 1 \\ &= 24. \end{aligned}$$

3) *Berechnung von $\delta_2 \mu^2 \nu^4 c w v$.*

$$\begin{aligned} \delta_2 \mu^2 \nu^4 c w v &= \delta_2 \mu^2 (a+2b)^4 p_2 b \\ &= \delta_2 \mu^2 p_2 b (4_1 \cdot 2^1 \cdot a^3 b + 4_2 \cdot 2^2 \cdot a^2 b^2) \\ &= 4_1 \cdot 2^1 \cdot 2 \cdot \mu^3 b_e a e p_2 + 4_2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot \mu^3 b_e a e p_2 \\ &= 4_1 \cdot 2^1 \cdot 2 \cdot 1 + 4_2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 64. \end{aligned}$$

4) Berechnung von $\delta_1 v^4 q w_e q z$.

$$\begin{aligned}
\delta_1 v^4 q w_e q z &= \delta_1 (a+2b)^4 (d+2e)(ew-e^2)qz \\
&= \delta_1 (a+2b)^4 d(eg_3 - e^2 g_2) \\
&= \delta_1 [4_0 \cdot 2^0 \cdot 2A + 4_1 \cdot 2^1 \cdot 2 \cdot a_s b + 4_2 \cdot 2^2 (a_p + a_s)(b_p + b_s) \\
&\quad + 4_3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot a b_s + 4_4 \cdot 2^4 \cdot 2 \cdot B] d(eg_3 - e^2 g_2) \\
&= 4_0 \cdot 2^0 \cdot 2 \cdot (\mu e^3 a - \mu^2 e^3) d(g_3 - eg_2) \\
&\quad + 4_1 \cdot 2^1 \cdot 2 \cdot (\mu e^2 a b - \mu^2 e^2 b) d(g_3 - eg_2) \\
&\quad + 4_2 \cdot 2^2 \cdot [\mu^2 e a b + 2\mu e^2 a b + e^3 a b - (\mu^3 e + \mu^2 e^2 + \mu e^3)(a+b) \\
&\quad \quad + 2\mu^2 e^3] d(g_3 - eg_2) \\
&\quad + 4_3 \cdot 2^3 \cdot 2 (\mu e^2 a b - \mu^2 e^2 a) d(g_3 - eg_2) \\
&\quad + 4_4 \cdot 2^4 \cdot 2 (\mu e^3 b - \mu^2 e^3) d(g_3 - eg_2) \\
&= 4_0 \cdot 2^0 \cdot 2 \cdot (2-1) \\
&\quad + 4_1 \cdot 2^1 \cdot 2 (7-4) - 4_1 \cdot 2^1 \cdot 2 \cdot (2-1) \\
&\quad + 4_2 \cdot 2^2 \cdot [7+2 \cdot 7+1 - (2+4+2)(1+1) + 2 \cdot 1] \\
&\quad - 4_2 \cdot 2^2 \cdot [4+2 \cdot 2 - (1+1)(1+1)] \\
&\quad + 4_3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot (7-4) - 4_3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot (2-1) \\
&\quad + 4_4 \cdot 2^4 \cdot 2 \cdot (2-1) \\
&= 2 \cdot 1 + 16 \cdot (3-1) + 24(8-4) + 64(3-1) + 32 \cdot 1 \\
&= 290.
\end{aligned}$$

5) Berechnung von $\delta_2 \mu^2 v q^2 y c v w$.

$$\begin{aligned}
\delta_2 \mu^2 v q^2 c v w &= \delta_2 \mu^2 (a+2b)(d+2e)^2 p_3 b \\
&= \mu^2 a p_3 (2_0 \cdot 2^0 d^2 b + 2_1 \cdot 2^1 d e b + 2_2 \cdot 2^2 e^2 b) \\
&= \mu^2 a p_3 [2_0 \cdot 2^0 \cdot (b d - b_s) b + 2_1 \cdot 2^1 \cdot d e b + 2_2 \cdot 2^2 (b e - b_s) b] \\
&= 2_0 \cdot 2^0 \cdot a p_3 (\mu^3 b d + \mu^3 b d + B d - \mu B) \\
&\quad + 2_1 \cdot 2^1 \cdot a p_3 (\mu^3 d e + \mu b_p d e) \\
&\quad + 2_2 \cdot 2^2 \cdot a p_3 (\mu^3 b e + \mu^3 b e + B e - \mu B) \\
&= 2_0 \cdot 2^0 \cdot (2+2+0-1) \\
&\quad + 2_1 \cdot 2^1 \cdot (1+3) \\
&\quad + 2_2 \cdot 2^2 \cdot (2+2+0-1) \\
&= 31.
\end{aligned}$$

Hierzu fügen wir die numerischen Werthe einiger Zahlen δ mit dem Bemerkten, dass auch hier die einer α -fachen Bedingung nachgesetzte, i^{te} Zahl die $(i-1)^{\text{te}}$ Potenz von q und die $(10-\alpha-i)^{\text{te}}$ Potenz von v enthält.

Tabelle von Zahlen δ .

$$\delta_1 \mu^3 g_1 = \delta_2 \mu^3 p_1 = 0, 24, 78, 78, 24, 0.$$

$$\delta_1 \mu^2 g_1 = \delta_2 \mu^2 p_1 = 0, 240, 672, 702, 408, 120, 0.$$

$\delta_1 \mu g_1$	$= \delta_2 \mu p_1 = 0, 1240, 2980, 3028, 1840, 640, 160, 0.$
$\delta_1 g_1$	$= \delta_2 p_1 = 0, 3360, 5840, 5020, 2640, 800, 160, 0, 0.$
$\delta_1 \mu^3 e g_1$	$= \delta_2 \mu^3 e p_1 = 0, 18, 21, 6, 0.$
$\delta_1 \mu^2 e g_1$	$= \delta_2 \mu^2 e p_1 = 0, 152, 188, 113, 32, 0.$
$\delta_1 \mu e g_1$	$= \delta_2 \mu e p_1 = 0, 660, 802, 506, 168, 40, 0.$
$\delta_1 e g_1$	$= \delta_2 e p_1 = 0, 1240, 1300, 714, 208, 40, 0, 0.$
$\delta_1 \mu^3 b g_1$	$= \delta_2 \mu^3 b p_1 = 0, 6, 21, 18, 0.$
$\delta_1 \mu^2 b g_1$	$= \delta_2 \mu^2 b p_1 = 0, 64, 190, 187, 88, 0.$
$\delta_1 \mu b g_1$	$= \delta_2 \mu b p_1 = 0, 340, 858, 848, 472, 120, 0.$
$\delta_1 b g_1$	$= \delta_2 b p_1 = 0, 880, 1560, 1278, 592, 120, 0, 0.$
$\delta_1 \mu^3 e^2 g_1$	$= 0, 4, 1, 0.$
$\delta_1 \mu^2 e^2 g_1$	$= 0, 36, 26, 7, 0.$
$\delta_1 \mu e^2 g_1$	$= 0, 152, 116, 36, 8, 0.$
$\delta_1 e^2 g_1$	$= 0, 240, 160, 44, 8, 0, 0.$
$\delta_2 \mu^3 b_e p_1$	$= 0, 1, 4, 0.$
$\delta_2 \mu^2 b_e p_1$	$= 0, 8, 25, 18, 0.$
$\delta_2 \mu b_e p_1$	$= 0, 42, 112, 96, 24, 0.$
$\delta_2 b_e p_1$	$= 0, 100, 178, 120, 24, 0, 0.$

$\delta_1 \mu^2 w_e q$	$= 0, 72, 111, 81, 32.$
$\delta_1 \mu^2 w_e q s$	$= 0, 27, 45, 31.$
$\delta_1 \mu w_e q$	$= 0, 314, 458, 338, 128, 40.$
$\delta_1 \mu w_e q s$	$= 0, 126, 201, 156, 64.$
$\delta_1 w_e q$	$= 0, 660, 802, 506, 168, 40, 0.$
$\delta_1 w_e q s$	$= 0, 290, 380, 260, 104, 40.$
$\delta_1 \mu^2 w q s$	$= 0, 90, 240, 249, 144.$
$\delta_1 \mu^2 w q$	$= 0, 176, 482, 515, 320, 120.$
$\delta_1 \mu w q$	$= 0, 900, 2122, 2180, 1368, 520, 160.$
$\delta_1 w q s$	$= 0, 1320, 2252, 1984, 1128, 440, 160.$
$\delta_2 \mu^2 c w_e$	$= 0, 8, 25, 18, 0.$
$\delta_2 \mu^2 c w_e v$	$= 8, 19, 13, 0.$
$\delta_2 \mu^2 c w$	$= 0, 64, 190, 187, 88, 0.$
$\delta_2 \mu^2 c v w$	$= 64, 146, 136, 63, 0.$
$\delta_2 \mu^2 y c v w$	$= 58, 64, 31, 0.$
$\delta_2 \mu^2 c w y s$	$= 14, 35, 26, 0.$

§ 46.

Die Berechnung der Anzahlen für die drei Ausartungen τ_1, τ_2, τ_3 .

Die in § 41. angegebene Erzeugung der Ausartungen liefert für die drei mit τ bezeichneten Ausartungen die folgenden Beschreibungen.

Jede der drei Ausartungen τ besteht aus drei einfachen Ordnungsgeraden a , welche sich in einem dreifachen Rangpunkte e schneiden. Bei τ_1 fallen die Strahlen w und z mit der einen Ordnungsgeraden zusammen, auf welcher auch der Punkt v liegt, während c und y mit e zusammenfallen, und q ein von den Ordnungsgeraden verschiedener, durch e gehender Strahl ist. Bei τ_2 fallen alle drei Ecken des Singularitätendreiecks, c , v und y mit e zusammen, während die Seiten desselben drei von den Ordnungsgeraden verschiedene, durch e gehende Strahlen sind. Bei τ_3 fallen nur c und v mit e zusammen, während y ein beliebiger Punkt der Ebene ist, in dessen Verbindungsstrahl mit e die Strahlen w und q fallen, und während z ein durch e gehender Strahl ist, der von den andern 4 durch e gehenden Strahlen verschieden ist.

Hiernach kann man setzen:

$$\tau \rho^a = 3^a \cdot \tau e^a,$$

$$\tau c = \tau e,$$

$$\tau_1 y = \tau_1 e,$$

$$\tau_2 v = \tau_2 e, \quad \tau_2 y = \tau_2 e,$$

$$\tau_3 v = \tau_3 e,$$

$$\tau_1 z = \tau_1 w,$$

$$\tau_3 q = \tau_3 w.$$

Hieraus ergibt sich ohne Weiteres die Reduction aller möglichen fundamentalen Bedingungen, ausgenommen die Reduction der Potenzen von v . Für diese beachte man die in § 12. entwickelten 9 Moduln. Diese reduciren die Potenzen von v auf die Potenzen unserer Bedingungen μ und e , sowie auf die drei Bedingungen a_1, a_2, a_3 , welche bezüglich aussagen sollen,

dass eine der drei Ordnungsgeraden,

dass jede von zwei Ordnungsgeraden,

dass jede der drei Ordnungsgeraden

die Bedingung erfüllt, eine gegebene Gerade zu schneiden. So kann man, gemäss den Formeln des § 12. z. B. setzen:

$$\tau v^6 = 180 \cdot \tau a_3 (\mu^2 e + \mu e^2) - 500 \cdot \tau a_2 \mu^2 e^2 + 560 \cdot \tau a_1 \mu^3 e^2.$$

Bei τ_1 hat man zu beachten, dass die eine Ordnungsgerade vor den beiden andern dadurch ausgezeichnet ist, dass w und z mit ihr zusammenfallen. Darum soll bei τ_1 a_1 resp. a_2 ausdrücken, dass eine dieser beiden andern Ordnungsgeraden resp. jede von ihnen eine ge-

gebene Gerade schneiden soll. Die mehrfachen fundamentalen Bedingungen drücke man, wie sonst, durch die entsprechenden einfachen Bedingungen und durch μ und e aus. Z. B.

$$\begin{aligned}\tau_2 w_e &= \tau_2 e w - \tau_2 e^2, \\ \tau_1 v^3 &= \tau_1 (\mu v w - \mu^2 v - \mu e w + \mu^3 + \mu e^2), \\ \tau_3 c v z &= \tau_3 e^2 (\mu e z - \mu^3 - \mu e^2) \\ &= \tau_3 \mu e^3 z - \tau_3 \mu^3 e^2.\end{aligned}$$

So kann man schliesslich alle fundamentalen Anzahlen der drei Ausartungen τ_1 , τ_2 , τ_3 auf die *in den folgenden drei Tabellen enthaltenen Stammzahlen zurückführen*. Die dort beigesetzten numerischen Werthe sind vom Verfasser allmählich a posteriori erkannt. Sie charakterisiren die Lagebeziehungen, welche zwischen den 4 Strahlen von τ_1 , zwischen den 6 Strahlen von τ_2 und den 5 Strahlen von τ_3 bestehen.

Tabelle der Stammzahlen bei τ_1 .

$$\begin{aligned}\tau_1 \mu^3 e^2 v a_2 w &= 1, & \tau_1 \mu^3 e^2 v a_2 q &= 1, & \tau_1 \mu^3 e^2 v a_1 w q &= 1, \\ \tau_1 \mu^3 e v a_2 w q &= 2, & \tau_1 \mu e^3 v a_2 w q &= 2.\end{aligned}$$

Beachtenswerth ist, dass jedes der Symbole τ_1 nur dann von null verschieden sein kann, wenn es eine auf v bezügliche Bedingung enthält.

Tabelle der Stammzahlen bei τ_2 .

$$\begin{aligned}\tau_2 \mu^3 e^2 a_3 w &= 4, & \tau_2 \mu^3 e^2 a_3 q &= 1, & \tau_2 \mu^3 e^2 a_3 z &= 2, \\ \tau_2 \mu^3 e^2 a_2 w q &= 3, & \tau_2 \mu^3 e^2 a_2 w z &= 2, & \tau_2 \mu^3 e^2 a_2 q z &= 1, \\ \tau_2 \mu^3 e^2 a_1 w q z &= 1; \\ \tau_2 \mu^3 e a_3 w q &= \tau_2 \mu e^3 a_3 w q = 7, \\ \tau_2 \mu^3 e a_3 w z &= \tau_2 \mu e^3 a_3 w z = 6, \\ \tau_2 \mu^3 e a_3 q z &= \tau_2 \mu e^3 a_3 q z = 3, \\ \tau_2 \mu^3 e a_2 w q z &= \tau_2 \mu e^3 a_2 w q z = 5; \\ \tau_2 \mu^3 a_3 w q z &= \tau_2 e^3 a_3 w q z = 4, \\ \tau_2 \mu^2 e a_3 w q z &= \tau_2 \mu e^2 a_3 w q z = 22,\end{aligned}$$

Tabelle der Stammzahlen bei τ_3 .

$$\begin{aligned}\tau_3 \mu^3 e^2 y a_3 &= 2, & \tau_3 \mu^3 e^2 y a_2 z &= 2, & \tau_3 \mu^3 e^2 y a_2 w &= 2, \\ \tau_3 \mu^3 e^2 y a_1 w z &= 1; \\ \tau_3 \mu^3 e y a_3 z &= \tau_3 \mu e^3 y a_3 z = 6, \\ \tau_3 \mu^3 e y a_3 w &= \tau_3 \mu e^3 y a_3 w = 4, \\ \tau_3 \mu^3 e y a_2 w z &= \tau_3 \mu e^3 y a_2 w z = 4; \\ \tau_3 \mu^3 y a_3 w z &= \tau_3 e^3 y a_3 w z = 2, \\ \tau_3 \mu^2 e y a_3 w z &= \tau_3 \mu e^2 y a_3 w z = 14.\end{aligned}$$

Beachtenswerth ist, dass jedes Symbol τ_3 gleich Null ist, wenn es keine die Lage des Punktes y feststellende Bedingung enthält.

Nach Feststellung der auf τ_1, τ_2, τ_3 bezüglichen Stammzahlen ist nun die Berechnung aller Zahlen τ theoretisch geleistet.

Die Ausrechnung der Zahlen τ mögen die folgenden Beispiele verdeutlichen.

1) Berechnung von $\tau_1 v v^7 \rho$.

$\tau_1 v v^7 \rho = 3 \cdot \tau_1 v v^7 e$. Nun wendet man Formel (8) in § 12. an, und erhält:

$$\begin{aligned}\tau_1 v v^7 \rho &= 3 \cdot 1120 \cdot \tau_1 v \mu^2 e^3 a_2 w = 3 \cdot 1120 \cdot 1 \\ &= 3360.\end{aligned}$$

2) Berechnung von $\tau_2 \mu w e q z v^4$. (Formel (5) in § 12.)

$$\begin{aligned}\tau_2 \mu (e w - e^2) q z v^4 &= [6 \cdot a_3 (\mu^2 e + \mu e^2) w q z - 3 \cdot a_2 (\mu^3 e + \mu e^3) w q z \\ &\quad + 14 \cdot a_2 (\mu^2 e^2) w q z - 19 \cdot a_1 (\mu^3 e^2 + \mu^2 e^3) w q z] \\ &\quad - [6 \cdot a_3 (\mu^2 e^2 + \mu e^3) q z - 3 \cdot a_2 (\mu^3 e^3) q z + 14 \cdot a_2 (\mu^2 e^3) q z] \\ &= [6 \cdot (22 + 22) - 3 \cdot (5 + 5) + 14 \cdot (2 \cdot 5) - 19 \cdot (1 + 1)] \\ &\quad - [6 \cdot (2 \cdot 3 + 3) - 3 \cdot (1) + 14 \cdot (1)] \\ &= 336 - 65 \\ &= 271.\end{aligned}$$

3) Berechnung von $\tau_3 \mu^2 v^3 \rho c w y$. (Formel (4) in § 12.)

$$\begin{aligned}\tau_3 \mu^2 v^3 \rho c w y &= 3 \cdot \tau_3 \mu^2 e^2 v^3 w y \\ &= 3 \cdot \tau_3 y w (\mu^2 e^2 a_3 + 3 \mu^3 e^2 a_2 + 3 \mu^2 e^3 a_1) \\ &= 3 \cdot [2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2] \\ &= 60.\end{aligned}$$

4) Berechnung von $\tau_3 \mu^2 v^3 c w y z$. (Formel (4) in § 12.)

$$\begin{aligned}\tau_3 \mu^2 v^3 c w y z &= y w z (\mu^2 e a_3 + 3 \cdot \mu^3 e a_2 + 3 \cdot \mu^2 e^2 a_1 \\ &\quad - 6 \cdot \mu^2 e^3 a_1 + 2 \cdot \mu^3 e^2 a_1) \\ &= 14 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 4 - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ &= 46.\end{aligned}$$

5) Berechnung von $\tau_2 \mu v^5 w q z$. (Formel (6) in § 12.)

$$\begin{aligned}\tau_2 \mu v^5 w q z &= w q z [15 \cdot a_3 (\mu^3 + \mu e^2) + 50 \cdot a_2 (\mu^2 e) \\ &\quad - 45 \cdot a_2 (\mu e^3) - 15 \cdot a_2 (\mu^3 e + \mu^2 e^2) - 80 \cdot a_1 (\mu^3 e^2)] \\ &= 15 \cdot (4 + 22) + 50 \cdot 22 - 45 \cdot 5 \\ &\quad - 15 \cdot (5 + 2 \cdot 5) - 80 \cdot 1 \\ &= 960.\end{aligned}$$

Hierzu fügen wir die numerischen Werthe einiger Zahlen τ mit dem Bemerken, dass wieder diejenige Zahl, welche einer α -fachen

Bedingung als i^{te} nachgesetzt ist, angiebt, wieviel Curven τ die α -fache Bedingung erfüllen, und ausserdem die Bedingung ν , eine gegebene Gerade zu schneiden, $(10 - \alpha - i)$ Mal, die Bedingung ρ , eine gegebene Ebene zu berühren, $(i - 1)$ Mal erfüllen.

Tabelle von Zahlen τ .

$$\tau_1 \mu^3 \nu = \tau_2 \mu^3 \rho = \frac{1}{4} \tau_2 \mu^3 w = \frac{1}{2} \tau_2 \mu^3 z = \frac{1}{2} \tau_3 \mu^3 y \\ = 15, 18, 9, 0, 0, 0.$$

$$\tau_1 \mu^2 \nu = \tau_2 \mu^2 \rho = \frac{1}{4} \tau_2 \mu^2 w = \frac{1}{2} \tau_2 \mu^2 z = \frac{1}{2} \tau_3 \mu^2 y \\ = 180, 195, 108, 27, 0, 0, 0.$$

$$\tau_1 \mu \nu = \tau_2 \mu \rho = \frac{1}{4} \tau_2 \mu w = \frac{1}{2} \tau_2 \mu z = \frac{1}{2} \tau_3 \mu y \\ = 1120, 1080, 585, 162, 0, 0, 0, 0.$$

$$\tau_1 \nu = \tau_2 \rho = \frac{1}{4} \tau_2 w = \frac{1}{2} \tau_2 z = \frac{1}{2} \tau_3 y \\ = 4200, 3360, 1620, 405, 0, 0, 0, 0, 0.$$

$$\tau_1 \mu^2 c w \nu = 9, 3, 0, 0.$$

$$\tau_1 \mu^2 c w \nu = 65, 36, 9, 0, 0.$$

$$\tau_1 \mu^2 c w \nu y = 12, 3, 0, 0.$$

$$\tau_3 \mu^2 c y \nu w = 20, 6, 0, 0.$$

$$\tau_3 \mu^2 c w y = 48, 12, 0, 0, 0.$$

$$\tau_3 \mu^2 c w y z = 24, 6, 0, 0.$$

$$\tau_3 \mu^3 y z w = 8, 15, 9, 0.$$

$$\tau_2 \mu^2 c w \nu = 4, 0, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^2 c w = 260, 144, 36, 0, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^2 c w \nu = 48, 12, 0, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^2 y c \nu w = 4, 0, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^2 c w y = 48, 12, 0, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^2 c w z = 130, 72, 18, 0, 0,$$

$$\tau_2 \mu^2 c w y z = 24, 6, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^3 y z w = 12, 6, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^3 w \rho q = 3, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^2 w \rho q = 27, 9, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu w \rho q = 129, 48, 0, 0, 0.$$

$$\tau_2 w \rho q = 305, 99, 0, 0, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^3 w \rho q = 15, 9, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^2 w \rho q = 147, 93, 27, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu w \rho q = 755, 459, 144, 0, 0, 0.$$

$$\tau_2 w \rho q = 2100, 1095, 297, 0, 0, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^3 w q = 33, 48, 27, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^2 w q = 380, 477, 288, 81, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu w q = 2280, 2460, 1431, 432, 0, 0, 0.$$

$$\tau_2 w q = 8120, 6840, 3420, 891, 0, 0, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^3 w_e q_e z = 1, 0.$$

$$\tau_2 \mu^2 w_e q_e z = 9, 3, 0.$$

$$\tau_2 \mu w_e q_e z = 45, 18, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^3 w_e q z = 5, 1, 0.$$

$$\tau_2 \mu^2 w_e q z = 51, 33, 9, 0.$$

$$\tau_2 \mu w_e q z = 271, 171, 54, 0, 0.$$

$$\tau_2 w_e q z = 780, 423, 117, 0, 0, 0.$$

$$\tau_2 \mu^3 w q z = 13, 18, 9, 0.$$

$$\tau_2 \mu^2 w q z = 156, 189, 108, 27, 0.$$

$$\tau_2 \mu w q z = 960, 1008, 567, 162, 0, 0.$$

$$\tau_2 w q z = 3480, 2880, 1404, 351, 0, 0, 0.$$

§ 47.

Die Berechnung der Anzahlen für die drei Ausartungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Die drei Ausartungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, welche den τ_1, τ_2, τ_3 dualistisch entsprechen, haben folgende Beschreibungen.

Jede der drei Ausartungen besteht aus einer in der Ebene μ gelegenen dreifachen Ordnungsgeraden b , auf welcher drei einfache Rangpunkte d liegen. Bei ε_1 fallen die Punkte c und y in den einen Rangpunkt, durch den auch der Strahl q geht, während w und z mit b zusammenfallen, und v ein von den Rangpunkten verschiedener Punkt auf b ist. Bei ε_2 fallen alle drei Seiten w, q, z des Singularitätendreiecks mit b zusammen, während die Ecken desselben drei auf b liegende, und von den Rangpunkten verschiedene Punkte sind. Bei ε_3 fallen c und v zusammen in einen Punkt auf b , der von den 3 Rangpunkten verschieden ist, y fällt in einen von diesen 4 Punkten verschiedenen Punkt auf b , während w und q mit b zusammenfallen, z dagegen die coincidirenden Punkte c und v verbindet, ohne mit b zusammenzufallen.

Hiernach kann man setzen:

$$\varepsilon v^a = 3^a \cdot \varepsilon b^a,$$

$$\varepsilon w = \varepsilon b,$$

$$\varepsilon_1 z = \varepsilon_1 b,$$

$$\varepsilon_2 q = \varepsilon_2 b, \quad \varepsilon_2 z = \varepsilon_2 b,$$

$$\varepsilon_3 q = \varepsilon_3 b,$$

$$\varepsilon_1 y = \varepsilon_1 c, \quad \varepsilon_2 v = \varepsilon_3 c.$$

Ferner führe man durch Formeln, welche den in § 12. entwickelten analog sind, die Potenzen von ϱ auf die Grundbedingungen der Ebene μ , des Strahls b , und auf die drei Bedingungen d_1 , d_2 , d_3 zurück, welche bezüglich aussagen sollen, dass

einer der drei Rangpunkte,
jeder von zwei Rangpunkten,
jeder der drei Rangpunkte

auf einer gegebenen Ebene liegen soll. Bei ε_1 aber, wo der eine Rangpunkt mit c und y coincidirt, soll d_1 resp. d_2 ausdrücken, dass einer der beiden andern Rangpunkte resp. jeder von ihnen auf einer gegebenen Ebene liegt.

Endlich reducire man wieder die mehrfachen, fundamentalen Bedingungen auf die entsprechenden einfachen mit Hülfe der auf μ und b bezüglichen Grundbedingungen. Dann sind schliesslich alle fundamentalen Anzahlen der drei Ausartungen ε_1 , ε_2 , ε_3 auf die in den folgenden drei Tabellen enthaltenen Stammzahlen zurückgeführt. Dort sind nur diejenigen fortgelassen, welche gleich Null sind. Dies sind namentlich alle Zahlen, deren Symbole keine die Ebene μ der Curve festlegende Bedingung enthalten, z. B.

$$\varepsilon_2 B c v d_3.$$

Die in den Tabellen beigesetzten Zahlen entsprechen zum Theil den im vorigen Paragraphen angegebenen Stammzahlen der Ausartungen τ felddualistisch. Die übrigen sind vom Verfasser a posteriori bestimmt. Sie charakterisiren die Lagebeziehungen, welche zwischen den vier Punkten von ε_1 , zwischen den sechs Punkten von ε_2 , und zwischen den fünf Punkten von ε_3 bestehen.

Tabelle der Stammzahlen bei ε_1 .

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \mu^3 b_c q d_2 c &= 1, & \varepsilon_1 \mu^3 b_c q d_2 v &= 1, & \varepsilon_1 \mu^3 b_c q d_1 c v &= 1, \\ \varepsilon_1 \mu^3 b q d_2 c v &= 2.\end{aligned}$$

Jedes Symbol ε_1 muss Null sein, wenn es keine auf die Lage des Strahls q bezügliche Bedingung enthält.

Tabelle der Stammzahlen bei ε_2 .

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 \mu^3 b_c d_3 c &= 4, & \varepsilon_2 \mu^2 b_c d_3 v &= 1, & \varepsilon_2 \mu^3 b_c d_3 y &= 2, \\ \varepsilon_2 \mu^3 b_c d_2 c v &= 3, & \varepsilon_2 \mu^3 b_c d_2 c y &= 2, & \varepsilon_2 \mu^3 b_c d_2 v y &= 1, \\ \varepsilon_2 \mu^3 b_c d_1 c v y &= 1; \\ \varepsilon_2 \mu^3 b d_3 c v &= 7, & \varepsilon_2 \mu^3 b d_3 c y &= 6, & \varepsilon_2 \mu^3 b d_3 v y &= 3, \\ \varepsilon_2 \mu^3 b d_2 c v y &= 5; \\ \varepsilon_2 \mu^3 d_3 c v y &= 4; \\ \varepsilon_2 \mu b_c d_3 c v y &= 9.\end{aligned}$$

Tabelle der Stammzahlen bei ε_3 .

$$\begin{aligned}
\varepsilon_3 \mu^3 b_e z d_3 &= 2, & \varepsilon_3 \mu^3 b_e z d_2 y &= 2, & \varepsilon_3 \mu^3 b_e z d_2 c &= 2, \\
\varepsilon_3 \mu^3 b_e z d_1 c y &= 1; \\
\varepsilon_3 \mu^3 b z d_3 y &= 4, & \varepsilon_3 \mu^3 b z d_3 c &= 4, & \varepsilon_3 \mu^3 b z d_2 c y &= 4; \\
\varepsilon_3 \mu^3 z d_3 c y &= 2, \\
\varepsilon_3 \mu b_p d_3 c y &= 6.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass ein Symbol ε_3 Null sein muss, wenn es keine die Lage des Strahls z feststellende Bedingung enthält.

Durch Angabe der Stammzahlen bei den Ausartungen ε ist nunmehr die Berechnung aller Zahlen ε theoretisch geleistet.

Da die Ausartungen ε den eingehend behandelten Ausartungen τ felddualistisch entsprechen, so unterdrücken wir die Beispiele für die Berechnung der auf sie bezüglichen Anzahlen, und lassen nur die numerischen Werthe einiger Symbole ε hien folgen. Wieder bezeichnet die einer α -fachen Bedingung nachgesetzte i^{te} Zahl die Zahl der Curven ε , welche diese Bedingung erfüllen, $10 - \alpha - i$ gegebene Gerade schneiden, und $i - 1$ gegebene Ebenen berühren.

Tabelle von Zahlen ε .

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 \mu^3 q &= \varepsilon_2 \mu^3 v = \tfrac{1}{2} \varepsilon_2 \mu^3 c = \tfrac{1}{2} \varepsilon_2 \mu^3 y = \tfrac{1}{2} \varepsilon_3 \mu^3 z \\
&= 0, 0, 0, 9, 18, 15.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 \mu^2 q &= \varepsilon_2 \mu^2 v = \tfrac{1}{2} \varepsilon_2 \mu^2 c = \tfrac{1}{2} \varepsilon_2 \mu^2 y = \tfrac{1}{2} \varepsilon_3 \mu^2 z \\
&= 0, 0, 0, 54, 108, 120, 90.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 \mu q &= \varepsilon_2 \mu v = \tfrac{1}{2} \varepsilon_2 \mu c = \tfrac{1}{2} \varepsilon_2 \mu y = \tfrac{1}{2} \varepsilon_3 \mu z \\
&= 0, 0, 0, 162, 324, 360, 270, 175.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 q &= \varepsilon_2 v = \tfrac{1}{2} \varepsilon_2 c = \tfrac{1}{2} \varepsilon_2 y = \tfrac{1}{2} \varepsilon_3 z \\
&= 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 \mu^3 w_e q_e = 0, 0, 1,$$

$$\varepsilon_1 \mu^2 w_e q_e = 0, 0, 3, 6.$$

$$\varepsilon_1 \mu w_e q_e = 0, 0, 9, 18, 15.$$

$$\varepsilon_1 w_e q_e = 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.$$

$$\varepsilon_1 \mu^3 w q = 0, 0, 0, 3, 6.$$

$$\varepsilon_1 \mu^2 w q = 0, 0, 0, 54, 108, 120.$$

$$\varepsilon_1 \mu w q = 0, 0, 0, 162, 324, 360, 270.$$

$$\varepsilon_1 w q = 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.$$

$$\varepsilon_1 \mu w_e q z = 0, 0, 0, 9, 18.$$

$$\varepsilon_1 \mu^2 w q z = 0, 0, 0, 18, 36.$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 \mu^3 yzw &= 0, 0, 0, 2. \\
\varepsilon_2 \mu^2 c w &= 0, 0, 0, 72, 144, 160. \\
\varepsilon_2 \mu^2 c w z &= 0, 0, 0, 24, 48. \\
\varepsilon_2 \mu^2 c w_e v &= 0, 0, 9, 16. * \\
\varepsilon_2 \mu^2 c w v &= 0, 0, 54, 96, 96. \\
\varepsilon_2 \mu^2 c w y &= 0, 0, 36, 72, 80. \\
\varepsilon_2 \mu^2 c w y z &= 0, 0, 12, 24, \\
\varepsilon_2 \mu^2 c w v y &= 0, 18, 36, 38. \\
\varepsilon_3 \mu q_e w_e z &= 0, 0, 0, 2. \\
\varepsilon_3 \mu q w_e z &= 0, 0, 0, 6, 12. \\
\varepsilon_3 \mu^2 q w z &= 0, 0, 0, 12, 24. \\
\varepsilon_3 \mu^3 y z w &= 0, 0, 6, 12. \\
\varepsilon_3 \mu^2 y z c w &= 0, 18, 30, 24.
\end{aligned}$$

§ 48.

Die Berechnung aller fundamentalen Anzahlen der cubischen Plancurve mit Spitze.

Die Paragraphen 43. bis 47. haben uns die Berechnung aller möglichen fundamentalen Anzahlen gelehrt, welche auf die 13 Ausartungen der C_3^3 Bezug haben. Aus diesen Anzahlen kann man mit Hülfe der in § 40. und § 42. abgeleiteten Formeln alle auf die allgemeine C_3^3 bezüglichen, fundamentalen Anzahlen mit vielen Bestätigungen berechnen. Der Verlauf einer solchen Berechnung gestaltet sich etwa folgendermassen.

Der Kürze wegen bezeichnen wir mit dem Ausdruck „Zahlenreihe z “, wo z eine der C_3^3 auferlegte α -fache Bedingung oder das Product eines Ausartungssymbols mit einer $(\alpha - 1)$ -fachen Bedingung sei, den Inbegriff der Zahlenwerthe für die $10 - \alpha$ Symbole:

$$z\nu^{\alpha-\alpha}, z\nu^{\alpha-\alpha}\varrho, z\nu^{\alpha-\alpha}\varrho^2, \dots z\nu^{\alpha-\alpha}\varrho^{\alpha-1}.$$

Man beginnt die Berechnung am zweckmässigsten mit dem einstufigen Systeme $\mu^3\nu^3\varrho^3*$, weil die Zahl ν dieses Systems nach dem Princip der Dualität gleich der Zahl ϱ dieses Systems ist.

Hier ist, wie bei allen Elementarsystemen, nur die Ausartungszahl σ von Null verschieden. Man hat daher bei diesem Systeme nach der σ -Formel:

$$2 \cdot \nu = 2 \cdot \varrho = 2 \cdot \sigma,$$

also

$$\mu^3\nu^4\varrho^3 = \mu^3\nu^3\varrho^4 = \sigma\mu^3\nu^3\varrho^3 = 168.$$

Diese Zahl ist zugleich das ϱ des Systems $\mu^3\nu^4\varrho^2$. Folglich lässt sich

*) Ebenso Zeuthen in den Comptes rendus, tome 74, p. 521.

jetzt nach der σ -Formel die Zahl ν dieses Systems, oder $\mu^3\nu^5\rho^2$ berechnen, und so fort. So liefert die Zahlenreihe $\sigma\mu^3$ die schon von den Herren Maillard und Zeuthen (cf. die allgemeine Einleitung) berechnete Zahlenreihe μ^3 , nämlich:

$$\mu^3 = 24, 60, 114, 168, 168, 114, 60, 24.$$

Die Zahlen dieser Reihe liefern nun die Zahlen μ für alle die Bedingung μ^2 enthaltenden Elementarsysteme. Doch reichen jetzt die Zahlen der Reihe $\sigma\mu^2$ nicht zur Berechnung der Zahlenreihe μ^2 aus, weil bei Voraussetzung einer *beweglichen* Ebene die C_3^3 kein dualistisch sich selbst entsprechendes Gebilde ist, also hier der oben bei der Zahlenreihe μ^3 benutzte Vortheil der Gleichheit je zweier Zahlen zu bestehen aufhört. Man bezeichne daher eine Zahl der Reihe μ^2 zunächst mit x , etwa die Zahl $\mu^2\nu^5$. Dann lässt sich vermittelst der σ -Formel zunächst $\mu^2\nu^7\rho$ durch x ausdrücken, nämlich:

$$\mu^2\nu^7\rho = 2\sigma\mu^2\nu^7 + 3\mu^3\nu^7 - x,$$

wo für $\sigma\mu^2\nu^7$ und $\mu^3\nu^7$ die berechnet vorliegenden Werthe einzusetzen sind. In derselben Weise drücke man $\mu^2\nu^6\rho^2$ durch $\mu^2\nu^7\rho$ aus, und so fort. So erhält man schliesslich alle Zahlen der Reihe μ^2 durch x ausgedrückt. Zur Bestimmung von x kann man nun gelangen durch Einführung irgend einer nicht-elementaren Bedingung, etwa der Bedingung c , dass die Spitze auf einer gegebenen Ebene liege. Man findet zunächst durch die c -Formel

$$3c = 4\nu - \rho - 6\mu - \alpha,$$

aus der Zahlenreihe μ^3 die Zahlenreihe μ^3c , nämlich:

$$\mu^3c = 12, 42, 96, 168, 186, 132, 72.$$

Ferner findet man aus der Zahlenreihe μ^2 jede Zahl der Reihe μ^2c durch x ausgedrückt. Andererseits wende man die σ -Formel auf die μ^2c und Potenzen von ν oder ρ enthaltenden Systeme an, deren Ausartungszahlen ja berechnet vorliegen müssen. Es waren nämlich:

$$\sigma\mu^2c = 338, 506, 569, 488, 335, 188, 86;$$

$$\delta_2\mu^2c = 0, 240, 672, 702, 408, 120, 0;$$

$$\varepsilon_2\mu^2c = 0, 0, 0, 216, 432, 480, 360;$$

und alle übrigen Ausartungszahlen gleich Null. Durch diese Anwendungen der σ -Formel gewinnt man also 7 Gleichungen, deren jede nur x als Unbekannte enthält, also den Werth von x mit 6 Bestätigungen. Hiernach ist auch die Zahlenreihe μ^2 als berechnet zu betrachten. Analog verfähre man bei der Zahlenreihe μ und bei der Reihe derjenigen 11 Zahlen, welche nur Potenzen von ν und ρ enthalten. Nachdem man so die sämmtlichen:

$$8 + 9 + 10 + 11$$

Elementarzahlen der C_3^3 berechnet hat, und bei dieser Gelegenheit auch die 34 Zahlen der Zahlenreihen:

$$\mu^3 c, \mu^2 c, \mu c, c$$

gefunden hat, gelangt man von den Elementarzahlen durch die Vermittelung der w -Formel, v -Formel, y -Formel, z -Formel zu den Zahlenreihen:

$$\mu^3 w, \mu^2 w, \mu w, w,$$

$$\mu^3 v, \mu^2 v, \mu v, v,$$

$$\mu^3 q, \mu^2 q, \mu q, q,$$

$$\mu^3 y, \mu^2 y, \mu y, y,$$

$$\mu^3 z, \mu^2 z, \mu z, z.$$

Dann wendet man auf je zwei benachbarte Zahlen dieser Zahlenreihen die σ -Formel an, und erhält dadurch viele Gleichungen zwischen denjenigen Ausartungszahlen, deren Symbole ausser elementaren Bedingungen eine einfache, auf das Singularitätendreieck bezügliche Bedingung enthalten. Diese Gleichungen kann man theils zu numerischen Controlen, theils zu den früher erwähnten aposteriorischen Bestimmungen über Eigenschaften der Ausartungen verwerthen.

Von jeder der oben erwähnten Zahlenreihen gelangt man dann durch die Vermittelung der c -Formel, w -Formel, v -Formel, q -Formel, y -Formel, z -Formel zu 6 neuen Zahlenreihen, von jeder dieser Zahlenreihen wieder zu 6 neuen, und so fort. Viele der Zahlenreihen, welche man in dieser Weise nach und nach gewinnt, hängen, wie schon in § 38. besprochen ist, durch die Incidenzformeln von schon vorher berechneten Zahlenreihen ab, können also als bekannt angesehen werden, und liefern dadurch die Mittel zu weiteren Bestätigungen resp. aposteriorischen Bestimmungen. So hängt beispielsweise die Zahlenreihe v^3 von den Zahlenreihen μv^2 , $\mu^2 v$, μ^3 ab durch die Formel:

$$v^3 = \mu v^2 - \mu^2 v + \mu^3.$$

Auf dem eben besprochenen Wege gelangt man nicht direct zur Bestimmung der w , q , z enthaltenden Symbole, sondern gewinnt zunächst die w^2 , q^2 , z^2 enthaltenden Symbole. Diese liefern aber die Werthe der gesuchten Symbole durch die Formeln:

$$w^2 = w_e + w_p = w_e + \mu w - \mu^2,$$

$$q^2 = q_e + \mu q - \mu^2,$$

$$z^2 = z_e + \mu z - \mu^2.$$

Oft gelangt man auch zu Zahlenreihen, welche selbstverständlich Null sind, z. B. durch Anwendung der c -Formel auf die Zahlenreihen

$$\mu^2 c^3, \mu c^3, c^3,$$

oder durch Anwendung der w -Formel auf die Zahlenreihen

$$\mu W, W,$$

oder durch Anwendung der v -Formel auf die Zahlenreihe

$$\mu^3 v^2 w.$$

Dadurch erhält man wiederum neue Mittel zu Controlen oder aposteriorischen Bestimmungen.

Hiernach muss man zu jeder Fundamentalzahle von ebensoviel Systemen aus gelangen, wie sie Bedingungen enthält, die auf verschiedene Ecken oder Seiten des Singularitätendreiecks Bezug haben. Z. B. erhält man die Zahlenreihe

$$\mu^2 c^2 v w,$$

sowohl aus den Zahlenreihen $\mu c v w$, und $\mu^2 c v w$, durch die c -Formel, wie auch aus den Zahlenreihen $\mu c^2 w$, und $\mu^2 c^2 w$, durch die v -Formel, wie auch endlich aus der Zahlenreihe $\mu c^2 v w$, durch die w -Formel. Ausserdem kann man noch durch die σ -Formel alle übrigen Zahlen dieser Reihe finden, sobald eine derselben bekannt ist.

Die folgenden Beispiele sollen verdeutlichen, wie man von bekannten Zahlenreihen zu neuen Zahlenreihen gelangt.

Erstes Beispiel.

Wir setzen als bekannt voraus die Zahlenreihe $\mu^3 y z w$, nämlich:

$$\mu^3 y z w = 22, 40, 55, 46, 22.$$

Um von dieser Zahlenreihe zu neuen gelangen zu können, haben wir die Ausartungszahlen der 4 Systeme nöthig, welche definiert werden durch die Bedingungen:

$$\mu^3 y z w v^3, \mu^3 y z w v^2 \varphi, \mu^3 y z w v \varphi^2, \mu^3 y z w \varphi^3.$$

In jedem dieser 4 Systeme sind gleich Null die Ausartungszahlen:

$$\tau_1, \varepsilon_1, \eta_2, \vartheta_1, \vartheta_2.$$

Die 8 übrigen Ausartungszahlen haben in den 4 Systemen folgende Werthe:

$$\begin{aligned} \sigma &= 1, 2, 2, 1; \\ \delta_1 &= 0, 13, 16, 6; \\ \delta_2 &= 0, 1, 4, 0; \\ \tau_2 &= 12, 6, 0, 0; \\ \tau_3 &= 8, 15, 9, 0; \\ \varepsilon_2 &= 0, 0, 0, 2; \\ \varepsilon_3 &= 0, 0, 6, 10; \\ \eta_1 &= 0, 0, 12, 18; \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die σ -Formel:

$$\begin{aligned} v + \varphi - 3\mu &= 2\sigma + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 3\tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 \\ &\quad + 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \vartheta_1 + 3\vartheta_2 + \eta_1 + 3\eta_2, \end{aligned}$$

so erhält man die 4 bestätigenden Identitäten:

$$22 + 40 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 12 + 3 \cdot 8,$$

$$40 + 55 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 15,$$

$$55 + 46 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 6 + 12,$$

$$46 + 22 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 10 + 18.$$

Die Benutzung der c -Formel:

$$3c = 4v - \rho - 6\mu - \delta_1 - 2\delta_2 - 6\varepsilon_1 - 6\varepsilon_2 - 6\varepsilon_3 - \vartheta_1 - 3\vartheta_2 - 2\eta_1 - 6\eta_2$$

gibt für jene 4 Systeme:

$$3c = 4 \cdot 22 - 40 = 48,$$

$$3c = 4 \cdot 40 - 55 - 13 - 2 \cdot 1 = 90,$$

$$3c = 4 \cdot 55 - 46 - 16 - 2 \cdot 4 - 6 \cdot 6 - 2 \cdot 12 = 90,$$

$$3c = 4 \cdot 46 - 22 - 6 - 6 \cdot 2 - 6 \cdot 10 - 2 \cdot 18 = 48.$$

Folglich ist:

$$\mu^3 y z w c v^3 = 16, \quad \mu^3 y z w c v^2 \rho = 30,$$

$$\mu^3 y z w c v \rho^2 = 30, \quad \mu^3 y z w c \rho^3 = 16.$$

Dass die so gefundene Zahlenreihe für $\mu^3 y z w c$, nämlich:

$$16, 30, 30, 16$$

von rechts gelesen so lautet, wie von links gelesen, folgt auch aus dem Princip der Dualität.

Ferner hängt diese Zahlenreihe mit anderen Zahlenreihen zusammen durch die erste Incidenzformel. Nach dieser ist:

$$\begin{aligned} y w z c &= (y^2 + w_e)(c^2 + z_e) \\ &= y^2 c^2 + c^2 w_e + y^2 z_e + w_e z_e. \end{aligned}$$

Man hat nämlich:

$$\mu^3 y^2 c^2 = 2, 6, 6, 4; \quad \mu^3 c w_e = 6, 9, 9, 6;$$

$$\mu^3 y^2 z_e = 4, 9, 9, 4; \quad \mu^3 w_e z_e = 4, 6, 6, 2;$$

also durch Addition

$$\mu^3 y z w c = 16, 30, 30, 16.$$

Wir finden weiter aus jenen 4 Systemen durch die w -Formel:

$$3w = 4 \cdot 40 - 22 - 6 \cdot 12 - 6 \cdot 8 = 18,$$

$$3w = 4 \cdot 55 - 40 - 2 \cdot 13 - 1 - 6 \cdot 6 - 6 \cdot 15 = 27,$$

$$3w = 4 \cdot 46 - 55 - 2 \cdot 16 - 4 - 6 \cdot 9 - 12 = 27,$$

$$3w = 4 \cdot 22 - 46 - 2 \cdot 6 - 18 = 12,$$

Damit haben wir die Zahlenreihe

$$\mu^3 y z w^2 = \mu^3 y z w_e$$

bestimmt, nämlich:

$$\mu^3 y z w_e = 6, 9, 9, 4.$$

Die v -Formel:

$$6v = 7\rho - \nu - 3\mu - 2\delta_1 - 4\delta_2 - 15\tau_1 - 9\tau_2 - 9\tau_3 \\ - 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 - 5\vartheta_1 - 9\vartheta_2 - \eta_1 - 3\eta_2$$

liefert für jene 4 Systeme die 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned} 6v &= 7 \cdot 40 - 22 - 9 \cdot 12 - 9 \cdot 8 &= 78, \\ 6v &= 7 \cdot 55 - 40 - 2 \cdot 13 - 4 \cdot 1 - 9 \cdot 6 - 9 \cdot 15 &= 126, \\ 6v &= 7 \cdot 46 - 55 - 2 \cdot 16 - 4 \cdot 4 - 9 \cdot 9 - 3 \cdot 6 - 12 &= 108, \\ 6v &= 7 \cdot 22 - 46 - 2 \cdot 6 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 10 - 18 &= 42. \end{aligned}$$

Folglich hat die Zahlenreihe $\mu^3 y z w v$ die Werthe:

$$13, 21, 18, 7.$$

Diese Zahlenreihe hängt wieder mit andern Zahlenreihen durch die erste Incidenzformel zusammen, indem man $y z w v$ auf zweifache Weise zerlegen kann, nämlich entweder:

$$y z w v = y z (w_e + v^2) = y z w_e + y z v^2,$$

oder auch:

$$y z w v = (y^2 + w_e) (v^2 + z_e) = y^2 v^2 + y^2 z_e + w_e z_e.$$

Die Anwendung der y -Formel

$$3y = 2\rho + \nu - 3\mu - \delta_1 - 2\delta_2 - 3\tau_1 - 3\tau_2 - 6\tau_3 \\ - 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 - \vartheta_1 - 3\vartheta_2 - 2\eta_1 - 3\eta_2$$

gibt für die 4 Systeme $\mu^3 y z w$ die 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3y &= 2 \cdot 40 + 22 - 3 \cdot 12 - 6 \cdot 8 &= 18, \\ 3y &= 2 \cdot 55 + 40 - 13 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 6 - 6 \cdot 15 &= 27, \\ 3y &= 2 \cdot 46 + 55 - 16 - 2 \cdot 4 - 6 \cdot 9 - 3 \cdot 6 - 2 \cdot 12 &= 27, \\ 3y &= 2 \cdot 22 + 46 - 6 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 10 - 2 \cdot 18 &= 12. \end{aligned}$$

Folglich ist:

$$\mu^3 y^2 z w = 6, 9, 9, 4.$$

Diese Zahlenreihe ist identisch mit der schon bestimmten Zahlenreihe $\mu^3 y z w_e$, da immer:

$$\mu^3 y^2 w = \mu^3 y w_e,$$

weil Punkt y auf Strahl w liegt.

Wir wenden schliesslich auf die 4 Systeme die z -Formel an:

$$3z = 2\nu + \rho - 3\mu - 2\delta_1 - \delta_2 - 3\tau_1 - 3\tau_2 - 3\tau_3 \\ - 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 - 6\varepsilon_3 - 2\vartheta_1 - 3\vartheta_2 - \eta_1 - 3\eta_2,$$

und erhalten die 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3z &= 2 \cdot 22 + 40 - 3 \cdot 12 - 3 \cdot 8 &= 24, \\ 3z &= 2 \cdot 40 + 55 - 2 \cdot 13 - 1 - 3 \cdot 6 - 3 \cdot 15 &= 45, \end{aligned}$$

$$3z = 2 \cdot 55 + 46 - 2 \cdot 16 - 4 - 3 \cdot 9 - 6 \cdot 6 - 12 = 45,$$

$$3z = 2 \cdot 46 + 22 - 2 \cdot 6 - 3 \cdot 2 - 6 \cdot 10 - 18 = 18.$$

Daraus folgt:

$$\mu^3 y z, w = \mu^3 z, y^2 + \mu^3 z, w_c = 8, 15, 15, 6.$$

Zweites Beispiel.

Wir gehen aus von der Zahlenreihe w, qz , und betrachten daher die Systeme, welche ausser w, qz nur Potenzen von v und ρ zu definirenden Bedingungen haben.

In jedem dieser Systeme sind alle Ausartungszahlen ausser σ , τ_2 und δ_1 gleich Null. Diese aber haben folgende Werthe:

$$\sigma w, qz = 12, 24, 28, 20, 12, 7,$$

$$\tau_2 w, qz = 780, 423, 117, 0, 0, 0,$$

$$\delta_1 w, qz = 0, 290, 380, 260, 104, 40.$$

Diese Werthe, in die σ -Formel eingesetzt, bestätigen die als schon gefunden vorausgesetzten Zahlenreihen w, qz und $\mu w, qz$, nämlich:

$$w, qz = 1788, 1950, 1672, 1148, 660, 343, 165,$$

$$\mu w, qz = 458, 575, 551, 416, 257, 138.$$

Aus diesen Zahlenreihen und den obigen Ausartungszahlen findet man 6 neue Zahlenreihen, z. B. durch die c -Formel:

$$c w, qz = 818, 796, 618, 392, 217, 113,$$

ferner durch die w -Formel:

$$w, qz = 444, 540, 486, 324, 168, 79,$$

und durch die q -Formel:

$$w, q^2 z = 684, 729, 621, 432, 258, 139.$$

Drittes Beispiel.

Wir gehen aus von den beiden Zahlenreihen:

$$\mu^2 c w = 656, 1184, 1666, 1662, 1244, 736, 364,$$

$$\mu^3 c w = 52, 106, 166, 166, 106, 52.$$

Um von diesen Zahlenreihen zu neuen zu gelangen, müssen wir die Ausartungszahlen von höherer als der nullten Gattung aus allen denjenigen 6 Systemen kennen, welche ausser $\mu^2 c w$ nur Potenzen von v und ρ zu definirenden Bedingungen haben. Diese Ausartungszahlen sind sämmtlich Null, ausser δ_1 , δ_2 , τ_2 , ε_2 , ϑ_2 , η_2 . Letztere haben die folgenden Werthe:

$$\delta_1 \mu^2 c w = 0, 152, 188, 113, 32, 0,$$

$$\delta_2 \mu^2 c w = 0, 64, 190, 187, 88, 0,$$

$$\tau_2 \mu^2 c w = 260, 144, 36, 0, 0, 0,$$

$$\varepsilon_2 \mu^2 c w = 0, 0, 0, 72, 144, 160,$$

$$\vartheta_2 \mu^2 c w = 240, 456, 324, 108, 0, 0,$$

$$\eta_2 \mu^2 c w = 0, 0, 216, 324, 264, 120.$$

Hierdurch gelangt man zu den folgenden 6 neuen Zahlenreihen.

$$\mu^2 c^2 w = 136, 262, 390, 407, 316, 196,$$

$$\mu^2 c w^2 = 360, 504, 536, 427, 252, 120,$$

$$\mu^2 c w v = 496, 700, 741, 569, 325, 136,$$

$$\mu^2 c w q = 240, 522, 725, 697, 507, 300,$$

$$\mu^2 c w y = 456, 706, 732, 551, 322, 156,$$

$$\mu^2 c w z = 280, 516, 734, 715, 510, 280.$$

§ 49.

Sonstige Mittel für die Berechnung von Anzahlen der cubischen Plancurve mit Spitze.

Schon im IV. Abschnitt ist hervorgehoben, dass das Chasles'sche Correspondenzprincip nicht die einzige Quelle ist, aus welcher Formeln zwischen Bedingungssymbolen und Ausartungssymbolen fließen. Derartige Formeln kann man namentlich auch erhalten durch die Anwendung des *Princips von der Erhaltung der Anzahl* und durch die von mir in den Math. Annalen Bd. XII. p. 180 u. f. auf *Gruppen ausgedehnten Correspondenzsätze*. Dieses soll hier für die C_3^3 gezeigt werden, obwohl die Formeln des § 40. und des § 42. für die Berechnung der Fundamentalzahlen der C_3^3 vollkommen ausreichen.

Wir behalten für die Bedingungen und die Ausartungen der C_3^3 die in den früheren Paragraphen eingeführten Bezeichnungen bei, setzen zunächst ein beliebiges zweistufiges Curvensystem voraus, und benutzen das Princip von der Erhaltung der Anzahl, indem wir den Ebenen und Geraden, welche durch die Bedingungen

$$c, v, y, w, q, z, v, q$$

gegeben sind, *speciellere Lagen* zu einander ertheilen.

Man lasse die beiden Ebenen der zusammengesetzten Bedingung cv in eine einzige Ebene zusammenfallen. Dann wird cv durch jede Curve des zweistufigen Systems erfüllt, welche Punkt c und Punkt v auf dieser Ebene hat, also durch jede Curve, deren Strahl z in dieser Ebene liegt, ferner durch jede Ausartung σ , deren Rangpunkt in diese Ebene fällt, endlich überhaupt durch jede Ausartung, welche die Punkte c und v in einen Punkt vereinigt, und diesen Punkt auf jene Ebene wirft. Folglich ist:

$$1) \quad cv = z_e + \sigma d + \delta_1 e + \tau_2 e + \tau_3 e + \varepsilon_3 e.$$

Diese Formel hat einen leicht erkennbaren Zusammenhang mit der Formel 1), des § 40., und die Coefficienten eines und desselben Ausartungssymbols müssen in beiden Formeln übereinstimmen. Analog erhält man die der Formel 2) des § 40. entsprechende Formel, indem man die beiden Geraden der zusammengesetzten Bedingung wq zusammenfallen lässt:

$$2) \quad wq = y^2 + \mu^2 + \sigma a + \delta_2 b + \tau_3 b + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 b.$$

Die Bedingung μ^2 war rechts hinzuzufügen, weil wq auch durch jede Curve erfüllt wird, deren Ebene durch die Gerade geht, welche die beiden gegebenen Geraden in sich vereinigt.

Lässt man die beiden Ebenen der zusammengesetzten Bedingung vy zusammenfallen, so erhält man die der Formel 3) in § 40. entsprechende Formel:

$$3) \quad vy = w_e + \sigma d + \delta_1 e + \tau_2 e + \vartheta_2 e + \eta_2 e.$$

Den Formeln 4), 5), 6) des § 40. entsprechen:

$$4) \quad qz = c^2 + \mu^2 + \sigma a + \delta_2 b + \varepsilon_2 b + \vartheta_2 b + \eta_2 b,$$

$$5) \quad yc = q_e + \sigma d + \delta_1 e + \tau_1 e + \tau_2 e + \varepsilon_1 c,$$

$$6) \quad zw = v^2 + \mu^2 + \sigma a + \delta_2 b + \tau_1 w + \varepsilon_1 b + \varepsilon_2 b.$$

Weitere sechs Formeln gewinnt man, wenn man die beiden Ebenen jeder der 3 Bedingungen

$$\varrho c, \varrho v, \varrho y,$$

und die beiden Geraden jeder der 3 Bedingungen:

$$vw, vq, vz$$

sich vereinigen lässt. Die dann resultirenden Formeln entsprechen den Formeln 17) bis 22) des § 40., und heissen:

$$7) \quad \varrho c = 3q_e + \sigma d + 2\delta_1 e + 3\tau_1 e + 3\tau_2 e + 3\tau_3 e + 3\varepsilon_1 c + \eta_1 d,$$

$$8) \quad vw = 3v^2 + 3\mu^2 + \sigma a + 2\delta_2 b + 3\tau_1 w + 3\varepsilon_1 b + 3\varepsilon_2 b + 3\varepsilon_3 b + \vartheta_1 a,$$

$$9) \quad \varrho v = 3w_e + \sigma d + 2\delta_1 e + 3\tau_2 e + 3\tau_3 e + 3\vartheta_2 e + \eta_1 e + 3\eta_2 e,$$

$$10) \quad vq = 3c^2 + 3\mu^2 + \sigma a + 2\delta_2 b + 3\varepsilon_2 b + 3\varepsilon_3 b + \vartheta_1 b + 3\vartheta_2 b + 3\eta_2 b,$$

$$11) \quad \varrho y = 2w_e + q_e + \sigma d + 2\delta_1 e + 3\tau_1 e + 3\tau_2 e + \varepsilon_1 c + \vartheta_1 e + 3\vartheta_2 e + 2\eta_2 e,$$

$$12) \quad vz = 2c^2 + v^2 + 3\mu^2 + \sigma a + 2\delta_2 b + \tau_1 w + 3\varepsilon_1 b + 3\varepsilon_2 b + 2\vartheta_2 b + \eta_1 b + 3\eta_2 b.$$

Um Formeln zu erhalten, welche den Formeln 15) und 16) des § 40. entsprechen, haben wir die beiden Geraden der Bedingung v^2 resp. die beiden Ebenen der Bedingung ϱ^2 zusammenzulegen. Wir legen die beiden Geraden der Bedingung v^2 in die Gerade g derartig unendlich nahe, dass sie sich schneiden, und dass sowohl ihr Schnittpunkt, wie auch ihre Verbindungsebene bestimmt sind. Dann wird v^2 von jeder Curve erfüllt, welche durch den Schnittpunkt geht, d. h., welche die Bedingung P erfüllt, ferner von jeder Curve, welche die

Verbindungsebene in einem Punkte der Geraden g berührt, ferner sechsmal von jeder Curve, die ihre Ebene durch g schickt, ferner dreimal von jeder Curve, die ihre Spitze auf g hat, und endlich auch von jeder Ausartung, die eine mehrfache Ordnungsgerade durch g schickt. Bezeichnen wir daher mit ϱ , die zweifache Bedingung, dass die Curve eine gegebene Ebene in einem Punkte einer auf dieser Ebene gegebenen Geraden berührt, und beachten wir, dass

$$P = \mu\nu - 3\mu^2$$

ist, so erhalten wir:

$$13) \quad \nu^2 = \mu\nu + 3\mu^2 + 3c^2 + \varrho, \\ + (\delta_1 + 2\delta_2 + 6\varepsilon_1 + 6\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 + \vartheta_1 + 3\vartheta_2 + 2\eta_1 + 6\eta_2)b,$$

eine Formel, welche, für Elementarsysteme specialisirt, schon in § 7. als Beispiel für die Anwendung des Princips von der Erhaltung der Anzahl angeführt ist.

Legt man dann die Ebenen der Bedingung ϱ^2 derartig unendlich nahe, dass sie eine bestimmte Schnittgerade haben, so bekommt man analog der Formel 13):

$$14) \quad \varrho^2 = 3w_e + \varrho + (2\delta_1 + \delta_2 + 6\tau_1 + 6\tau_2 + 6\tau_3)e \\ + (2\vartheta_1 + 6\vartheta_2 + \eta_1 + 3\eta_2)e.$$

Man könnte fragen, ob durch das Princip der speciellen Lage nicht auch Formeln abgeleitet werden können, welche etwa den Formeln 7) bis 12) des § 40. in derselben Weise entsprechen, wie die eben abgeleiteten 14 Formeln den Formeln 1) bis 6), 17) bis 22), 15) und 16) des § 40. entsprechen. Dies ist in der That möglich. Doch würden dann in die Formeln Bedingungen eintreten, welche wir bisher nicht berücksichtigt haben. Wir bekämen z. B. die der Formel 7) des § 40. entsprechende Formel, wenn wir die Gerade der Bedingung νc mit der Ebene dieser Bedingung zur Incidenz brächten. Doch wäre dann die zweifache Bedingung einzuführen, welche verlangt, dass die C_3^3 ihre Spitze in einer gegebenen Ebene hat, und zugleich ihren dritten Schnittpunkt mit dieser Ebene auf einer in der Ebene gegebenen Geraden hat.

Die obigen Formeln, denen noch viele Formeln höherer Dimension hinzugefügt werden könnten, sind vom Verfasser theils zur Ableitung von Fundamentalzahlen, theils zur numerischen Controle, theils zu aposteriorischen Bestimmungen *mitbenutzt*. Zur Verdeutlichung mögen die folgenden Beispiele dienen.

Erstes Beispiel.

Wir betrachten als bekannt die Zahlenreihen $\mu^2, c^2, \sigma a$, nämlich:

$$\mu^2 = 384, 864, 1488, 2022, 2016, 1524, 924, 468, 192;$$

$$c^2 = 1168, 2896, 4592, 5408, 4952, 3708, 2376, 1392, 768;$$

$$\sigma a = 5912, 8840, 9980, 8640, 6008, 3542, 1890, 935, 440;$$

und finden daraus durch Formel 10) die Zahlenreihe νq , nämlich:

$$\nu q = 10568, 20120, 28220, 30930, 26912, 19238, 11790, 6515, 3320, 1592.$$

Zweites Beispiel.

Wir wenden die Formel 2) an auf die 3 zweistufigen Systeme aller Curven, welche die Bedingungen

$$\mu^3 y z w v^2, \mu^3 y z w v \varrho, \mu^3 y z w \varrho^2$$

erfüllen. Für diese Systeme sind die Zahlen $y^2, \mu^2, \sigma a, \delta_2 b, \varepsilon_2 b$ gleich Null, während $\tau_3 b$ bezüglich die Werthe

$$3, 3, 0,$$

$\varepsilon_3 b$ die Werthe

$$0, 0, 2$$

hat. Daraus folgt die Zahlenreihe

$$\mu^3 y z w^2 q = 3, 3, 2.$$

Drittes Beispiel.

Durch die Formel 2) findet man aus den Zahlenreihen:

$$\mu^3 c y^2 = 12, 30, 36, 24, 12,$$

$$\sigma \mu^3 c a = 7, 13, 16, 13, 7,$$

$$\delta_2 \mu^3 c b = 0, 6, 21, 18, 0,$$

$$\varepsilon_2 \mu^3 c b = 0, 0, 0, 12, 24,$$

die Zahlenreihe

$$\mu^3 c w q = 19, 49, 73, 67, 43.$$

Viertes Beispiel.

Die Formeln 13) und 14) können benutzt werden, um Anzahlen zu bestimmen, welche die neu eingeführte Bedingung ϱ , mitenthalten. Wollte man diese Bedingung von vornherein mit berücksichtigen, so würde dies keine Schwierigkeiten veranlassen, da sich bei jeder der 13 Ausartungen leicht ergibt, wie dieselbe ϱ erfüllt. Wir leiten hier nur die Zahlenreihe ϱ , sowohl durch die Formel 13) wie durch die Formel 14) ab, und benutzen also die Zahlenreihen:

$$\nu^2 = 17760, 31968, 44304, 49008, 43104, 30960, 18888, 10284, 5088,$$

$$\mu \nu = 3216, 6528, 10200, 12708, 12144, 9156, 5688, 3090, 1488,$$

$$\mu^2 = 384, 864, 1488, 2022, 2016, 1524, 924, 468, 192,$$

$$c^2 = 1168, 2896, 4592, 5408, 4952, 3708, 2376, 1392, 768,$$

$$\varrho^2 = 44304, 49008, 43104, 30960, 18888, 10284, 5088, 2304, 960,$$

$$w = 11472, 11616, 9080, 5650, 2944, 1392, 596, 230, 80.$$

Dann erhalten wir durch beide Formeln übereinstimmend die Zahlenreihe:

$$q_2 = 9888, 14160, 15864, 14010, 10056, 6108, 3300, 1614, 720.$$

Fünftes Beispiel

Formel 13) liefert aus den Zahlenreihen:

$$\begin{aligned}\mu^3 c w v v^2 &= 43, 67, 73, \\ \delta_1 \mu^3 c w v b &= 0, 1, 0, \\ \delta_2 \mu^3 c w v b &= 1, 3, 0, \\ \varepsilon_2 \mu^3 c w v b &= 0, 0, 3, \\ \vartheta_1 \mu^3 c w v b &= 4, 9, 9, \\ \vartheta_2 \mu^3 c w v b &= 5, 3, 0, \\ \eta_2 \mu^3 c w v b &= 0, 3, 5,\end{aligned}$$

die neue Zahlenreihe:

$$\mu^3 c w v q_2 = 22, 24, 16.$$

Dieselbe Zahlenreihe erhält man auch durch Formel 14) aus:

$$\begin{aligned}\mu^3 c w v q^2 &= 73, 49, 19, \\ \delta_2 \mu^3 c w v e &= 5, 4, 0, \\ \tau_1 \mu^3 c w v e &= 1, 0, 0, \\ \vartheta_1 \mu^3 c w v e &= 8, 6, 0, \\ \vartheta_2 \mu^3 c w v e &= 4, 0, 0, \\ \eta_2 \mu^3 c w v e &= 0, 3, 1.\end{aligned}$$

Sechstes Beispiel.

Die Formel 13) liefert aus den Zahlenreihen:

$$\begin{aligned}\mu^3 c w v^2 &= 52, 106, 166, 166, \\ \delta_1 \mu^3 c w b &= 0, 0, 5, 0, \\ \delta_2 \mu^3 c w b &= 0, 1, 4, 0, \\ \varepsilon_2 \mu^3 c w b &= 0, 0, 0, 4, \\ \vartheta_2 \mu^3 c w b &= 6, 15, 9, 0, \\ \eta_2 \mu^3 c w b &= 0, 0, 12, 18,\end{aligned}$$

die dualistisch sich selbst entsprechende Zahlenreihe:

$$\mu^2 q_2 c w = 34, 54, 54, 34,$$

Die Formeln 13) und 14) hatten uns zu der Bedingung q_2 geführt, welche verlangt, dass die Plancurve eine gegebene Ebene in einem Punkte einer auf der Ebene gelegenen Geraden berührt. Die Definition dieser Bedingung steht in *nahem Zusammenhang mit der Definition der elementaren Bedingungen*. Es liegt daher nahe, *alle Bedingungen*

zu untersuchen, welche in derselben Weise den elementaren Bedingungen verwandt sind. Für den Kegelschnitt ist dies schon in § 37. geschehen. Wir legen jetzt allgemeiner die *Plancurve* n^{ter} Ordnung m^{ten} Ranges zu Grunde, und bezeichnen für sie als *den elementaren Bedingungen verwandt* jede Bedingung, welche eine Grundbedingung ist für das Gebilde Γ , das aus der Ebene μ der Plancurve, einer Tangente g , und deren Berührungspunkte p besteht. Da die Plancurve ∞^1 solcher Gebilde Γ besitzt, so liefert jede solchem Gebilde auferlegte i -fache Bedingung B der Plancurve eine $(i-1)$ -fache Bedingung, die dann mit (B) bezeichnet werden soll. Die zweifachen Bedingungen:

$$p^2, g_e, \mu p, \mu g$$

liefern der Plancurve bezüglich die Bedingungen:

$$(p^2), (g_e), (\mu p), (\mu g),$$

für welche die Symbole:

$$\nu, \varrho, n \cdot \mu, m \cdot \mu$$

eingeführt sind. (μ^2) ist gleich Null zu setzen, weil in einem einstufigen Curvensysteme keine Curve eine gegebene zweifache Bedingung erfüllen kann. Deshalb ist, gemäss den allgemeinen Incidenz-Formeln:

$$(g_p) = (\mu g) - (\mu^2) = m \cdot \mu,$$

ferner ist auch:

$$(pg) = (p^2) + (g_e) = \nu + \varrho.$$

Für die zweifachen Bedingungen:

$$(p^3), (g_e), (pg_e)$$

sind die Symbole:

$$P, t, \varrho_g$$

eingeführt. Nun hat man nach den Incidenz-Formeln:

$$(p^3) = (\mu p^2) - (\mu^2 p) + (\mu^3),$$

also, da für (μ^3) wieder Null zu setzen ist, die bekannte*) Formel:

$$P = \mu \nu - n \cdot \mu^2.$$

Ferner wird aus:

$$(g_e) = (\mu g_e) - (\mu^3)$$

die bekannte Formel:

$$t = \mu \varrho.$$

Die Bedingung ϱ_g lässt sich nicht durch μ, ν, ϱ ausdrücken. Wohl aber kann man alle den elementaren Bedingungen verwandte Bedingungen als Functionen von

$$\varrho_g, \mu, \nu, \varrho$$

darstellen. Nämlich:

*) Diese und einige andere Formeln sind schon in § 10. ausgesprochen. Die obige Betrachtung wirft ein neues Licht auf den Zusammenhang der Formeln des § 10. mit denen des § 9.

$$(pg_p) = (p^3) + (g_s) = P + t = uv - n \cdot \mu^2 + \mu \varrho,$$

$$(p^2g) = (pg_s) + (p^3) = \varrho_p + P = \varrho_p + uv - n \cdot \mu^2.$$

Ferner:

$$(G) = (\mu^2 g_s) - (\mu^3 g)$$

oder:

$$T = \mu^2 \varrho - m \cdot \mu^3,$$

$$(p^2 g_p) = (pg_s) = (\mu pg_s) - (\mu^3 p) = \mu \varrho_p - n \cdot \mu^3,$$

$$\begin{aligned} 15) \quad (p^3 g) &= (p^2 g_s) = (pg_s) - (G) = (\mu \varrho_p - n \cdot \mu^3) - (\mu^2 \varrho - m \cdot \mu^3) \\ &= \mu \varrho_p - \mu^2 \varrho - n \cdot \mu^3 + m \cdot \mu^3. \end{aligned}$$

Endlich:

$$\begin{aligned} 16) \quad (pG) &= (p^2 g_s) = (p^3 g_p) = (p\mu^2 g_s) - (p\mu^3 g) \\ &= \mu^2 \varrho_p - (\mu^3 v + \mu^3 \varrho) \\ &= \mu^2 \varrho_p - \mu^3 v - \mu^3 \varrho. \end{aligned}$$

Man beachte namentlich die beiden numerirten Formeln, die in Worten lauten, wie folgt:

15) Die dreifache Bedingung, dass eine Plancurve n^{ter} Ordnung, m^{ten} Ranges eine gegebene Ebene in einem gegebenen Punkte berühre, hat den Modul:

$$\mu \varrho_p - \mu^2 \varrho - n \cdot \mu^3 + m \cdot \mu^3.$$

16) Die vierfache Bedingung, dass eine Plancurve eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühre, hat den Modul:

$$\mu^2 \varrho_p - \mu^3 v - \mu^3 \varrho.$$

Die letztgenannte Bedingung kann man auch dadurch mit den übrigen in Verbindung bringen, dass man den beiden Punkten der Bedingung P^2 die specielle Lage zweier unendlich naher Punkte ertheilt und das Princip von der Erhaltung der Anzahl anwendet. Dann bekommt man für die C_3^3 :

$$(\mu v - 3\mu^2)^2 = (\mu^2 \varrho_p - \mu^3 v - \mu^3 \varrho) + 3\mu c^3 + \alpha_x,$$

wo α_x die Anzahl aller hinlänglich oft gerechneten Ausartungen ist, welche eine mehrfache Ordnungsgerade durch einen gegebenen Punkt schicken und dabei auch ihre Ebene durch einen zweiten gegebenen Punkt schicken. Diese Formel und die mit μ^2 multiplicirte Formel 13) sind von einander abhängig.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, wie auch die Correspondenzformeln für *Punktgruppen* zu Formeln zwischen Bedingungssymbolen und Ausartungssymbolen führen.

Betrachten wir je 3 in gerader Linie befindliche Punkte einer Plancurve C_3^3 als Punktgruppe, so erzeugt ein einstufiges Curvensystem ein dreistufiges System solcher Punktgruppen. Wendet man auf dieses System die Correspondenzformeln an, welche ich in den Math. Annalen

Bd. XII, p. 187 entwickelt habe, d. h. setzt man in den Formeln 47) und 48) (p. 196 desselben Bandes) $n = 3$, $p = 0$, $b = 0$, so erhält man die Formeln:

$$17) \quad 9\nu - 12\mu = w + 8q + X,$$

$$18) \quad 12\nu - 21\mu = v + 8c + 3\sigma + X',$$

wo X und X' Zahlen sind, die von den Anzahlen der im Systeme etwa vorhandenen Ausartungen erster und zweiter Gattung abhängen.

Setzt man ferner ein zweistufiges Curvensystem voraus und wendet die Formel 49) auf p. 196 in Bd. XII an, so erhält man:

$$19) \quad 3\nu^2 - 9\mu\nu + 9\mu^2 = w_e + 8q_e + X''$$

wo X'' wieder von den Ausartungen von höherer als der nullten Gattung abhängt.

Die Formeln 17) und 18) stehen im Einklang mit den Formeln 26) bis 30) des § 40., die Formel 19) mit den Formeln 7) und 9) des vorliegenden Paragraphen. Dieser Umstand kann benutzt werden, um die Coefficienten zu bestimmen, mit welchen die Ausartungszahlen in die mit X , X' , X'' bezeichneten Ausdrücke eintreten.

Den Formeln 17), 18), 19) könnten noch viele andere Formeln hinzugefügt werden, welche in ähnlicher Weise aus Anwendungen der Correspondenzformeln auf Punktgruppen hervorgehen. Man könnte z. B. für ein zweistufiges Curvensystem die Zahl der Geraden ausdrücken, welche in einer gegebenen Ebene liegen und auf welchen zwei Curvenschnittpunkte mit einem Punkte der Wendetangente coincidiren. Doch wollen wir auf diese Anwendungen hier nicht weiter eingehen.

§ 50.

Tabellen von Fundamentalzahlen der cubischen Plancurve mit Spitze.

Gegen tausend der unten folgenden Fundamentalzahlen hat der Verfasser schon im Jahre 1874 bei der Abfassung seiner Preisschrift berechnet, weil er diese Zahlen damals zur Berechnung der Anzahlen der cubischen Plancurve mit Doppelpunkt, sowie der Anzahlen der cubischen Raumcurve *nöthig* hatte. Diese später viel benutzten Anzahlen der C_3^3 sind unten in der ersten Tabelle zusammengestellt. Im Jahre 1875 berechnete der Verfasser, hauptsächlich um über die Natur der 13 Ausartungen sichere Aufschlüsse zu erlangen, die *sämmtlichen Fundamentalzahlen der C_3^3 bei fester Ebene*. Diese schon durch die Gött. Nachr. (Maiheft 1875) publicirten Zahlen bilden den Inhalt der zweiten Tabelle. Die Zahlen der dritten Tabelle endlich habe ich theils früher, theil serst im letzten Jahre berechnet, und zwar auch hauptsächlich deshalb, um daraus Rückschlüsse auf Eigenschaften der Ausartungen machen zu können. Auch der Berechnung derjenigen Fundamentalzahlen, welche in keiner

der drei Tabellen angeführt sind, steht sachlich kein Hinderniss entgegen, da die vorangehenden Paragraphen dieses Abschnitts die Ausrechnung sämtlicher Fundamentalzahlen auf das Einmaleins reduciren.

Der bessern Uebersicht wegen sind mehrere Fundamentalzahlen sowohl in der ersten wie in der zweiten Tabelle angeführt.

Zu beachten ist, dass immer die einer α -fachen Bedingung nachgesetzte i^e Zahl angiebt, wieviel cubische Plancurven mit Spitze diese α -fache Bedingung erfüllen, $11 - \alpha - i$ gegebene Gerade und $i - 1$ gegebene Ebenen berühren.

Erste Tabelle.

Die im Folgenden benutzten Anzahlen.

Die Zahlenreihen sind mit Rücksicht auf die Benutzung bei der Berechnung der Zahlen γ des § 56. geordnet.

$$\begin{aligned} \mu^3 &= 24, 60, 114, 168, 168, 114, 60, 24, \\ \mu^3 c &= 12, 42, 96, 168, 186, 132, 72, \\ \mu^3 c^2 &= 2, 8, 20, 38, 44, 32; \\ \mu^2 &= 384, 864, 1488, 2022, 2016, 1524, 924, 468, 192, \\ \mu^2 c &= 176, 536, 1082, 1688, 1844, 1496, 956, 512, \\ \mu^2 c^2 &= 32, 110, 240, 400, 452, 372, 240, \\ \mu^2 c^3 &= 2, 8, 20, 38, 44, 32; \\ \mu &= 3216, 6528, 10200, 12708, 12144, 9156, 5688, 3090, 1488, 624, \\ \mu c &= 1344, 3576, 6388, 8852, 9108, 7264, 4706, 2688, 1392, \\ \mu c^2 &= 248, 740, 1416, 2076, 2216, 1818, 1200, 696, \\ \mu c^3 &= 20, 68, 144, 232, 266, 240, 168. \end{aligned}$$

Die Zahlen v^{10} , $v^9 q$, $\dots$, q^{10} sind 17760, 31968, 44304, 49008, 43104, 30960, 18888, 10284, 5088, 2304, 960,

$$\begin{aligned} c &= 6592, 14800, 22336, 25560, 22864, 16672, 10380, 5836, 3040, 1504, \\ c^2 &= 1168, 2896, 4592, 5408, 4952, 3708, 2376, 1392, 768, \\ c^3 &= 96, 264, 448, 556, 540, 436, 304, 208. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^3 q &= 18, 51, 105, 168, 177, 123, 66, \\ \mu^3 q c &= 7, 25, 58, 85, 79, 52, \\ \mu^3 q c^2 &= 1, 4, 10, 13, 10; \\ \mu^2 q &= 268, 670, 1228, 1771, 1846, 1453, 910, 478, \\ \mu^2 q c &= 98, 302, 613, 852, 839, 628, 382, \\ \mu^2 q c^2 &= 16, 55, 120, 164, 154, 106, \\ \mu^2 q c^3 &= 1, 4, 10, 13, 10; \end{aligned}$$

$$\mu q = 2088, 4620, 7550, 9769, 9618, 7448, 4735, 2655, 1344,$$

$$\mu qc = 708, 1890, 3361, 4296, 4092, 3073, 1935, 1086,$$

$$\mu qc^2 = 118, 349, 660, 846, 799, 603, 384,$$

$$\mu qc^3 = 9, 30, 62, 79, 75, 54;$$

$$q = 10568, 20120, 28220, 30930, 26912, 19238, 11790, 6515, \\ 3320, 1592,$$

$$qc = 3208, 7060, 10270, 11058, 9354, 6558, 4025, 2270, 1208,$$

$$qc^2 = 508, 1210, 1812, 1944, 1638, 1163, 740, 452,$$

$$qc^3 = 38, 98, 152, 162, 137, 98, 68.$$

$$\mu^3 w = 72, 132, 186, 168, 96, 42, 12,$$

$$\mu^3 wc = 52, 106, 166, 166, 106, 52,$$

$$\mu^3 wc^2 = 10, 22, 37, 40, 28;$$

$$\mu^2 w = 1024, 1696, 2200, 2014, 1360, 724, 316, 100,$$

$$\mu^2 wc = 656, 1184, 1666, 1662, 1244, 736, 364,$$

$$\mu^2 wc^2 = 136, 262, 390, 407, 316, 196,$$

$$\mu^2 wc^3 = 10, 22, 37, 40, 28;$$

$$\mu w = 7632, 11424, 13544, 11956, 8160, 4532, 2224, 954, 336,$$

$$\mu wc = 4320, 6912, 8680, 8184, 6036, 3640, 1962, 960,$$

$$\mu wc^2 = 904, 1528, 2010, 1980, 1528, 954, 528,$$

$$\mu wc^3 = 84, 156, 224, 241, 210, 144;$$

$$w = 36704, 48416, 50576, 41136, 26912, 14864, 7416, 3356, 1376, 512;$$

$$wc = 17536, 23728, 24688, 20292, 13728, 8016, 4268, 2108, 992,$$

$$wc^2 = 3472, 4864, 5160, 4374, 3096, 1892, 1064, 560,$$

$$wc^3 = 320, 476, 530, 486, 380, 260, 176.$$

$$\mu^3 q_c = 5, 17, 38, 47, 35, 20,$$

$$\mu^3 q_c c = 1, 4, 10, 13, 10;$$

$$\mu^2 q_c = 66, 192, 373, 452, 387, 256, 142,$$

$$\mu^2 q_c c = 14, 47, 100, 126, 110, 74,$$

$$\mu^2 q_c c^2 = 1, 4, 10, 13, 10;$$

$$\mu q_c = 460, 1150, 1945, 2220, 1876, 1255, 735, 390,$$

$$\mu q_c c = 98, 281, 516, 614, 533, 363, 216,$$

$$\mu q_c c^2 = 9, 30, 62, 79, 75, 54;$$

$$q_c = 2040, 4164, 5678, 5650, 4402, 2850, 1649, 878, 440,$$

$$q_c c = 412, 946, 1364, 1388, 1098, 727, 436, 244,$$

$$q_c c^2 = 38, 98, 152, 162, 137, 98, 68.$$

$$\begin{aligned}
\mu^3 w_e &= 32, 44, 38, 20, 8, 2, \\
\mu^3 w_e c &= 28, 40, 37, 22, 10, \\
\mu^3 w_e c^2 &= 6, 9, 9, 6; \\
\mu^2 w_e &= 408, 516, 454, 290, 144, 58, 16, \\
\mu^2 w_e c &= 308, 398, 370, 261, 146, 68, \\
\mu^2 w_e c^2 &= 70, 94, 91, 67, 40, \\
\mu^2 w_e c^3 &= 6, 9, 9, 6; \\
\mu w_e &= 2728, 3148, 2674, 1734, 904, 418, 168, 54, \\
\mu w_e c &= 1772, 2054, 1812, 1262, 722, 372, 174, \\
\mu w_e c^2 &= 402, 480, 440, 322, 192, 102, \\
\mu w_e c^3 &= 42, 54, 54, 45, 30; \\
w_e &= 11472, 11616, 9080, 5650, 2944, 1392, 596, 230, 80, \\
w_e c &= 5968, 5752, 4442, 2846, 1584, 808, 382, 172, \\
w_e c^2 &= 1256, 1214, 962, 648, 380, 206, 104, \\
w_e c^3 &= 126, 126, 108, 81, 54, 36.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu^3 q w &= 32, 71, 119, 128, 89, 47, \\
\mu^3 q w c &= 19, 49, 73, 67, 43, \\
\mu^3 q w c^2 &= 3, 9, 12, 9; \\
\mu^2 q w &= 444, 864, 1288, 1349, 1050, 649, 334, \\
\mu^2 q w c &= 240, 522, 725, 697, 507, 300, \\
\mu^2 q w c^2 &= 44, 107, 146, 134, 90, \\
\mu^2 q w c^3 &= 3, 9, 12, 9; \\
\mu q w &= 3224, 5540, 7352, 7225, 5498, 3404, 1855, 907, \\
\mu q w c &= 1564, 2908, 3679, 3404, 2464, 1489, 803, \\
\mu q w c^2 &= 296, 599, 756, 691, 503, 311, \\
\mu q w c^3 &= 25, 58, 73, 67, 47; \\
q w &= 14904, 21960, 24700, 21416, 14920, 8774, 4650, 2255, 1016, \\
q w c &= 6104, 9140, 9664, 7884, 5290, 3114, 1685, 854, \\
q w c^2 &= 1084, 1696, 1760, 1418, 970, 599, 356, \\
q w c^3 &= 88, 148, 150, 122, 85, 58.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu^3 q_e w &= 9, 27, 36, 27, 15, \\
\mu^3 q_e w c &= 3, 9, 12, 9; \\
\mu^2 q_e w &= 104, 260, 335, 290, 191, 104, \\
\mu^2 q_e w c &= 34, 85, 109, 94, 62, \\
\mu^2 q_e w c^2 &= 3, 9, 12, 9; \\
\mu q_e w &= 660, 1380, 1669, 1424, 936, 535, 275, \\
\mu q_e w c &= 212, 443, 532, 450, 293, 167, \\
\mu q_e w c^2 &= 25, 58, 73, 67, 47;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_e w &= 2632, 4276, 4504, 3510, 2194, 1222, 621, 294, \\ q_e w c &= 764, 1220, 1230, 932, 590, 339, 180, \\ q_e w c^2 &= 88, 148, 150, 122, 85, 58. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^3 q w_e &= 18, 27, 27, 18, 9, \\ \mu^3 q w_e c &= 15, 18, 15, 9, \\ \mu^3 q w_e c^2 &= 3, 3, 2; \\ \mu^2 q w_e &= 212, 287, 281, 209, 125, 62, \\ \mu^2 q w_e c &= 151, 175, 154, 106, 60, \\ \mu^2 q w_e c^2 &= 33, 36, 30, 19, \\ \mu^2 q w_e c^3 &= 3, 3, 2; \\ \mu q w_e &= 1326, 1623, 1507, 1100, 657, 346, 163, \\ \mu q w_e c &= 803, 875, 748, 513, 296, 153, \\ \mu q w_e c^2 &= 175, 184, 154, 106, 63, \\ \mu q w_e c^3 &= 18, 18, 15, 10; \\ q w_e &= 5116, 5410, 4504, 3024, 1708, 871, 405, 174, \\ q w_e c &= 2366, 2246, 1716, 1094, 617, 321, 156, \\ q w_e c^2 &= 460, 418, 312, 203, 121, 70, \\ q w_e c^3 &= 42, 36, 27, 18, 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^3 q_e w_e &= 9, 9, 6, 3, \\ \mu^3 q_e w_e c &= 3, 3, 2; \\ \mu^2 q_e w_e &= 81, 81, 63, 39, 20, \\ \mu^2 q_e w_e c &= 27, 27, 21, 13, \\ \mu^2 q_e w_e c^2 &= 3, 3, 2; \\ \mu q_e w_e &= 401, 395, 308, 191, 104, 51, \\ \mu q_e w_e c &= 133, 130, 100, 61, 33, \\ \mu q_e w_e c^2 &= 18, 18, 15, 10; \\ q_e w_e &= 1110, 1032, 754, 446, 237, 115, 52, \\ q_e w_e c &= 334, 292, 204, 122, 67, 34, \\ q_e w_e c^2 &= 42, 36, 27, 18, 12. \end{aligned}$$

Zweite Tabelle.

Sämmtliche Fundamentalzahlen der in *fester Ebene* liegenden cubischen Plancurve mit Spitze.

Hier sind immer alle Bedingungssymbole *zusammengefasst*, welche in Bezug auf die Bestimmung des Singularitätendreiecks dasselbe aussagen. *Fortgelassen* sind nur diejenigen Anzahlen, welche sich gemäss der ersten Incidenzformel, also nach der Analogie von

$$vw = w_e + v^2$$

durch Addition zweier der obigen Anzahlen ergeben. Da $\mu^3 g_c = \mu^3 g^2$ ist, wenn der Strahl g in der Ebene μ liegt, so konnte w^2, q^2, z^2 statt w_c, q_c, z_c gesetzt werden. Da die in fester Ebene liegende cubische Plancurve mit Spitze dualistisch sich selbst entspricht, so konnte folgende Anordnung für die Zahlenreihen getroffen werden.

Die einer α -fachen Bedingung nachgesetzte i^{te} Zahl ist die Zahl derjenigen Curven, welche, in fester Ebene liegend, die α -fache Bedingung erfüllen, dabei durch $8 - \alpha - i$ in dieser Ebene gelegene, gegebene Punkte gehen, und $i - 1$ in dieser Ebene liegende, gegebene Gerade berühren. Dagegen ist die Zahl, welche einer α -fachen Bedingung als i^{te} vorangeht, die Zahl der Curven, welche, in fester Ebene liegend, die α -fache Bedingung erfüllen, dabei durch $i - 1$ in dieser Ebene liegende, gegebene Punkte gehen, und $8 - \alpha - i$ in dieser Ebene liegende, gegebene Gerade berühren.

Die schon von Maillard und Zeuthen bestimmten Elementarzahlen $\mu^3 v^7, \mu^3 v^6 q, \dots \mu^3 q^7$ sind:

$$24, 60, 114, 168, 168, 114, 60, 24.$$

$$c = 12, 42, 96, 168, 186, 132, 72 = w,$$

$$v = 66, 123, 177, 168, 105, 51, 18 = q,$$

$$y = 48, 96, 150, 168, 132, 78, 36 = z.$$

$$c^2 = 2, 8, 20, 38, 44, 32 = w^2,$$

$$v^2 = 20, 35, 47, 38, 17, 5 = q^2,$$

$$y^2 = 20, 44, 74, 74, 44, 20 = z^2;$$

$$cv = 47, 89, 128, 119, 71, 32 = wq,$$

$$cy = 32, 62, 92, 92, 62, 32 = wz,$$

$$vy = 59, 89, 92, 65, 35, 14 = qz,$$

$$cw = 52, 106, 166, 166, 106, 52 = wc,$$

$$vq = 34, 79, 139, 139, 79, 34 = qv,$$

$$yz = 34, 70, 112, 112, 70, 34 = zy.$$

$$\left. \begin{matrix} c^2 z \\ cz^2 \end{matrix} \right\} = 4, 10, 19, 22, 16 = \left\{ \begin{matrix} w^2 y \\ wy^2 \end{matrix} \right.,$$

$$\left. \begin{matrix} c^2 q \\ cq^2 \end{matrix} \right\} = 1, 4, 10, 13, 10 = \left\{ \begin{matrix} w^2 v \\ wv^2 \end{matrix} \right.,$$

$$\left. \begin{matrix} v^2 z \\ vz^2 \end{matrix} \right\} = 10, 19, 28, 22, 7 = \left\{ \begin{matrix} q^2 y \\ qy^2 \end{matrix} \right.;$$

$$c^2 w = 10, 22, 37, 40, 28 = w^2 c,$$

$$v^2 q = 10, 22, 37, 31, 10 = q^2 v,$$

$$y^2 z = 10, 22, 37, 34, 16 = z^2 y;$$

$$\begin{aligned}
c^2v &= 9, 18, 27, 27, 18 = w^2q, \\
c^2y &= 6, 12, 18, 18, 12 = w^2z, \\
v^2y &= 15, 21, 18, 9, 3 = q^2z, \\
v^2c &= 17, 27, 36, 27, 9 = q^2w, \\
y^2c &= 12, 30, 36, 24, 12 = z^2w, \\
y^2v &= 21, 30, 27, 15, 6 = z^2q; \\
cvy &= 33, 48, 45, 27, 12 = wqz.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \begin{array}{l} c^2v^2 \\ c^2zv \\ czv^2 \\ cz^2v \end{array} \right\} &= 3, 6, 9, 9 = \left\{ \begin{array}{l} w^2q^2 \\ w^2yq \\ wyq^2 \\ wy^2q, \end{array} \right. \\
\left. \begin{array}{l} c^2y^2 \\ c^2qy \\ cqy^2 \\ cq^2y \end{array} \right\} &= 2, 6, 6, 4 = \left\{ \begin{array}{l} w^2z^2 \\ w^2vz \\ wvz^2 \\ wv^2z, \end{array} \right. \\
\left. \begin{array}{l} v^2y^2 \\ v^2wy \\ vwy^2 \\ vw^2y \end{array} \right\} &= 5, 6, 3, 1 = \left\{ \begin{array}{l} q^2z^2 \\ q^2cz \\ qc^2z \\ qc^2z; \end{array} \right. \\
\left. \begin{array}{l} c^2zw \\ cz^2w \end{array} \right\} &= 4, 9, 15, 14 = \left\{ \begin{array}{l} w^2yc \\ wy^2c, \end{array} \right. \\
\left. \begin{array}{l} c^2qw \\ cq^2w \end{array} \right\} &= 3, 9, 12, 9 = \left\{ \begin{array}{l} w^2vc \\ wv^2c, \end{array} \right. \\
\left. \begin{array}{l} v^2zq \\ vz^2q \end{array} \right\} &= 4, 9, 15, 11 = \left\{ \begin{array}{l} q^2yv \\ qy^2v, \end{array} \right. \\
\left. \begin{array}{l} v^2wq \\ vw^2q \end{array} \right\} &= 6, 9, 9, 3 = \left\{ \begin{array}{l} q^2cv \\ qc^2v, \end{array} \right. \\
\left. \begin{array}{l} y^2wz \\ yw^2z \end{array} \right\} &= 6, 9, 9, 4 = \left\{ \begin{array}{l} z^2cy \\ zc^2y, \end{array} \right. \\
\left. \begin{array}{l} y^2qz \\ yq^2z \end{array} \right\} &= 3, 9, 12, 7 = \left\{ \begin{array}{l} z^2vy \\ zv^2y; \end{array} \right. \\
c^2w^2 &= 6, 9, 9, 6 = w^2c^2, \\
v^2q^2 &= 3, 9, 9, 3 = q^2v^2, \\
y^2z^2 &= 4, 9, 9, 4 = z^2y^2; \\
c^2vy &= 6, 9, 9, 6 = w^2qz, \\
v^2cy &= 9, 12, 9, 3 = q^2wz, \\
y^2cv &= 14, 15, 9, 4 = z^2wq.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \begin{array}{l} v^2 c^2 q \\ v^2 c q^2 \\ v z c^2 q \\ v z c q^2 \\ v^2 z q^2 \\ v^2 z c q \\ v z^2 q^2 \\ v z^2 c q \end{array} \right\} &= 1, 3, 3 = \left\{ \begin{array}{l} q^2 w^2 v \\ q^2 w v^2 \\ q y w^2 v \\ q y w v^2 \\ q^2 y v^2 \\ q^2 y w v \\ q y^2 v^2 \\ q y^2 w v, \end{array} \right. \\
\left. \begin{array}{l} c^2 v^2 w \\ c^2 v w^2 \\ c z v^2 w \\ c z v w^2 \\ c^2 z w^2 \\ c^2 z v w \\ c z^2 w^2 \\ c z^2 v w \end{array} \right\} &= 2, 3, 3 = \left\{ \begin{array}{l} w^2 q^2 c \\ w^2 q c^2 \\ w y q^2 c \\ w y q c^2 \\ w^2 y c^2 \\ w^2 y q c \\ w y^2 c^2 \\ w y^2 q c, \end{array} \right. \\
\left. \begin{array}{l} y^2 v^2 z \\ y^2 v z^2 \\ y w v^2 z \\ y w v z^2 \\ y^2 w z^2 \\ y^2 w v z \\ y w^2 z^2 \\ y w^2 v z \end{array} \right\} &= 2, 3, 1^*) = \left\{ \begin{array}{l} z^2 q^2 y \\ z^2 q y^2 \\ z c q^2 y \\ z c q y^2 \\ z^2 c y^2 \\ z^2 c q y \\ z c^2 y^2 \\ z c^2 q y; \end{array} \right. \\
\left. \begin{array}{l} c^2 v^2 y \\ c^2 z v y \\ c z v^2 y \\ c z^2 v y \end{array} \right\} &= 2, 3, 3^*) = \left\{ \begin{array}{l} w^2 q^2 z \\ w^2 y q z \\ w y q^2 z \\ w y^2 q z, \end{array} \right. \\
\left. \begin{array}{l} v^2 y^2 c \\ v^2 w y c \\ v w y^2 c \\ v w^2 y c \end{array} \right\} &= 4, 3, 1 = \left\{ \begin{array}{l} q^2 z^2 w \\ q^2 c z w \\ q c z^2 w \\ q c^2 z w, \end{array} \right. \\
\left. \begin{array}{l} y^2 c^2 v \\ y^2 q c v \\ y q c^2 v \\ y q^2 c v \end{array} \right\} &= 3, 3, 2 = \left\{ \begin{array}{l} z^2 w^2 q \\ z^2 v w q \\ z v w^2 q \\ z v^2 w q. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

*) Statt dieser Zahl ist in den Gött. Nachr. (1875, Maiheft, p. 386) eine falsche gedruckt.

Ist endlich das Singularitätendreieck vollständig bestimmt, so giebt es eine einzige Curve, welche dieses Dreieck als Singularitätendreieck hat und ausserdem durch einen gegebenen Punkt geht, resp. eine gegebene Gerade berührt.

Dritte Tabelle.

Sonstige Zahlen.

$\mu^2 v$	= 932, 1562, 2054, 1931, 1358, 767, 362, 134,
μv	= 6888, 10380, 12382, 11039, 7650, 4348, 2195, 987, 384,
v	= 32728, 43096, 44692, 35766, 22864, 12298, 6006, 2677, 1096, 424;
$\mu^2 v^2$	= 284, 452, 564, 481, 290, 129, 42,
μv^2	= 2096, 3008, 3414, 2805, 1730, 846, 363, 129,
v^2	= 9880, 12328, 12044, 8810, 4952, 2250, 918, 339, 120;
$P\mu$	= 312, 684, 1146, 1518, 1512, 1182, 744, 396,
P	= 2064, 3936, 5736, 6642, 6096, 4584, 2916, 1686, 912,
P^2	= 240, 504, 804, 1014, 1008, 840, 564;
$\mu^3 \varrho_p$	= 18, 36, 54, 54, 36, 18,
$\mu^2 \varrho_p$	= 264, 474, 654, 654, 492, 294, 144,
$\mu \varrho_p$	= 2016, 3264, 4122, 3954, 2976, 1836, 984, 462,
ϱ_p	= 9888, 14160, 15864, 14010, 10056, 6108, 3300, 1614, 720.

$\mu^2 w q z$	= 172, 340, 508, 535, 418, 257,
$\mu w q z$	= 1272, 2220, 2960, 2929, 2250, 1412, 775,
$w q z$	= 5912, 8840, 9980, 8640, 6008, 3542, 1890, 935;
$\mu^2 w_p q z$	= 72, 99, 99, 75, 45,
$\mu w_p q z$	= 458, 575, 551, 416, 257, 138,
$w_p q z$	= 1788, 1950, 1672, 1148, 660, 343, 165;
$\mu^2 w_p q_p z$	= 27, 27, 21, 13,
$\mu w_p q_p z$	= 135, 135, 108, 69, 38,
$w_p q_p z$	= 378, 360, 270, 162, 87, 43.

$\mu^2 c^3 q w v$	= 4, 6, 5,
$\mu c^3 q w v$	= 26, 36, 33, 25;
$\mu^2 c w_p v$	= 99, 121, 100, 58, 22,
$\mu^2 c w v$	= 496, 700, 741, 569, 325, 136,
$\mu^2 c y v w$	= 244, 277, 217, 124, 52,
$\mu^2 c w z$	= 280, 516, 734, 715, 510, 280,
$\mu^2 c w y$	= 456, 706, 732, 551, 322, 156,
$\mu^2 c w y z$	= 184, 302, 308, 218, 214.

§ 51.

Lagebeziehungen zwischen den Punkten, Tangenten und dem Singularitätendreieck der allgemeinen C_3^3 .

Wir erinnern uns der Methode, durch welche wir in § 41, die Definitionen der Ausartungen der C_3^3 gewonnen haben. Die Ausartungen $\delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \vartheta_1, \eta_1, \eta_2$ erschienen dort als die *homographischen Bilder der allgemeinen C_3^3* für verschiedene Lagen des Centrums S der Homographie. Die Axe der Homographie wurde dann immer zu einer Ordnungsgeraden, und die von S an die allgemeine C_3^3 gezogenen Tangenten, sowie die Verbindungsstrahlen des Punktes S mit den Ecken des Singularitätendreiecks gaben Strahlen durch S , welche die Axe in den ausgezeichneten Punkten der zu erzeugenden Ausartung schnitten. Diese ausgezeichneten Punkte aber sind bei $\delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ in ihrer Lage von einander abhängig, wie die in § 45. und § 47. angegebenen Stammzahlen lehren. Dieselbe Abhängigkeit muss also auch bei den durch S an die allgemeine C_3^3 gelegten Strahlen stattfinden, und es fließen daher aus den Stammzahlen jener 4 Ausartungen die durch die folgenden 4 Sätze ausgesprochenen *Lagebeziehungen*.

I) Wenn das Centrum S der Homographie weder auf der Curve, noch auf den Seiten ihres Singularitätendreiecks liegt, so entsteht die Ausartung ε_2 . Nun ist aber nach § 47.:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \mu^3 b_e d_3 c &= 4, & \varepsilon_2 \mu^3 b_e d_3 v &= 1, & \varepsilon_2 \mu^3 b_e d^3 y &= 2, \\ \varepsilon_2 \mu^3 b_e d_2 c v &= 3, & \varepsilon_2 \mu^3 b_e d_2 c y &= 2, & \varepsilon_2 \mu^3 b_e d_2 v y &= 1, \\ \varepsilon_2 \mu^3 b_e d_1 c v y &= 1, \end{aligned}$$

Folglich gilt der Satz:

„Wenn man an eine cubische Plancurve mit Spitze von irgend einem Punkte S ihrer Ebene die 3 Tangenten und die Strahlen nach der Spitze, dem Wendepunkte und dem Schnittpunkte von Wendetangente und Rückkehrtangente zieht, so erhält man 6 durch S gehende Strahlen, welche, um überhaupt so einer C_3^3 angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass das ganze Strahlensexupel *endlichdeutig bestimmt ist, sobald 4 von den 6 Strahlen gegeben sind*, und zwar:

- 1) *vierdeutig*, sobald die drei Tangenten und der Strahl nach der Spitze gegeben sind,
- 2) *eindeutig*, sobald die drei Tangenten und der Strahl nach dem Wendepunkt gegeben sind,
- 3) *zweideutig*, sobald die drei Tangenten und der Strahl nach dem Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente gegeben sind,

- 4) *dreideutig*, sobald zwei von den drei Tangenten, der Strahl nach der Spitze und der Strahl nach dem Wendepunkte gegeben sind,
- 5) *zweideutig*, sobald zwei Tangenten, der Strahl nach der Spitze und der Strahl nach dem Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente gegeben sind,
- 6) *eindeutig*, sobald zwei Tangenten, der Strahl nach dem Wendepunkt und der Strahl nach dem Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente gegeben sind,
- 7) *eindeutig*, sobald eine Tangente und die drei Strahlen nach den drei Ecken des Singularitätendreiecks gegeben sind.“

II) Wenn das Centrum S der Homographie auf der Curve, aber nicht in einer Ecke des Singularitätendreiecks liegt, so entsteht die Ausartung δ_2 . Nun ist aber nach § 45. jede Stammzahl für δ_2 gleich 1, wenn die Ebene und auf ihr die doppelte Ordnungsgerade gegeben ist. Folglich gilt der Satz:

„Wenn man an eine cubische Plancurve mit Spitze von irgend einem ihrer Punkte S die in diesem Punkte berührende und die sonst noch mögliche Tangente zieht und ausserdem S mit den drei Ecken des Singularitätendreiecks verbindet, so erhält man 5 von S ausgehende Strahlen, welche, um überhaupt in dieser Weise einer cubischen Plancurve mit Spitze angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass *das ganze Strahlenquintupel immer eindeutig bestimmt ist, sobald irgend welche drei von den fünf Strahlen gegeben sind.*“

III) Wenn das Centrum S der Homographie auf der Rückkehrtangente, aber nicht in der Spitze lag, so entstand die Ausartung ϵ_1 . Nun ist aber nach § 47. bei ϵ_1 jede Stammzahl gleich 1, wenn die Ebene und die dreifache Ordnungsgerade von ϵ_1 gegeben ist. Folglich gilt der Satz:

„Wenn man an eine cubische Plancurve mit Spitze von irgend einem Punkte S ihrer Rückkehrtangente die beiden sonst noch möglichen Tangenten und den Strahl nach dem Wendepunkte zieht, so erhält man 4 von S ausgehende Strahlen, welche, um überhaupt einer solchen Curve angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass *das ganze Strahlenquadrupel immer eindeutig bestimmt ist, sobald irgend welche drei von den vier Strahlen gegeben sind.*“

IV) Wenn das Centrum S der Homographie auf dem Verbindungsstrahle von Spitze und Wendepunkt, aber nicht in diesen Punkten selbst lag, so entstand die Ausartung ϵ_3 . Nun ist aber nach § 47.:

$$\epsilon_3 \mu^3 b_e z d_3 = 2, \quad \epsilon_3 \mu^3 b_e z d_2 y = 2, \quad \epsilon_3 \mu^3 b_e z d_2 c = 2, \quad \epsilon_3 \mu^3 b_e z d_1 c y = 1.$$

Folglich gilt der Satz:

„Wenn man an eine cubische Plancurve mit Spitze von irgend einem Punkte S des Verbindungsstrahls der Spitze mit dem Wendepunkte die drei Tangenten zieht und ausserdem S mit dem Schnittpunkte von Wendetangente und Rückkehrtangente verbindet, so erhält man 5 von S ausgehende Strahlen, welche, um überhaupt in dieser Weise einer solchen Curve angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass das ganze Strahlenquintupel immer *endlichdeutig bestimmt ist, sobald irgend welche drei von den fünf Strahlen gegeben sind, und zwar:*

- 1) *zweideutig*, sobald die drei Tangenten gegeben sind,
- 2) *zweideutig*, sobald zwei Tangenten und der Strahl nach dem Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente gegeben sind,
- 3) *zweideutig*, sobald zwei Tangenten und der Verbindungsstrahl von Spitze und Wendepunkt gegeben sind,
- 4) *eindeutig*, sobald eine Tangente, der Strahl nach dem Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente, und der Verbindungsstrahl von Spitze und Wendepunkt gegeben sind.

Bei den Ausartungen $\mathfrak{S}_1, \eta_1, \eta_2$ treten keine Lagebeziehungen der ausgezeichneten Punkte auf. Folglich treten auch bei der allgemeinen Curve keine Relationen auf, wenn der Punkt S auf der Wendetangente oder in einer Ecke des Singularitätendreiecks liegt. *Vier neue Sätze erhält man jedoch, wenn man die obigen Sätze feld-dualistisch übersetzt.*

VI. Abschnitt.

Die cubische Plancurve mit Doppelpunkt.

§ 52.

Die berücksichtigten fundamentalen Einzelbedingungen der C_3^4 und die Beziehungen zwischen ihnen.

Die drei *wesentlichen elementaren* Bedingungen bezeichnen wir auch hier mit μ, ν, ρ , und zwar

- 1) mit μ die Bedingung, dass die Ebene der Plancurve durch einen gegebenen Punkt gehen soll,
- 2) mit ν die Bedingung, dass die Plancurve eine gegebene Gerade schneiden soll,
- 3) mit ρ die Bedingung, dass die Plancurve eine gegebene Ebene berühren soll.

Durch diese drei Bedingungen lassen sich die *unwesentlichen elementaren* Bedingungen mittelst der Incidenzformeln ausdrücken.

Man erhält, da unsere Plancurve von der *dritten* Ordnung und dem *vierten* Range ist, folgende Resultate.

1) Die Bedingung μ_g , die C_3^4 soll ihre Ebene durch eine gegebene Gerade schicken, hat den Modul:

$$\mu_g = \mu^2.$$

2) Die Bedingung M , die C_3^4 soll in einer gegebenen Ebene liegen, hat den Modul:

$$M = \mu^3.$$

3) Die Bedingung P , die C_3^4 soll durch einen gegebenen Punkt gehen, hat den Modul:

$$P = \mu\nu - 3\mu^2.$$

4) Die Bedingung ϕ' , die C_3^4 soll eine Tangente durch einen gegebenen Punkt schicken, hat den Modul:

$$\phi' = 4\mu.$$

5) Die Bedingung t , die C_3^4 soll eine Tangente in einem gegebenen Strahlbüschel besitzen, hat den Modul:

$$t = \mu\phi.$$

6) Die Bedingung T , die C_3^4 soll eine gegebene Gerade berühren, hat den Modul:

$$T = \mu^2\phi - 4\mu^3.$$

Hiernach brauchen bei der Bestimmung der Anzahlen der C_3^4 von den elementaren Bedingungen nur

$$\mu, \nu, \phi$$

berücksichtigt zu werden.

Was die *Singularitäten* der C_3^4 angeht, so bezeichnen wir immer mit

b ihren Doppelpunkt,

p jede ihrer beiden Doppelpunktstangenten,

f jede ihrer drei Wendetangenten,

v jeden ihrer drei Wendepunkte,

u jeden der drei Schnittpunkte zweier Wendetangenten,

s den Strahl, auf welchem die drei Wendepunkte liegen.

Dieselben Buchstaben, ohne oder mit Indices oder gross geschrieben, bezeichnen, wie immer, die fundamentalen Bedingungen, welche den obigen singulären Punkten und Strahlen angehören, z. B.

f_s die Bedingung, die C_3^4 soll eine ihrer drei Wendetangenten auf einer gegebenen Ebene haben,

p_s die Bedingung, die C_3^4 soll eine ihrer Doppelpunktstangenten in einem gegebenen Strahlbüschel haben,

V die Bedingung, die C_3^4 soll einen gegebenen Punkt als Wendepunkt haben.

Man könnte mit demselben Rechte, wie den Schnittpunkt zweier Wendetangenten, noch manche *andere* aus den Singularitäten hervor-

gehenden Punkte oder Strahlen *mit berücksichtigen*, wie etwa die Schnittpunkte der Doppelpunktstangenten mit den Wendetangenten, oder den Berührungspunkt der vom Wendepunkt ausgehenden, anderswo berührenden Tangente. Doch sind für unsere Zwecke nur die obigen 6 singulären Punkte und Strahlen wichtig, und diese sollen daher allein in den Kreis der Untersuchung gezogen werden.

Nach den Formeln des § 8. ist

$$b_p = b^2, \quad B = b^3.$$

Doch gelten nicht etwa die analogen Beziehungen bei v und u , weil drei Punkte v und drei Punkte u vorhanden sind. Ferner hat man nach § 8.:

$$s^2 = s_p + s_e, \quad s s_p = s_e = \frac{1}{2} s^3, \quad S = \frac{1}{2} s^4, \text{ etc.}$$

Nach den Incidenzformeln des § 9. und § 10. lassen sich dann auch die unwesentlichen singulären Bedingungen durch die wesentlichen ausdrücken, also:

$$\begin{aligned} b^3 &= \mu b^2 - \mu^2 b + \mu^3, \\ V &= \mu v_p - \mu^2 v + 3\mu^3, \\ U &= \mu u_p - \mu^2 u + 3\mu^3, \\ p_p &= \mu p - 2\mu^2, \\ p_e &= \mu p_e - 2\mu^3, \\ P^*) &= \mu^2 p_e - \mu^3 p, \\ f_p &= \mu f - 3\mu^2, \\ f_e &= \mu f_e - 3\mu^3, \\ F &= \mu^2 f_e - \mu^3 f, \\ s_p &= \mu s - \mu^2, \\ s_e &= \mu s_e - \mu^3, \\ S &= \mu^2 s_e - \mu^3 s. \end{aligned}$$

So ist das Problem der Bestimmung *aller* Anzahlen, welche sich auf die elementaren Bedingungen und auf b, p, f, v, u, s beziehen, zurückgeführt auf das Problem, alle diejenigen 11fachen Symbole numerisch zu bestimmen, welche aus den Potenzen von μ, v, q und aus gewissen Potenzen der Bedingungen:

$$b, b^2, p, p_e, v, v_p, f, f_e, u, u_p, s, s_e$$

zusammengesetzt sind.

*) Da das Symbol P für die Bedingung, eine gegebene Doppelpunktstangente zu haben, ausser an dieser Stelle nicht vorkommt, so ist eine Verwechslung mit dem Symbol P für die Bedingung, die Curve soll durch einen gegebenen Punkt gehen, nicht möglich.

Doch kann die Zahl der zu berechnenden Symbole noch weiter reducirt werden. Da nämlich die beiden Strahlen p durch den Punkt b gehen, so hat man nach der ersten Incidenzformel:

$$p_e = bp - 2b^2,$$

und da die drei Punkte v auf s liegen, so hat man auch:

$$v_g = sv - 3s_e.$$

Da ein ebenes Dreieit die Constantenzahl 9 hat, so kann in den zu berechnenden 11fachen Symbolen die *Wendetangentenbedingung nullfach bis neunfach* sein. Doch ist schon in § 11. erläutert, dass bei einem in einem Träger liegenden Orte nullter Stufe a^{ten} Grades diejenigen zusammengesetzten Bedingungen, welche mehr als a symbolische Einzelbedingungen enthalten, ausdrückbar sind durch diejenigen Bedingungen, welche a oder weniger als a Einzelbedingungen enthalten, und durch die Grundbedingungen des Trägers. Es lässt sich also z. B. das sechsfache Symbol

$$f^4 f_e$$

ausdrücken durch

$$f_e^3, \mu f f_e^2, \mu^2 f^2 f_e, \mu^2 f_e^2, \mu^3 f^3, \mu^3 f f_e.$$

Das in § 11. zur Erläuterung gewählte Beispiel behandelt gerade ein in der Ebene μ liegendes Dreieit, dessen Strahlen f heissen. Die letzten der dort gewonnenen Resultate finden also hier *unmittelbare Anwendung* und sollen deshalb an dieser Stelle noch einmal Platz finden. Wegen ihrer Herleitung vergleiche man § 11.

Reduction der Wendetangentenbedingungen.

- 1) $f^4 = 6f^2 f_e - 3f_e^2 - 22\mu f f_e + 6\mu f^3 + 30\mu^2 f_e - 21\mu^2 f^2 + 54\mu^3 f,$
- 2) $f^3 f_e = 3f f_e^2 + 6\mu f^2 f_e - 7\mu f_e^2 - 18\mu^2 f f_e - 3\mu^3 f^2 + 30\mu^3 f_e,$
- 3) $f^3 = 15f f_e^2 + 50\mu f^2 f_e - 60\mu f_e^2 + 15\mu^2 f^3 - 210\mu^2 f f_e - 90\mu^3 f^2 + 360\mu^3 f_e,$
- 4) $f^2 f_e^2 = f_e^3 + 5\mu f f_e^2 - 10\mu^2 f_e^2 + \mu^2 f^2 f_e - \mu^3 f^3 - 8\mu^3 f f_e,$
- 5) $f^4 f_e = 3f_e^3 + 26\mu f f_e^2 + 21\mu^2 f^2 f_e - 72\mu^2 f_e^2 - 6\mu^3 f^3 - 102\mu^3 f f_e,$
- 6) $f^6 = 15f_e^3 + 165\mu f f_e^2 + 195\mu^2 f^2 f_e - 545\mu^2 f_e^2 - 15\mu^3 f^3 - 990\mu^3 f f_e,$
- 7) $f f_e^3 = 3\mu f_e^3 + 3\mu^2 f f_e^2 - 3\mu^3 f^2 f_e - 12\mu^3 f_e^2,$
- 8) $f^3 f_e^2 = 8\mu f_e^3 + 21\mu^2 f f_e^2 - 6\mu^3 f^2 f_e - 66\mu^3 f_e^2,$
- 9) $f^3 f_e = 35\mu f_e^3 + 130\mu^2 f f_e^2 + 5\mu^3 f^2 f_e - 425\mu^3 f_e^2,$
- 10) $f^7 = 210\mu f_e^3 + 910\mu^2 f f_e^2 + 210\mu^3 f^2 f_e - 3150\mu^3 f_e^2,$
- 11) $f_e^4 = 6\mu^2 f_e^3 - 6\mu^3 f f_e^2,$
- 12) $f^2 f_e^3 = 12\mu^2 f_e^3 + 3\mu^3 f f_e^2,$
- 13) $f^4 f_e^2 = 45\mu^2 f_e^3 + 45\mu^3 f f_e^2,$
- 14) $f^6 f_e = 235\mu^2 f_e^3 + 345\mu^3 f f_e^2,$

$$15) f^8 = 1540\mu^2 f_e^3 + 2660\mu^3 f f_e^2,$$

$$16) f f_e^4 = 12\mu^3 f_e^3,$$

$$17) f^3 f_e^3 = 39\mu^3 f_e^3,$$

$$18) f^5 f_e^2 = 180\mu^3 f_e^3,$$

$$19) f^7 f_e = 1050\mu^3 f_e^3,$$

$$20) f^9 = 7280\mu^3 f_e^3.$$

In ähnlicher Weise lassen sich ausdrücken die Producte der Potenzen von u und u_g durch die Producte der Potenzen von μ mit

$$u, u_g, u^2, u u_g, u_g^2, u^3, u^2 u_g, u u_g^2, u_g^3,$$

und ferner die Potenzen von v durch die Producte der Grundbedingungen von s mit

$$v, v^2, v^3,$$

$$\text{z. B.} \quad v^7 = 175 S v^3 = 175(\mu^2 s_e - \mu^3 s) v^3.$$

Weitere Reductionen erhält man auch, indem man benutzt, dass jeder Punkt u auf zwei der drei Strahlen f liegt, und dass jeder Punkt v auf einem der drei Strahlen f liegt. Doch kommen im Folgenden nur die oben angegebenen Reductionen der Wendetangentenbedingungen zur Anwendung.

§ 53.

Formeln zwischen Bedingungen und Ausartungen bei der C_3^4 .

Um Formeln erster Dimension für die C_3^4 zu gewinnen, setzen wir ein beliebiges einstufiges Curvensystem voraus, und wenden die verschiedenen Formen des Correspondenzprinzips in der unten angegebenen Weise an. Von den Ausartungen berücksichtigen wir dabei von vornherein nur die beiden schon von Maillard und Zeuthen erkannten *Ausartungen nullter Gattung*. Alle Ausartungen höherer Gattung fassen wir wieder bei einer Formel mit der Nummer i) durch das Symbol a_i zusammen, da wir auf die Art der Zusammensetzung der Symbole a_i aus den verschiedenen Ausartungen erst später eingehen wollen.

Die beiden Ausartungen nullter Gattung bezeichnen wir mit χ und γ . Dieselben haben folgende Beschreibung.

Die Ausartung χ besteht aus einem Ordnungskegelschnitt k und einer Ordnungsgeraden a , welche k in zwei verschiedenen Punkten schneidet, von denen der eine b der Doppelpunkt, der andere c ein zweifacher Rangpunkt ist. Der Kegelschnitt k ist natürlich zugleich Rangkegelschnitt. Die Kegelschnitttangente in b ist die eine, die Ordnungsgerade ist die andere Doppelpunktstangente. Die drei Wendetangenten fallen sämmtlich in die Kegelschnitttangente, welche in c berührt, so dass die drei Wendepunkte mit c zusammenfallen.

Die Ausartung γ hat als Ordnungscurve eine Curve k dritter Ordnung dritten Ranges. Ihre Tangenten sind die Tangenten dieser Curve und die Strahlen des Strahlbüschels, welcher seinen Scheitel in der Spitze c der Curve hat. Der Doppelpunkt von γ fällt mit c und die beiden Doppelpunktstangenten mit der Rückkehrtangente q der Curve zusammen. Von den drei Wendetangenten fällt die eine mit der Wendetangente w von k , die beiden andern fallen mit q zusammen, so dass ein Wendepunkt in den Wendepunkt v von k fällt, zwei Wendepunkte mit c zusammenfallen und die Wendepunktsgerade s der Verbindungsstrahl z von s und v wird. Von den drei Punkten u fällt der eine in c und die beiden andern fallen in den Schnittpunkt y von w und q . Man beachte, dass für die Curve k die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts beibehalten sind.

Wir lassen nun 23 Formeln folgen, welche die 11 Zahlen

$$\mu, \nu, \rho, b, f, p, v, u, s, \chi, \gamma$$

bei Voraussetzung eines elementaren einstufigen Systems mit einander verbinden, und fügen der rechten Seite die Symbole α hinzu, welche die Anzahlen der Ausartungen von höherer als der nullten Gattung vorläufig vertreten sollen. Zur Erläuterung der Entstehung dieser Formeln geben wir nur an, welche Coincidenzen bei jeder Formel gesucht werden, für den specielleren Fall, dass die Ebene des Curvensystems als fest angesehen wird.

Formeltabelle für die C_3^4 .

1) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen der Doppelpunkt b auf einer Wendetangente f liegt, giebt:

$$3b + f = 3\mu + 3\gamma + \alpha_1.$$

2) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen ein v auf einem p liegt, giebt:

$$2v + 3p = 6\mu + \chi + 6\gamma + \alpha_2.$$

3) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen ein u auf einem p liegt, giebt:

$$2u + 3p = 6\mu + \chi + 5\gamma + \alpha_3.$$

4) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen b auf s liegt, giebt:

$$s + b = \mu + \gamma + \alpha_4.$$

5) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen ein u auf s liegt, giebt:

$$3s + u = 3\mu + 2\chi + \gamma + \alpha_5.$$

6) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden zwei zusammenfallen, giebt:

$$4\nu = \rho + 6\mu + 2b + \alpha_6.$$

7) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den vier Tangenten aus einem beliebigen Punkte zwei zusammenfallen, giebt:

$$6q = v + 3f + \chi + \alpha_7.$$

8) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen zwei Wendetangenten zusammenfallen, giebt:

$$4f = 6\mu + 2u + 2\chi + \gamma + \alpha_8.$$

9) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen zwei Wendepunkte zusammenfallen, giebt:

$$4v = 6s + 2\chi + 3\gamma + \alpha_9.$$

10) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen zwei Eckpunkte des Wendetangentendreiseits zusammenfallen, giebt:

$$4u = 2f + 2\chi + \gamma + \alpha_{10}.$$

11) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen die beiden Doppelpunktstangenten zusammenfallen, giebt:

$$2p = 2\mu + 2b + \gamma + \alpha_{11}.$$

12) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den Tangenten aus einem beliebigen Punkte eine durch den Doppelpunkt geht, giebt:

$$q + 4b = 2p + \gamma + \alpha_{12}.$$

13) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden einer auf einer Wendetangente liegt, giebt:

$$3v + 3f = 9u + 3v + \alpha_{13}.$$

14) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden einer auf einer Doppelpunktstangente liegt, giebt:

$$2v + 3p = 6u + 6b + \chi + \alpha_{14}.$$

15) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den Tangenten aus einem beliebigen Punkte eine einen Punkt u enthält, giebt:

$$3q + 4u = 4f + 2\chi + \gamma + \alpha_{15}.$$

16) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden einer auf der Wendepunktstangente s liegt, giebt:

$$v + 3s = 3\mu + v + \alpha_{16}.$$

17) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen der Strahl s mit einem Strahl f zusammenfällt, giebt:

$$3s + f = 3\mu + v + \chi + \alpha_{17}.$$

18) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen auf einer aus einem beliebigen Punkte gezogenen Tangente der Berührungspunkt mit dem dritten Schnittpunkte zusammenfällt, giebt:

$$q + 3v = 4\mu + f + p + a_{18}.$$

19) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen auf der Verbindungsgeraden eines beliebigen Punktes mit dem Doppelpunkte dieser letztere mit dem dritten Schnittpunkte zusammenfällt, giebt:

$$b + v = \mu + p + a_{19}.$$

20) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen die Tangente eines auf einer beliebigen Geraden erzeugten Schnittpunktes mit einer der beiden andern von diesem Schnittpunkte ausgehenden Tangenten zusammenfällt, giebt:

$$2v + 3q = 6\mu + 2v + a_{20}.$$

21) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen eine Wendetangente zusammenfällt mit einer der beiden andern Tangenten, die von dem Schnittpunkte der Wendetangente und einer beliebigen Geraden ausgehen, giebt:

$$2f + 3q = 6\mu + 2v + 2\chi + a_{21}.$$

22) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen die beiden anderswo berührenden Tangenten zusammenfallen, welche von einem Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden ausgehen, giebt:

$$2v + 2q = 6\mu + 2b + 2\chi + a_{22}.$$

23) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen die beiden von dem Schnittpunkte einer Wendetangente mit einer beliebigen Geraden ausgehenden, von dieser Wendetangente verschiedenen Tangenten zusammenfallen, giebt:

$$2f + 6q = 6\mu + 6u + a_{23}.$$

Von diesen 23 Formeln sind 11 in den allgemeinen Zeuthen'schen Formeln enthalten, die hier in § 35. auf Plancurven im Raume erweitert sind. Es folgen nämlich die hier mit den Nummern:

6), 7), 12), 13), 8), 18), 19), 20), 21), 22), 23)

versehenen Formeln bezüglich aus den Formeln, welche Zeuthen in § 24. der Alm. Eg. unter den Nummern:

3), 3'), 4), 5'), 8'), 9), 10), 9'), 11'), 12'), 14')

anführt.

Aus unsern 23 Formeln erhält man mit 15 Bestätigungen 8 Hauptformeln, welche jede der 8 Zahlen

$\chi, \gamma, b, f, p, v, u, s$

als Function der drei elementaren Bedingungen:

μ, ν, q

und gewisser der Zahlen α ausdrücken. Die letztern fassen wir *vorläufig* durch die Symbole

$$\alpha_\chi, \alpha_\gamma, \alpha_b, \alpha_f, \alpha_p, \alpha_v, \alpha_u, \alpha_s$$

zusammen.

Tabelle der 8 Hauptformeln.

$$24) \quad 3\rho - 2\nu = 2\chi + \alpha_\chi,$$

$$25) \quad 2\nu - 4\mu = \gamma + \alpha_\gamma,$$

$$26) \quad 2\nu - \frac{1}{2}\rho - 3\mu = b + \alpha_b,$$

$$27) \quad \frac{3}{2}\rho = f + \alpha_f,$$

$$28) \quad 3\nu - \frac{1}{2}\rho - 4\mu = p + \alpha_p,$$

$$29) \quad \nu + \frac{3}{2}\rho - 3\mu = v + \alpha_v,$$

$$30) \quad \frac{3}{2}\rho - \mu = u + \alpha_u,$$

$$31) \quad \frac{1}{2}\rho = s + \alpha_s.$$

§ 54.

Erzeugung und Beschreibung von Ausartungen der C_3^4 .

Einen Theil der Ausartungen der C_3^4 von höherer als der nullten Gattung kann man durch *homographische Abbildung der allgemeinen Curve* gerade so erzeugen, wie dies in § 41. für die Ausartungen der C_3^3 gezeigt ist.

Das Centrum der Homographie sei wieder S , die Axe der Homographie sei r , und das constante Doppelverhältniss λ habe entweder den Werth 0 oder ∞ , je nachdem der Punkt S oder die Axe r alle möglichen Lagen zur allgemeinen Curve einnehmen soll. Die Beschreibung der so gewonnenen Ausartungen folgt hier zugleich mit Angabe der a posteriori bestimmten, später auftretenden *Stammzahlen*.

1) Die Axe r habe eine beliebige Lage zur allgemeinen Curve, das Centrum S ebenfalls, und λ sei gleich ∞ . Dann erhält man die *Ausartung* τ mit folgender Definition. τ besteht aus drei Ordnungsgeraden a , welche sich in einem vierfachen Rangpunkte e schneiden. Die drei Wendetangenten f , die beiden Doppelpunktstangenten p und die Wendepunktsgerade s sind 6 durch e gehende, unter einander und von den Ordnungsgeraden verschiedene Strahlen, so dass der Doppelpunkt b , die drei Wendepunkte v und die drei Wendetangentenschnittpunkte u im Punkte e coincidiren. *Die ganze Ausartung ist endlich-deutig bestimmt, sobald 5 von den 9 Strahlen durch e gegeben sind.* Bezeichnet man mit a_2 resp. μ_2 die Bedingungen, dass von den Ordnungsgeraden zwei resp. drei verschiedene zwei resp. drei gegebene Geraden schneiden, und bezeichnet man ferner mit f_2 resp. f_3 die analogen Bedingungen für die drei Wendetangenten, so kann man die vom Verfasser bestimmten Stammzahlen in folgender Weise angeben:

$$\begin{aligned}\tau\mu^3e^2a_3f_2 &= 9, & \tau\mu^3e^2a_2f_3 &= 9, \\ \tau\mu^3ea_3f_3 &= 27, & \tau\mu e^3a_3f_3 &= 54.\end{aligned}$$

2) Die Axe r sei eine beliebige Tangente, S sei ein beliebiger Punkt, und λ sei $= \infty$. Dann erhält man die *Ausartung* δ mit folgender Definition. δ besteht aus einer einfachen Ordnungsgeraden a und einer zweifachen Ordnungsgeraden g , welche sich in einem dreifachen Rangpunkte e schneiden. Auf g liegt ein einfacher Rangpunkt d . Die drei Wendetangenten f , die beiden Doppelpunktstangenten p und die Wendepunktsgerade s sind 6 Strahlen durch e , welche unter einander und von a und g verschieden sind, so dass b , die drei v und die drei u in e coincidiren. Das ganze Strahlenoctupel durch e ist endlichdeutig bestimmt, sobald 4 von den 8 Strahlen gegeben sind. Diese Lagebeziehung wird durch gewisse Stammzahlen charakterisirt, von denen der Verfasser die folgenden bestimmt hat. f_2 und f_3 haben dieselbe Bedeutung wie bei τ .

$$\begin{aligned}\delta\mu^3e^2agf_2 &= 3, & \delta\mu^3e^2gf_3 &= 1, & \delta\mu^3e^2af_3 &= 4, & \delta\mu^3eagf_3 &= 7, \\ \delta\mu e^3agf_3 &= 16.\end{aligned}$$

3) Die Axe r sei eine der drei Wendetangenten, S liege beliebig, λ sei $= \infty$. Dann erhält man die *Ausartung* ξ mit folgender Beschreibung. ξ besteht aus einer dreifachen Ordnungsgeraden g , auf welcher zwei zweifache Rangpunkte liegen, von denen der eine zugleich Doppelpunkt ist. Letzterer soll daher b , der andere Rangpunkt c heißen. Durch b gehen die beiden Doppelpunktstangenten p und zwei Wendetangenten f , welche vier Strahlen unter einander und von g verschieden sind, so dass im Punkte b zugleich zwei Punkte v und ein Punkt u liegen. Die dritte Wendetangente geht durch c und ist von g verschieden, so dass der dritte Punkt v mit c coincidirt. Diese dritte Wendetangente schneidet die beiden andern in den beiden andern Punkten u . Der Strahl s coincidirt mit g . Das durch b gehende Strahlenquintupel ist endlichdeutig bestimmt, sobald 3 von den 5 Strahlen gegeben sind, und zwar eindeutig, wenn g und die beiden f gegeben sind.

4) Die Axe r sei ein beliebiger, durch den Doppelpunkt gehender Strahl, S liege beliebig und λ sei gleich ∞ . Dann erhält man die *Ausartung* α mit folgender Beschreibung. α besteht aus einer zweifachen Ordnungsgeraden g und einer einfachen Ordnungsgeraden a , welche sich in einem vierfachen Rangpunkte e schneiden. Der Doppelpunkt b ist ein von e verschiedener Punkt auf g , so dass die beiden Doppelpunktstangenten p mit g coincidiren. Die drei Wendetangenten f und die Wendepunktsgerade s sind vier durch e gehende, unter einander und von a und g verschiedene Strahlen, so dass die drei Punkte v und die drei Punkte u in e coincidiren. Das Strahlensexupel durch e ist

endlichdeutig bestimmt, sobald 4 von den 6 Strahlen gegeben sind, und zwar ist, wenn f_2 und f_3 dieselbe Bedeutung wie bei δ haben, genau wie dort:
 $\mu^3 e^2 a g f_2 = 3$, $\mu^3 e^2 g f_3 = 1$, $\mu^3 e^2 a f_3 = 4$, $\mu^3 e a g f_3 = 7$.

5) Das Centrum S sei der Schnittpunkt zweier Wendetangenten, die Axe r liege beliebig und λ sei gleich 0. Dann erhält man die Ausartung ξ mit folgender Beschreibung. ξ besteht aus einer dreifachen Ordnungsgeraden g , auf welcher zwei zweifache Rangpunkte e und e' liegen. Durch e geht eine nicht mit g zusammenfallende Wendetangente, ebenso durch e' . Die dritte Wendetangente fällt mit g zusammen, ihr Wendepunkt ist ein von e und e' verschiedener Punkt auf g ; die beiden andern Wendepunkte müssen mit e und e' coincidiren, ebenso zwei von den drei Punkten u . Der Doppelpunkt b ist ein von den drei übrigen ausgezeichneten Punkten verschiedener Punkt auf g , so dass die beiden Doppelpunktstangenten mit g coincidiren. Das Punktquadrupel auf g ist endlichdeutig bestimmt, wenn von den 4 Punkten 3 gegeben sind, und zwar eindeutig sowohl wenn e, e', b , wie auch wenn e, e', v gegeben sind.

6) Das Centrum S liege beliebig, ebenso die Axe r , und λ sei gleich 0. Dann erhält man die Ausartung ε mit folgender Beschreibung. ε besteht aus einer dreifachen Ordnungsgeraden g , auf welcher 4 einfache Rangpunkte d liegen. Die drei Wendepunkte v , die drei Punkte u und der Doppelpunkt b sind 7 unter einander und von den 4 Rangpunkten d verschiedene Punkte, so dass die drei f , die beiden p und der Strahl s mit g coincidiren. Die 11 auf g liegenden Punkte sind in ihrer Lage derartig von einander abhängig, dass ihre Gesamtheit endlichdeutig bestimmt ist, sobald 5 von ihnen gegeben sind. Von den Zahlen, welche diese Abhängigkeit charakterisiren, hat der Verfasser nur die folgenden bestimmt. d_3 resp. d_4 bezeichne, dass von den 4 Rangpunkten 3 resp. 4 verschiedene auf gegebenen Ebenen liegen sollen.
 $\varepsilon \mu^3 g_e d_4 b = 12$, $\varepsilon \mu^3 g_e d_4 v = 12$, $\varepsilon \mu^3 g_e d_3 b v = 18$, $\varepsilon \mu^3 g_e d_4 b v = 60$.

7) Das Centrum S sei ein Punkt der Curve, die Axe r liege beliebig, und λ sei gleich 0. Dann erhält man die Ausartung ϑ mit folgender Beschreibung. ϑ besteht aus einer einfachen Ordnungsgeraden a und einer zweifachen Ordnungsgeraden g , welche sich in einem zweifachen Rangpunkte e schneiden. Auf g liegen zwei einfache Rangpunkte d , die drei Punkte v , die drei Punkte u und der Doppelpunkt b , so dass in g die drei f , die beiden p und s coincidiren. Die 10 auf g liegenden Punkte sind in ihrer Lage derartig von einander abhängig, dass ihre Gesamtheit endlichdeutig bestimmt ist, wenn 4 von ihnen gegeben sind. Von den Zahlen, welche diese Abhängigkeit charakterisiren, hat der Verfasser die folgenden bestimmt. d_2 resp. d_1 bezeichne,

dass jeder der beiden Rangpunkte resp. dass einer von ihnen auf einer gegebenen Ebene liege.

$$\begin{aligned}\partial\mu^3g.ed_2b &= 1, & \partial\mu^3g.ed_2v &= 2, & \partial\mu^3g.ed_1bv &= 2, \\ \partial\mu^3g.d_2bv &= 1, & \partial\mu^3ged_2bv &= 5.\end{aligned}$$

8) Das Centrum S sei ein beliebiger Punkt auf einer der drei Wendetangenten, die Axe r liege beliebig, und λ sei gleich 0. Dann erhält man die Ausartung η' mit folgender Beschreibung. η' besteht aus einer dreifachen Ordnungsgeraden g , auf welcher ein doppelter Rangpunkt e und zwei einfache Rangpunkte d liegen. Durch e geht eine nicht mit g zusammenfallende Wendetangente, so dass in e ein Wendepunkt liegt. Die beiden andern Wendepunkte sind zwei von den Rangpunkten verschiedene Punkte auf g , so dass in g zwei Wendetangenten coincidiren. Von den drei Punkten u fallen also zwei in e , und einer liegt auf g , verschieden von den andern ausgezeichneten Punkten. Auch der Doppelpunkt liegt auf g , ohne mit einem der eben erwähnten Punkte zu coincidiren. Hiernach müssen auch der Strahl s und die beiden p mit g coincidiren. Die 7 ausgezeichneten Punkte liegen auf g derartig, dass ihre Gesamtheit durch 4 von ihnen endlichdeutig bestimmt wird, z. B. dreideutig, wenn der doppelte Rangpunkt, die beiden einfachen Rangpunkte und der Doppelpunkt gegeben ist.

9) Das Centrum S sei ein Wendepunkt, die Axe r liege beliebig und λ sei gleich 0. Dann erhält man die Ausartung δ' mit folgender Definition. δ' besteht aus einer einfachen Ordnungsgeraden a und einer doppelten Ordnungsgeraden g , welche sich in einem dreifachen Rangpunkte e schneiden. Ausserdem liegen auf g , getrennt von einander, der einfache Rangpunkt d , der Doppelpunkt b , einer der drei Punkte u und ein Punkt v_2 , welcher zwei Wendepunkte in sich vereinigt, so dass in g zwei Wendetangenten coincidiren. Die dritte Wendetangente coincidirt mit a , und ihr Wendepunkt v ist ein von e verschiedener Punkt auf ihr. Die beiden p fallen mit g , die beiden andern u mit e zusammen. Der Strahl s verbindet v_2 mit v . Die Gesamtheit der 5 auf g liegenden ausgezeichneten Punkte wird durch 3 von ihnen endlichdeutig bestimmt, z. B. eindeutig, wenn e , d , b , v gegeben ist.

10) Das Centrum S sei der Doppelpunkt, die Axe r liege beliebig und λ sei gleich 0. Dann erhält man die Ausartung ψ mit folgender Beschreibung. ψ besteht aus drei einfachen, sich in drei verschiedenen Punkten schneidenden Ordnungsgeraden. Von diesen drei Schnittpunkten sind zwei zweifache Rangpunkte, sie mögen e und e' heissen, der dritte Schnittpunkt ist der Doppelpunkt b , so dass die beiden p in die beiden b anliegenden Ordnungsgeraden fallen. Auf der dritten,

e und e' verbindenden Ordnungsgeraden g liegen getrennt von einander die drei Punkte v und die drei Punkte u , so dass sowohl die drei f , als auch der Strahl s mit g coincidiren. *Die Gesamtheit der 8 auf g liegenden Punkte ist durch 3 von ihnen endlichdeutig bestimmt, z. B. eindeutig, wenn e , e' und einer der drei Punkte v gegeben ist.*

Ausser den eben beschriebenen 10 Ausartungen lassen sich noch einige andere durch homographische Abbildung erzeugen. Auf diese gehen wir nicht näher ein. Doch besitzt die C_3^4 auch Ausartungen, welche in fundamentalen Systemen auftreten, aber dennoch *nicht* nach unserer Methode aus der allgemeinen C_3^4 gewonnen werden können. Von diesen Ausartungen brauchen wir für unsere Zwecke nur eine. Sie ist durch die folgende, vom Verfasser a posteriori erkannte Beschreibung defnirt.

11) *Die Ausartung η besteht aus einer dreifachen Ordnungsgeraden g , auf welcher ein zweifacher Rangpunkt e , zwei einfache Rangpunkte d und ein Wendepunkt v liegen, so dass eine Wendetangente mit g zusammenfällt. Die beiden andern Wendetangenten und die beiden Doppelpunktstangenten sind Strahlen durch e , so dass in e der Doppelpunkt, zwei Wendepunkte und die drei Punkte u vereinigt liegen. Der Strahl s coincidirt also mit g . Das ganze Gebilde ist eindeutig bestimmt, wenn die Lage der Ordnungsgeraden, der Rangpunkte und der beiden nicht mit g coincidirenden Wendetangenten gegeben sind.*

Von den eben beschriebenen 11 Ausartungen sind

- 1) *erster Gattung:* $\varepsilon, \vartheta, \psi$;
- 2) *zweiter Gattung:* $\tau, \delta, \delta', \eta, \eta'$,
- 3) *dritter Gattung:* ξ, ξ', κ .

Die mit denselben Buchstaben bezeichneten, nur durch das Stricheln derselben unterschiedenen Ausartungen stimmen im Ort ihrer Punkte und ihrer Tangenten genau überein. Diejenigen Systeme, zu deren Bestimmung ausser elementaren Bedingungen *nur* Wendetangentenbedingungen gegeben sind, enthalten von den obigen Ausartungen nur folgende vier:

$$\tau, \delta, \eta, \xi.$$

A posteriori erkennt man ferner, dass diese vier und die beiden Ausartungen nullter Gattung χ und γ die *einzigen* Ausartungen sind, welche in solchen Systemen vorkommen können.

§ 55.

Einführung der Ausartungszahlen in die Formeln des § 53.

Bei jeder der 10 Ausartungen, welche in § 54. durch homographische Abbildung erzeugt sind, lässt sich aus der hinzugefügten Beschreibung leicht erkennen, ob diese Ausartung mit dem Coefficienten

Null oder mit einem von Null verschiedenen Coefficienten in die ersten 23 Formeln des § 53. eintritt, im letzteren Falle bisweilen auch, mit welchem Coefficienten, oder wenigstens doch, ob der Coefficient durch 2 oder 3 theilbar sein muss. Dieser Umstand reicht vollkommen zur Bestimmung *sämmtlicher Coefficienten* in den 23 Gleichungen aus, da diese ja nur 8 von einander unabhängige repräsentiren. Man erhält so für die 23 mal 10 Coefficienten die folgende Tabelle, aus welcher man die Coefficienten nach der Regel ablese, dass *jede Zahl α gleich der Summe der 10 Producte ist, deren jedes einen in derselben Horizontalreihe stehenden Coefficienten zum einen Factor und diejenige Ausartungszahl zum andern Factor hat, welche mit diesem Coefficienten in derselben Verticalreihe steht.*

Tabelle der Coefficienten der Ausartungszahlen in den ersten 23 Formeln des § 53.

	τ	δ	ζ	ζ'	ε	ϑ	ψ	δ'	η'	κ
α_1	3	3	2	1	3	3	0	1	2	0
α_2	6	6	4	6	6	6	0	2	6	6
α_3	6	6	2	4	6	6	0	3	6	6
α_4	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
α_5	3	3	1	2	3	3	3	0	3	3
α_6	0	1	2	6	6	2	0	1	6	2
α_7	12	6	3	6	0	1	2	2	3	12
α_8	0	0	0	0	6	6	6	1	2	0
α_9	6	6	2	0	0	0	0	1	0	6
α_{10}	3	6	0	0	0	0	0	1	2	6
α_{11}	0	0	0	2	2	2	0	1	2	2
α_{12}	4	3	2	0	0	0	0	0	0	0
α_{13}	0	0	0	3	9	6	3	3	6	0
α_{14}	0	0	0	6	6	4	2	2	6	6
α_{15}	12	9	2	4	0	0	0	2	4	12
α_{16}	0	0	1	3	3	2	1	0	3	0
α_{17}	0	0	0	1	3	3	3	0	2	0
α_{18}	4	3	3	6	4	1	0	1	5	4
α_{19}	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0
α_{20}	6	3	2	6	6	4	2	3	6	6
α_{21}	6	3	0	2	6	6	6	3	4	6
α_{22}	6	4	2	6	6	4	4	2	6	8
α_{23}	6	0	4	8	6	6	6	2	4	6

Aus diesen Coefficienten erhält man mit vielen Bestätigungen die Zusammensetzung der in § 53. mit

$$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_b, \alpha_f, \alpha_p, \alpha_v, \alpha_u, \alpha_s$$

bezeichneten Zahlen. Jeder dieser 8 Zahlen fügen wir das a posteriori bestimmte Vielfache der Ausartung η hinzu. Dann erhalten wir die folgenden 8 Hauptformeln, welche für alle Systeme gelten, in denen keine andern als die oben beschriebenen Ausartungen vorkommen.

- 1) $3\varrho - 2\nu = 2\chi + 6\tau + 3\delta$
 $+ 2\vartheta + 4\psi + 1\delta' + 6\alpha,$
- 2) $2\nu - 4\mu = \gamma + 2\tau + 2\delta + 6\eta + 2\xi$
 $+ 4\xi' + 4\varepsilon + 2\vartheta + 1\delta' + 4\eta' + 2\alpha,$
- 3) $2\nu - \frac{1}{2}\varrho - 3\mu = b + \frac{1}{2}\delta + 3\eta + \xi$
 $+ 3\xi' + 3\varepsilon + 1\vartheta + \frac{1}{2}\delta' + 3\eta' + 1\alpha,$
- 4) $\frac{3}{2}\varrho = f + 3\tau + \frac{3}{2}\delta + 2\eta + 1\xi$
 $+ 2\xi' + \frac{1}{2}\delta' + 1\eta' + 3\alpha,$
- 5) $3\nu - \frac{1}{2}\varrho - 4\mu = p + 1\tau + \frac{3}{2}\delta + 6\eta + 2\xi$
 $+ 4\xi' + 4\varepsilon + 1\vartheta + \frac{1}{2}\delta' + 4\eta' + 1\alpha,$
- 6) $\nu + \frac{3}{2}\varrho - 3\mu = v + 3\tau + \frac{3}{2}\delta + 3\eta + 1\xi$
 $+ 3\xi' + 3\varepsilon + 2\vartheta + 1\psi + \frac{3}{2}\delta' + 3\eta' + 3\alpha,$
- 7) $\frac{3}{2}\varrho - \mu = u + 2\tau + \frac{1}{2}\delta + 1\eta + 1\xi$
 $+ 2\xi' + 1\varepsilon + 1\vartheta + 1\psi + \frac{1}{2}\delta' + 1\eta' + 2\alpha,$
- 8) $\frac{1}{2}\varrho = s + 1\tau + \frac{1}{2}\delta$
 $+ \frac{1}{2}\delta' + 1\alpha.$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man zu sehr vielen Fundamentalzahlen der C_3^4 gelangen, vorausgesetzt, dass für sehr viele Systeme die Anzahlen der 2+11 berücksichtigten Ausartungen berechnet vorliegen. Die Berechnung der Ausartungsanzahlen ist daher unser nächstes Ziel.

§ 56.

Die Berechnung und die Tabellen der Ausartungsanzahlen.

Durch die in § 53. und § 54. gegebene Beschreibung der Ausartungen der C_3^4 ist zugleich festgestellt, in welcher Weise dieselben jede der fundamentalen Bedingungen zu erfüllen vermögen. Daher lässt sich die Zahl, welche angiebt, wie oft eine gewisse Ausartung α eine gegebene 10-fache fundamentale Bedingung erfüllt, durch die Anzahlen ihrer *Theilgebilde* resp. durch die in § 54. mitgetheilten *Stammzahlen* ausdrücken. Die *Theilgebilde* der 11 Ausartungen von höherer als der nullten Gattung sind nur Punkt, Strahl und Ebene, zu den *Theilgebilden* von χ gehört ausserdem auch der Kegelschnitt,

und zu den Theilgebilden von γ die cubische Plancurve C_3^3 mit Spitze. Die zur Berechnung der Zahlen χ nöthigen Kegelschnittzahlen sind in § 36. und § 37. bestimmt, und die zur Berechnung der Zahlen γ erforderlichen, auf die C_3^3 bezüglichen Anzahlen sind im vorigen Abschnitt ausführlich abgeleitet. *Damit ist die Berechnung aller fundamentalen Anzahlen der 13 Ausartungen theoretisch geleistet.*

Die numerische Ausrechnung lässt sich in derselben Weise, wie dies bei den Plancurven C_3^3 in den §§ 44. bis 47. ausführlich gezeigt ist, zweckmässig und übersichtlich einrichten. Es wird daher genügen, wenn wir hier nur einige Beispiele für die Ausrechnung geben. Dabei sind, der späteren Anwendung wegen, die auf die Wendetangenten bezüglichen Bedingungen vor den übrigen Singularitätenbedingungen bevorzugt.

1) Beispiele für die χ .

- a) $\chi v^6 \varrho^4 = \chi(n+a)^6(r+2e)^4$, wo n resp. r die Bedingung bezeichnet, welche χ dadurch erfüllt, dass sein Kegelschnitt eine gegebene Gerade schneidet, resp. eine gegebene Ebene berührt. Man hat daher:

$$\begin{aligned}\chi v^6 \varrho^4 &= 4_0 \cdot 2^0 \cdot 2 \cdot [6_4 \cdot 2 \cdot 16 + 6_3 \cdot 2 \cdot 48 + 6_2 \cdot 64] \\ &\quad + 4_1 \cdot 2^1 \cdot [6_4 \cdot 2 \cdot 16 + 6_3 \cdot 2 \cdot 72 + 6_2 \cdot (72 \cdot 2 + 104) + 6_1 \cdot 104 \cdot 2] \\ &\quad + 4_2 \cdot 2^2 \cdot [6_3 \cdot 2 \cdot 16 + \frac{1}{2} \cdot (76 + 28) + 6_1 \cdot 128] \\ &\quad + 4_3 \cdot 2^3 \cdot [6_2 \cdot 10 + 6_1 \cdot 24] \\ &= 153984.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \chi p \mu^3 v^6 &= 6_2 \cdot (1 + 2) + 6_1 \cdot (1 \cdot 2 + 1 \cdot 2) \\ &= 69.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } \chi f.f.c.b^2 \mu \varrho^3 &= 3_1 \cdot [3_0 \cdot 2^0 \cdot 2 + 3_1 \cdot 2^1 \cdot 2] \\ &= 42.\end{aligned}$$

2) Beispiele für die γ .

- a) $\gamma v^6 \varrho^4 = \gamma v^6(\varrho + c)^4$, wo das ϱ resp. das c rechts vom Gleichheitszeichen die Bedingung bedeutet, dass die Plancurve C_3^3 , welche γ angehört, eine gegebene Ebene berühre, resp. ihre Spitze in einer gegebenen Ebene habe. Also

$$\begin{aligned}\gamma v^6 \varrho^4 &= \gamma v^6 \varrho^4 + 4_1 \cdot \gamma v^6 \varrho^3 c + 4_2 \cdot \gamma v^6 \varrho^2 c^2 + 4_3 \cdot \gamma v^6 \varrho c^3 \\ &= 43104 + 4_1 \cdot 25560 + 4_2 \cdot 4592 + 4_3 \cdot 264 \\ &= 173952.\end{aligned}$$

- b) Ueberhaupt hat man, wenn man für die Bedingungen, welche sich auf die γ angehörige C_3^3 beziehen, rechts dieselben Symbole, wie im vorigen Abschnitt setzt:

$$\begin{aligned}\gamma b &= \gamma c, & \gamma f &= \gamma(w+2q), & \gamma s &= \gamma z, \\ \gamma v &= \gamma(c+2v), & \gamma p &= 2\gamma q, & \gamma u &= \gamma(c+2y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad \gamma f_e f \mu^3 v^2 \varrho^2 &= \gamma (w_e + 2q_e) (w + 2q) \mu^3 v^2 (\varrho + c)^2 \\
 &= 2\gamma q w_e (\varrho^2 + 2\varrho c + c^2) \mu^3 v^2 + 2\gamma q_e w (\varrho^2 + 2c\varrho) \mu^3 v^2 \\
 &= 2 \cdot (27 + 2 \cdot 18 + 3) + 2 \cdot (36 + 2 \cdot 9) \\
 &= 240.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad \gamma b f \mu^3 v^3 &= \gamma c (w + 2q) \mu^3 v^3 \\
 &= 52 + 2 \cdot 7 \\
 &= 66.
 \end{aligned}$$

3) Beispiele für die τ .

$$\begin{aligned}
 a) \quad \tau f_e^2 \mu v^6 \varrho &= 1_1 \cdot 4^1 \cdot [15 \cdot 2 + 60 \cdot 4 + 15 \cdot 6] \\
 &= 1440.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \tau f_e^3 v^4 &= 3 \cdot 6 \cdot 9 + 3 \cdot 9 + 6 \cdot (27 - 9) \\
 &= 297.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad \tau b^2 f^3 \mu^2 v^2 \varrho &= 4^1 \cdot 9 \\
 &= 36.
 \end{aligned}$$

4) Beispiele für die δ .

$$\begin{aligned}
 a) \quad \delta v^7 \varrho f^2 &= \delta (a + 2g)^7 df^2 \\
 &= 7_3 \cdot 2^3 \cdot 2A \cdot 2g df^2 + 7_4 \cdot 2^1 \cdot 2a_e \cdot 2G df^2 \\
 &= 7_3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 + 7_4 \cdot 2^1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\
 &= 10080.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \delta u^2 v f^3 \mu^2 v \varrho &= 3^2 \cdot 3^1 \cdot \delta e^3 \mu^2 (a + 2g) df^2 \\
 &= 27 (4 + 2 \cdot 1) \\
 &= 162.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad \delta \varrho^5 f^4 &= \delta (d + 3e)^5 f^4 = 6_3 \cdot 3^3 \cdot 6 \cdot 1 \\
 &= 3240.
 \end{aligned}$$

5) Beispiele für die η .

$$\begin{aligned}
 a) \quad \eta \mu v \varrho^6 f^2 &= 3^1 \cdot \eta \mu g \varrho^6 f^2 \\
 &= 3^1 [6_1 \cdot 2^1 \cdot 10 + 6_2 \cdot 2^2 (4 + 3 \cdot 2) + 6_3 \cdot 2^3 \cdot 3] \\
 &= 3600.
 \end{aligned}$$

b) $\eta \mu^3 v \varrho^3 f_3$, wo f_3 bedeuten mag, dass von den 3 Wendetangenten jede eine gegebene Gerade schneidet, ist gleich

$$3^1 \cdot 3 \cdot \eta \mu^2 g \cdot f^2 g \varrho^3 = 3^1 \cdot 3 \cdot (3_1 \cdot 2^1) = 36.$$

6) Beispiel für die ξ .

$$\begin{aligned}
 \xi f_e^3 v \varrho^3 &= 3^1 \cdot 2^3 \cdot \xi f_e^3 g (b + e)^3 \\
 &= 3^1 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 1 + 1) \\
 &= 288.
 \end{aligned}$$

7) Beispiel für die ξ' .

$$\xi' \mu^3 f_e^3 b = 3 \cdot 1 = 3.$$

8) Beispiel für die ε .

$$\begin{aligned} \varepsilon \mu \varrho^8 b &= (8_3 \cdot 5_3 \cdot 2_1 \cdot 1_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 8_3 \cdot 5_2 \cdot 3_2 \cdot 1_1 \cdot \frac{1}{2} + 8_2 \cdot 6_2 \cdot 4_2 \cdot 2_2 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}) \cdot 12 \\ &= (280 + 840 + 105) \cdot 12 \\ &= 14700. \end{aligned}$$

9) Beispiel für die ϑ .

$$\begin{aligned} \vartheta \mu^3 \nu^4 \varrho b v &= \vartheta \mu^3 (2g + a)^4 \varrho b v \\ &= 4_2 \cdot 2^2 \cdot \vartheta \mu^3 g_e a_e \varrho b v \\ &= 4_2 \cdot 2^2 \cdot 2 = 48. \end{aligned}$$

10) Beispiele für die ψ .

$$a) \psi \mu^3 \nu^4 b^2 v = 4_2 \cdot 1 = 6.$$

$$b) \psi \mu^3 \nu^3 \varrho^2 v_g = [3_1 \cdot 2 + 3_0 \cdot 3 \cdot (2_2 + 2_1)] \cdot 2^2 = 60.$$

11) Beispiel für die δ' .

$$\delta' \mu^3 \varrho^4 b v_g = 4_2 \cdot 3^2 = 54.$$

12) Beispiel für die η' .

$$\eta' \mu^4 \nu^2 \varrho^3 b f = 3^2 \cdot [3_1 \cdot 2^1] \cdot 3 = 162.$$

13) Beispiel für die α .

$$\alpha f f b \mu^3 \nu^2 \varrho = 4^1 \cdot [2_1 \cdot 2^1] \cdot 3 = 48.$$

Hieran schliessen wir einige *Tabellen von Ausartungsanzahlen*, und zwar namentlich von solchen, aus denen die vom Verfasser berechneten, auf die C_3^4 bezüglichen Anzahlen hervorgehen. In jeder Reihe bezeichnet die einer α -fachen Bedingung nachgesetzte i^{te} Zahl die Anzahl derjenigen Ausartungen, welche diese Bedingung erfüllen, $i-1$ gegebene Ebenen berühren und $11-\alpha-i$ gegebene Gerade schneiden.

Tabelle von Zahlen χ .

$$\chi \mu^3 = 42, 114, 260, 480, 588, 422, 144, 0.$$

$$\chi \mu^2 = 672, 1652, 3424, 5840, 7264, 6452, 3952, 1344, 0.$$

$$\chi \mu = 5640, 12568, 23632, 36864, 44040, 39820, 26968, 13452, 4224, 0.$$

$$\chi = 31320, 62160, 103328, 141792, 153984, 130960, 86560, 44088, 16072, 3984, 0.$$

$$\chi \mu^3 f = 171, 390, 720, 882, 633, 216, 0.$$

$$\chi \mu^2 f = 2478, 5136, 8760, 10896, 9678, 5928, 2016, 0.$$

$$\chi \mu f = 18852, 35448, 55296, 66060, 59730, 40452, 20178, 6336, 0.$$

$$\chi f = 93240, 160992, 212688, 230976, 196440, 129840, 66132, 24108, 5976, 0.$$

$$\begin{aligned} \chi\mu^3f_e &= 60, 108, 126, 87, 27, 0. \\ \chi\mu^2f_e &= 777, 1290, 1536, 1320, 783, 252, 0. \\ \chi\mu f_e &= 5292, 8034, 9240, 8118, 5364, 2592, 774, 0. \\ \chi f_e &= 22860, 30492, 32064, 26580, 17154, 8460, 2922, 684, 0. \\ \chi\mu^3ef_e &= 12, 18, 12, 3, 0. \\ \chi\mu^2ef_e &= 165, 240, 216, 126, 36, 0. \\ \chi\mu ef_e &= 1128, 1500, 1368, 888, 405, 108, 0. \\ \chi ef_e &= 4662, 5334, 4500, 2832, 1314, 402, 84, 0. \\ \chi\mu^3eb^2 &= 6, 12, 20, 33, 36. \\ \chi\mu^3bv &= 87, 168, 312, 420, 330, 132. \\ \chi\mu^3b^2v &= 18, 36, 72, 108, 108. \\ \chi\mu^3bv_g &= 18, 30, 48, 36, 12. \\ \chi\mu^3b^2v_g &= 3, 6, 12, 12. \\ \chi\mu^3p &= 69, 212, 492, 894, 1115, 894, 432. \end{aligned}$$
Tabelle von Zahlen γ .
$$\begin{aligned} \gamma\mu^3 &= 24, 72, 200, 480, 960, 1424, 1512, 1200. \\ \gamma\mu^2 &= 384, 1040, 2592, 5600, 10240, 14744, 17440, 16512, 12800. \\ \gamma\mu &= 3216, 7872, 17600, 34112, 56320, 76896, 87152, 83520, \\ &\quad 70032, 52320. \\ \gamma &= 17760, 38560, 75072, 124800, 173952, 203840, 204320, \\ &\quad 179712, 142720, 105312, 75520. \\ \gamma\mu^3f_e &= 42, 108, 216, 312, 324, 252. \\ \gamma\mu^2f_e &= 540, 1236, 2256, 3216, 3672, 3420, 2616. \\ \gamma\mu f_e &= 3648, 7416, 12216, 16368, 18216, 17208, 14256, 10536. \\ \gamma f_e &= 15552, 26736, 37056, 42816, 42336, 36792, 28896, 21096, 14976. \\ \gamma\mu^3f^2 &= 180, 504, 1188, 1962, 2214, 1800. \\ \gamma\mu^2f^2 &= 2592, 6480, 13728, 22284, 27864, 27432, 21600. \\ \gamma\mu f^2 &= 19440, 43392, 82200, 124932, 152748, 153900, 132732, 100080. \\ \gamma f^2 &= 93312, 180000, 289632, 383520, 420408, 390312, 317880, \\ &\quad 236952, 169920. \\ \gamma\mu^3bf_e &= 30, 54, 75, 75, 54. \\ \gamma\mu^2bf_e &= 336, 564, 780, 873, 792, 576. \\ \gamma\mu bf_e &= 1968, 3036, 3966, 4344, 4032, 3258, 2316. \\ \gamma bf_e &= 6792, 8976, 10116, 9798, 8316, 6342, 4476, 3096. \\ \gamma\mu^3f_e f_e &= 36, 48, 48, 36. \\ \gamma\mu^3f_e f &= 54, 144, 240, 270, 216. \\ \gamma\mu^3bf &= 66, 168, 342, 507, 528, 396. \\ \gamma\mu^3b^2f_e &= 6, 9, 9, 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma\mu^3bf_e f_e &= 12, 12, 8. \\
\gamma\mu^3b^2f_e f &= 6, 6, 4. \\
\gamma\mu^3bv &= 51, 114, 204, 276, 267, 186. \\
\gamma\mu^3b^2v &= 9, 18, 27, 27, 18. \\
\gamma\mu^3bv_e &= 15, 30, 48, 54, 45. \\
\gamma\mu^3b^2v_e &= 3, 6, 9, 9. \\
\gamma\mu f_e^3 &= 162, 216, 216, 162. \\
\gamma f_e^3 &= 1188, 1260, 1044, 756, 522.
\end{aligned}$$

Tabelle von Zahlen τ .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\tau\mu^3f^2 &= 15, 24, 16, 0, 0, 0. \\
\frac{1}{3}\tau\mu^2f^2 &= 180, 260, 192, 64, 0, 0, 0. \\
\frac{1}{3}\tau\mu f^2 &= 1120, 1440, 1040, 384, 0, 0, 0, 0. \\
\frac{1}{3}\tau f^2 &= 4200, 4480, 2880, 960, 0, 0, 0, 0, 0. \\
\tau\mu^2f_e^3 &= 9, 0, 0. \\
\tau\mu f_e^3 &= 81, 0, 0, 0. \\
\tau f_e^3 &= 297, 0, 0, 0, 0.
\end{aligned}$$

Bezeichnet f_3 die Bedingung, dass von den 3 Wendetangenten auf τ jede eine gegebene Gerade schneide, so hat man:

$$\begin{aligned}
\tau\mu^3f_3 &= 135, 216, 144, 0, 0. \text{ Ferner ist:} \\
\tau\mu^3f_e^3 &= 9, 0, 0, 0. \\
\tau\mu^3f_e f &= 54, 36, 0, 0, 0. \\
\tau\mu^3f_e^2 f &= 9, 0, 0. \\
\tau\mu^3b^2f^2 &= 9, 0, 0, 0. \\
\tau\mu^2b^2f^2 &= 108, 36, 0, 0, 0. \\
\tau\mu b^2f^2 &= 585, 216, 0, 0, 0, 0. \\
\tau b^2f^2 &= 1620, 540, 0, 0, 0, 0, 0. \\
\tau\mu^2b^3f^2 &= 9, 0, 0, 0. \\
\tau\mu b^3f^2 &= 54, 0, 0, 0, 0. \\
\tau b^3f^2 &= 135, 0, 0, 0, 0, 0. \\
\tau\mu^2b^3f^3 &= 9, 0, 0. \\
\tau\mu b^3f^3 &= 81, 0, 0, 0. \\
\tau b^3f^3 &= 297, 0, 0, 0, 0.
\end{aligned}$$

Tabelle von Zahlen δ .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\delta\mu^3f^2 &= 0, 24, 114, 153, 54, 0. \\
\frac{1}{3}\delta\mu^2f^2 &= 0, 240, 976, 1374, 1032, 360, 0. \\
\frac{1}{3}\delta\mu f^2 &= 0, 1240, 4300, 5890, 4632, 1890, 540, 0. \\
\frac{1}{3}\delta f^2 &= 0, 3360, 8320, 9640, 6552, 2340, 540, 0, 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\delta\mu^3ef^2 &= 0, 18, 29, 9, 0. \\
\frac{1}{3}\delta\mu^2ef^2 &= 0, 152, 260, 203, 66, 0. \\
\frac{1}{3}\delta\mu ef^2 &= 0, 660, 1106, 908, 342, 90, 0. \\
\frac{1}{3}\delta ef^2 &= 0, 1240, 1780, 1266, 420, 90, 0, 0. \\
\frac{1}{3}\delta\mu^3e^2f^2 &= 0, 4, 1, 0. \\
\frac{1}{3}\delta\mu^2e^2f^2 &= 0, 36, 34, 10, 0. \\
\frac{1}{3}\delta\mu e^2f^2 &= 0, 152, 152, 51, 12, 0. \\
\frac{1}{3}\delta e^2f^2 &= 0, 240, 208, 62, 12, 0, 0. \\
\delta\mu^2f_e^3 &= 0, 6, 1. \\
\delta\mu f_e^3 &= 0, 72, 18, 1. \\
\delta f_e^3 &= 0, 234, 63, 12, 0. \\
\delta\mu^3f_e f &= 0, 54, 87, 27, 0. \\
\delta\mu^3f_e f_e &= 0, 12, 3, 0. \\
\delta\mu^3f_e f_e f &= 0, 6, 1. \\
\delta\mu^3f_3 &= 0, 72, 243, 243, 54.
\end{aligned}$$

Tabelle von Zahlen η .

$$\begin{aligned}
\eta\mu^3f^2 &= 0, 0, 0, 54, 144, 150. \\
\eta\mu^2f^2 &= 0, 0, 0, 324, 864, 1260, 1200. \\
\eta\mu f^2 &= 0, 0, 0, 972, 2592, 3780, 3600, 2940. \\
\eta f^2 &= 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0. \\
\eta e\mu^3f^2 &= 0, 0, 9, 27, 27. \\
\eta e\mu^2f^2 &= 0, 0, 54, 162, 246, 230. \\
\eta e\mu f^2 &= 0, 0, 162, 486, 738, 690, 550. \\
\eta e^2\mu^3f^2 &= 0, 0, 3, 3. \\
\eta e^2\mu^2f^2 &= 0, 0, 18, 36, 34. \\
\eta e^2\mu f^2 &= 0, 0, 54, 108, 102, 80. \\
\eta\mu^2f_e^3 &= 0, 0, 3. \\
\eta\mu f_e^3 &= 0, 0, 18, 18. \\
\eta f_e^3 &= 0, 0, 27, 27, 21. \\
\eta\mu^3f_3 &= 0, 0, 0, 54, 144.
\end{aligned}$$

Tabelle von Zahlen ξ .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\xi\mu^3f^3 &= 0, 0, 36, 72, 48. \\
\frac{1}{6}\xi\mu^2f^3 &= 0, 0, 216, 432, 480, 320. \\
\frac{1}{6}\xi\mu f^3 &= 0, 0, 648, 1296, 1440, 960, 640. \\
\frac{1}{6}\xi f^3 &= 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\xi\mu^3f_e^3 &= 3, 2. \\
\frac{1}{2}\xi\mu^2f_e^3 &= 18, 18, 12. \\
\frac{1}{2}\xi\mu f_e^3 &= 54, 54, 36, 24. \\
\xi\mu^3f_e^2f &= 18, 30, 20. \\
\xi\mu^3bf_e^2f &= 6, 4. \\
\xi\mu^3f_e^3s &= 3. \\
\xi\mu^3vf_e^3 &= 3.
\end{aligned}$$

Tabelle von sonstigen Ausartungszahlen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\varepsilon\mu^3b &= 0, 0, 0, 0, 9, 30, 45. \\
\varepsilon\mu^3bv &= 0, 0, 0, 162, 504, 690. \\
\varepsilon\mu^3b^2v &= 0, 0, 0, 54, 156. \\
\varepsilon\mu^3bv_g &= 0, 0, 0, 54, 132. \\
\varepsilon\mu^3b^2v_g &= 0, 0, 0, 18. \\
\varepsilon\mu^3bf &= 0, 0, 0, 0, 108, 360. \\
\vartheta\mu^3b &= 0, 0, 24, 126, 219, 150, 0. \\
\vartheta\mu^3bv &= 0, 48, 198, 321, 219, 0. \\
\vartheta\mu^3b^2v &= 0, 12, 49, 57, 0. \\
\vartheta\mu^3bv_g &= 0, 12, 48, 51, 0. \\
\vartheta\mu^3b^2v_g &= 0, 2, 9, 0. \\
\vartheta\mu^3bf &= 0, 0, 18, 99, 144, 0. \\
\delta'\mu^3bv &= 0, 24, 114, 153, 54, 0. \\
\delta'\mu^3b^2v &= 0, 6, 31, 36, 0. \\
\delta'\mu^3bv_g &= 0, 12, 52, 81, 54. \\
\delta'\mu^3b^2v_g &= 0, 4, 19, 36. \\
\psi\mu^3bv &= 30, 84, 132, 168, 96, 0. \\
\psi\mu^3b^2v &= 6, 18, 36, 48, 48. \\
\psi\mu^3bv_g &= 12, 30, 52, 48, 0. \\
\psi\mu^3b^2v_g &= 3, 8, 16, 24. \\
\zeta\mu^3bf_e^3 &= 3. \\
\alpha\mu^3f_e f_e f_e b &= 6, 0.
\end{aligned}$$

§ 57.

Die Berechnung und die Tabellen der Anzahlen für die cubische Plancurve mit Doppelpunkt.

Aus den Ausartungszahlen, deren Berechnung in § 56. besprochen ist, kann man eine grosse Menge von Anzahlen für die C_3^4 nach der im IV. Abschnitt erörterten Methode finden. Man benutze dabei die acht

Formeln des § 55. Ausserdem hat man jedoch zu dieser Berechnung noch viele andere Mittel zur Verfügung, nämlich alle die, welche den für die C_3^3 in § 49. angegebenen Mitteln analog sind. Wir erwähnen beispielsweise die Formeln, welche hier den Formeln 13) und 14) des § 49. entsprechen. Es bezeichnen wieder q , die Bedingung, eine gegebene Ebene in einem Punkte einer auf dieser Ebene gegebenen Geraden zu berühren. Dann hat man:

$$v^2 = (\mu\nu - 3\mu^2) + 6\mu^2 + q + 2b^2 + \alpha,$$

$$q^2 = q + 3f + \alpha,$$

wo α , resp. α_e die Summe aller derjenigen hinlänglich oft gezählten Ausartungen ist, welche, dem vorausgesetzten zweistufigen Systeme angehörig, ihre vielfache Ordnungsgerade eine gegebene Gerade schneiden lassen, resp. einen ihrer vielfachen Rangpunkte auf einer gegebenen Ebene besitzen. Beispielsweise hat α_e in Systemen, welche nur die Ausartungen χ , γ , τ , δ , η enthalten, den Werth:

$$\chi e + 12\tau e + 6\delta e + 6\eta e.$$

Ausserdem hat der Verfasser noch die Formel verwerthet, welche man nach dem Princip von der Erhaltung der Anzahl erhält, wenn man die beiden Ebenen der zusammengesetzten Bedingung qu zusammenfallen lässt. Diese Formel lautet für Systeme, in denen nur die Ausartungen nullter Gattung vorkommen, wie folgt:

$$qu = 4f + 2\chi e + \gamma e.$$

Von den Anzahlen der C_3^4 hat der Verfasser im Hinblick auf die Anwendung bei der cubischen Raumcurve *wirklich ausgerechnet* alle diejenigen Anzahlen, welche angeben, wieviel Curven ausser elementaren Bedingungen, nur Wendetangenten-Bedingungen befriedigen. In den durch solche Bedingungen definirten einstufigen Systemen sind nur die Anzahlen folgender 6 Ausartungen von Null verschieden:

$$\chi, \gamma, \tau, \delta, \eta, \xi.$$

Zunächst erhält man aus den in § 56. angegebenen Zahlen

$$\mu^3\chi, \mu^3\gamma, \mu^2\chi, \mu^2\gamma, \mu\chi, \mu\gamma, \chi, \gamma$$

durch die Formeln 1) und 2) des § 55. *alle Elementarzahlen* der C_3^4 , und zwar jede ν und ρ zugleich enthaltende Anzahl *zweimal*. Von diesen Zahlen gelangt man durch die Formel 4) des § 55. zu den Zahlen:

$$\mu^3f, \mu^2f, \mu f, f.$$

Zu eben diesen Zahlen gelangt man aber auch aus den elementaren Bedingungen und den die Bedingung f enthaltenden Zahlen χ und γ . Ebenso führen die Zahlen

$$\mu^3f\chi \text{ und } \mu^3f\gamma$$

zu den Zahlen $\mu^3 f_e$ der C_3^4 , und diese wieder durch die Formel 4) des § 55. zu den Zahlen

$$\mu^3 f_e f.$$

So kann man schliesslich zu allen Zahlen gelangen, welche angeben, wieviel Curven *ausser elementaren Bedingungen nur Bedingungen erfüllen, die auf die Lage der Wendetangenten Bezug haben*. Von diesen Anzahlen braucht man jedoch direct aus den Ausartungszahlen nur diejenigen 300 Anzahlen zu berechnen, welche nur elementare Bedingungen oder neben elementaren Bedingungen nur die Bedingungen

$$f, f_e, f^2, ff_e, f_e^2, f^3, f^2 f_e, ff_e^2, f_e^3$$

enthalten, da aus diesen sich alle übrigen Anzahlen durch die in § 11. entwickelten, und in § 52. wiederholten Formeln ergeben. Jene 300 Anzahlen sind in der ersten der folgenden Tabellen zusammengestellt. Hinzugefügt sind von den übrigen Wendetangentenanzahlen beispielsweise diejenigen, welche neben elementaren Bedingungen die Bedingungen

$$f^4, f^5, f^6, f^7, f^8, f^9$$

enthalten.

Von sonstigen Anzahlen der C_3^4 hat der Verfasser nur wenige berechnet, und diese hauptsächlich nur, um sich über die Eigenschaften gewisser Ausartungen der C_3^4 a posteriori Kenntniss zu verschaffen, z. B. der Ausartungen ε und ϑ . Diese sonstigen Anzahlen, welche man zur Berechnung der Elementarzahlen der cubischen Raumcurve *nicht* nöthig hat, sind in der zweiten der folgenden Tabellen zusammengestellt. Die Anordnung der Zahlen in diesen Tabellen ist im Einklang mit der Anordnung in den früheren Tabellen. *Jede einer α -fachen Bedingung nachgesetzte i^e Zahl bedeutet also die Anzahl derjenigen Curven C_3^4 , welche diese α -fache Bedingungen erfüllen, $i - 1$ gegebene Ebenen berühren, und $12 - \alpha - i$ gegebene Gerade schneiden.*

Tabelle I.

Die Elementarzahlen und die Wendetangenten-Anzahlen der C_3^4 .

$$\mu^3 = 12; 36, 100, 240, 480, 712, 756, 600, 400.$$

$$\mu^2 = 216, 592, 1496, 3280, 6080, 8896, 10232, 9456, 7200, 4800.$$

$$\mu = 2040, 5120, 11792, 23616, 40320, 56240, 64040, 60672, 49416, 35760, 23840.$$

Die Zahlen $\nu^{11}, \nu^{10} \varrho, \nu^9 \varrho^2, \dots \varrho^{11}$ sind:

$$12960, 29520, 61120, 109632, 167616, 214400, 230240,$$

$$211200, 170192, 124176, 85440, 56960.$$

$$\mu^3 f = 54, 150, 360, 720, 1068, 1134, 900, 600.$$

$$\mu^2 f = 888, 2244, 4920, 9120, 13344, 15348, 14184, 10800, 7200.$$

$$\mu f = 7680, 17688, 35424, 60480, 84360, 96060, 91008, 74124, 53640, 35760.$$

$$f = 44280, 91680, 164448, 251424, 321600, 345360, 316800, 255288, 186264, 128160, 85440.$$

$$\mu^3 f_e = 21, 54, 108, 156, 162, 126, 84.$$

$$\mu^2 f_e = 312, 726, 1344, 1920, 2160, 1962, 1476, 984.$$

$$\mu f_e = 2448, 5160, 8796, 12024, 13428, 12528, 10080, 7236, 4824.$$

$$f_e = 12672, 23688, 36120, 45456, 48024, 43452, 34608, 25020, 17136, 11424.$$

$$\mu^3 f^2 = 225, 540, 1080, 1602, 1701, 1350, 900.$$

$$\mu^2 f^2 = 3366, 7380, 13680, 20016, 23022, 21276, 16200, 10800.$$

$$\mu f^2 = 26532, 53136, 90720, 126540, 144090, 136512, 111186, 80460, 53640.$$

$$f^2 = 137520, 246672, 377136, 482400, 518040, 475200, 382932, 279396, 192240, 128160.$$

$$\mu^3 f f_e = 81, 162, 234, 243, 189, 126.$$

$$\mu^2 f f_e = 1089, 2016, 2880, 3240, 2943, 2214, 1476.$$

$$\mu f f_e = 7740, 13194, 18036, 20142, 18792, 15120, 10854, 7236.$$

$$f f_e = 35532, 54180, 68184, 72036, 65178, 51912, 37530, 25704, 17136.$$

$$\mu^3 f_e^2 = 27, 36, 36, 27, 18.$$

$$\mu^2 f_e^2 = 324, 432, 468, 414, 306, 204.$$

$$\mu f_e^2 = 2061, 2664, 2880, 2628, 2079, 1476, 984.$$

$$f_e^2 = 8226, 9936, 10224, 9072, 7110, 5076, 3456, 2304.$$

$$\mu^3 f^3 = 405, 864, 1458, 1755, 1494, 1050.$$

$$\mu^2 f^3 = 6210, 12420, 20448, 25974, 25542, 20160, 13800.$$

$$\mu f^3 = 49464, 91620, 142380, 177318, 178740, 150714, 111060, 74580.$$

$$f^3 = 256608, 429624, 608400, 707760, 683316, 563868, 416664, 288360, 192240.$$

$$\mu^3 f^2 f_e = 81, 162, 216, 189, 135.$$

$$\mu^2 f^2 f_e = 1269, 2340, 3150, 3177, 2532, 1754.$$

$$\mu f^2 f_e = 10071, 17064, 22320, 23130, 19665, 14496, 9754.$$

$$f^2 f_e = 51030, 77256, 93564, 92070, 75978, 55890, 38556, 27504.$$

$$\mu^3 f f_e^2 = 27, 36, 30, 21.$$

$$\mu^2 f f_e^2 = 324, 432, 432, 342, 238.$$

$$\mu f f_e^2 = 2241, 2988, 3150, 2673, 1956, 1316.$$

$$ff^2 = 10044, 12636, 12672, 10386, 7560, 5184, 3456.$$

$$\mu^3 f_e^3 = 9, 6, 4.$$

$$\mu^2 f_e^3 = 81, 72, 54, 37.$$

$$\mu f_e^3 = 486, 486, 396, 282, 189.$$

$$f_e^3 = 1863, 1836, 1458, 1035, 702, 468.$$

$$\mu^3 f^1 = 405, 864, 1188, 1053, 756.$$

$$\mu^2 f^1 = 7290, 14364, 21096, 23004, 19080, 13440.$$

$$\mu f^1 = 65450, 114840, 165168, 186498, 169398, 130230, 89520.$$

$$f^1 = 349596, 568080, 760680, 822132, 732864, 565056, 401220, 281520.$$

$$\mu^3 f^5 = 405, 540, 450, 315.$$

$$\mu^2 f^5 = 7290, 12420, 15120, 12960, 9240.$$

$$\mu f^5 = 66690, 114840, 149400, 149400, 120300, 84490.$$

$$f^5 = 382320, 616680, 776880, 775800, 642240, 475320, 326780.$$

$$\mu^3 f^6 = 135, 90, 60.$$

$$\mu^2 f^6 = 5670, 7020, 5760, 4020.$$

$$\mu f^6 = 61830, 90540, 99720, 82800, 58620.$$

$$f^6 = 382320, 568080, 647280, 583560, 450720, 314520.$$

$$\mu^2 f^7 = 1890, 1260, 840.$$

$$\mu f^7 = 41580, 47880, 38640, 26880.$$

$$f^7 = 328860, 415800, 408240, 325080, 227920.$$

$$\mu f^8 = 13860, 9240, 6160.$$

$$f^8 = 196560, 206640, 162960, 112840.$$

$$f^9 = 65520, 43680, 29120.$$

Wegen der Anwendung bei der cubischen Raumcurve mögen noch die Zahlen μP , P , P^2 hier Platz finden, welche aus den Elementarzahlen durch die Formel:

$$P = \mu v - 4u^2$$

resultiren.

$$\mu P = 180, 484, 1196, 2560, 4640, 6760, 7964, 7656, 6000.$$

$$P = 1392, 3344, 7304, 13776, 22080, 29552, 33344, 32304, 27816, 21360,$$

$$P^2 = 144, 376, 896, 1840, 3200, 4624, 5696, 5856.$$

Tabelle II.

Sonstige Anzahlen der C_3^1 .

$$\mu^3 b = 6, 22, 80, 240, 604, 1046, 1212, 1000.$$

$$\mu^3 p = 18, 58, 180, 480, 1084, 1758, 1968, 1600.$$

$$\mu^3 v = 66, 186, 460, 960, 1548, 1846, 1656, 1200.$$

$$\mu^3 u = 54, 150, 360, 720, 1068, 1134, 900, 600.$$

$$\mu^3 s = 18, 50, 120, 240, 356, 378, 300, 200.$$

$$\mu^3 b^2 = 1, 4, 16, 52, 142, 256, 304.$$

$$\mu^3 v_j = 18, 50, 120, 240, 356, 378, 300.$$

$$\mu^3 p_e = 5, 18, 64, 188, 354, 430, 368.$$

$$\mu^3 s_e = 25, 60, 120, 178, 189, 150, 100.$$

$$\mu^3 q_j = 10, 28, 68, 136, 196, 200, 148.$$

$$\mu^3 b v = 39, 142, 392, 894, 1411, 1484, 1092.$$

$$\mu^3 b^2 v = 7, 28, 82, 199, 322, 352.$$

$$\mu^3 b v_j = 11, 40, 108, 236, 319, 246.$$

$$\mu^3 b^2 v_j = 2, 8, 24, 59, 92.$$

$$\mu^3 b f = 33, 120, 360, 906, 1569, 1818, 1500.$$

$$\mu^3 b^2 f = 6, 24, 78, 213, 384, 456.$$

$$\mu^3 b f_e = 15, 54, 138, 231, 261, 210.$$

$$\mu^3 b^2 f_e = 3, 12, 33, 57, 66.$$

$$\mu^3 b f f_e = 81, 180, 276, 297, 234.$$

$$\mu^3 b^2 f f_e = 18, 42, 66, 72.$$

$$\mu^3 b f_e^2 = 36, 48, 48, 36.$$

$$\mu^3 b^2 f_e^2 = 9, 12, 12.$$

$$\mu^3 b f_e^3 = 6, 4.$$

$$\mu^3 b^2 f_e^3 = 1.$$

$$\mu^3 v f_e^3 = 9, 6.$$

$$\mu^3 s f_e^3 = 3, 2.$$

$$\mu^3 b v f_e^3 = 3.$$

$$\mu^3 p_e f_e^3 = 2.$$

$$\mu^3 b s f_e^3 = 2.$$

$$\mu^3 v^2 f_e^3 = 6.$$

$$\mu^3 p v f_e^3 = 6.$$

$$\mu^3 s v f_e^3 = 3.$$

$$\mu^3 s p f_e^3 = 2.$$

$$\mu^3 s_e f_e^3 = 1.$$

$$\mu^3 q_j f_e = 15, 30, 42, 42, 30.$$

$$\mu^3 q_j b^2 = 1, 4, 13, 34, 70.$$

$$\mu^3 q_j^2 = 8, 20, 42, 68, 56.$$

$$\mu^2 u = 876, 1908, 4820, 8880, 12864, 14636, 13428, 10200, 6800.$$

$$\mu u = 7464, 17096, 33928, 57200, 78280, 87164, 80776, 64668, 46440, 30960.$$

$$u = 42240, 86560, 152656, 227808, 281280, 289120, 252760, 194616, 136848, 92400, 61600.$$

$$\mu^3 u f_e = 81, 162, 234, 243, 189, 126.$$

$$\mu^2 u f_e = 1068, 1962, 2772, 3084, 2781, 2088, 1392.$$

$\mu f_1 = 7428, 12468, 16692, 18222, 16632, 13158, 9378, 6252.$

$uf_1 = 33084, 49020, 59388, 60012, 51750, 39384, 27450, 18468, 12312.$

§ 58.

Lagebeziehungen bei einer C_3^4 und bei einer Plancurve überhaupt.

In § 51. ist gezeigt, wie man aus den Stammzahlen der Ausartungen der C_3^3 und der Erzeugungsweise dieser Ausartungen die *Gradzahlen von Gleichungen* gewinnen kann, welche die Lage der Punkte, der Tangenten und der Ecken und Seiten des Singularitäten-dreiecks der C_3^3 von einander abhängig machen. Ebenso gewinnt man aus der in § 54. angegebenen Erzeugung und den ebenda mitgetheilten Stammzahlen der Ausartungen der C_3^4 die Gradzahlen gewisser Beziehungen für diese Curve. Von diesen Gradzahlen folgen hier einige.

1) *Die Erzeugungsweise und die Stammzahlen der Ausartung τ führen zu dem Satze:*

„Wenn man die 3 Schnittpunkte mit einer cubischen Plancurve vierten Ranges auf irgend einer Geraden ihrer Ebene bestimmt, und ausserdem die 3 Schnittpunkte mit den 3 Wendetangenten, so erhält man auf dieser Geraden 6 Punkte, welche, um überhaupt so einer C_3^4 angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass die *Gesamtheit der 6 Punkte endlichdeutig bestimmt ist, sobald fünf von ihnen gegeben sind*, und zwar

- a) 9-deutig, sobald drei Curvenschnittpunkte und zwei Wendetangentenschnittpunkte,
- b) auch 9-deutig, sobald zwei Curvenschnittpunkte und drei Wendetangentenschnittpunkte gegeben sind.“

2) *Die Erzeugungsweise und die Stammzahlen der Ausartung δ führen zu dem Satze:*

„Wenn man auf einer Tangente einer C_3^4 den Berührungspunkt, den dritten Curvenschnittpunkt und die 3 Schnittpunkte mit den 3 Wendetangenten bestimmt, so erhält man auf dieser Geraden 5 Punkte, welche, um überhaupt so einer C_3^4 angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass ihre *Gesamtheit durch 4 von ihnen endlichdeutig bestimmt ist*, und zwar

- a) dreideutig, wenn der Berührungspunkt, der dritte Curvenschnittpunkt und zwei Wendetangentenschnittpunkte gegeben sind.
- b) eindeutig, wenn der Berührungspunkt und die drei Wendetangentenschnittpunkte gegeben sind,
- c) vierdeutig, wenn der dritte Curvenschnittpunkt und die drei Wendetangentenschnittpunkte gegeben sind.“

3) *Die Erzeugungsweise und die Stammzahlen der Ausartung ε führen zu folgendem Satze:*

„Wenn man an eine C_3^4 von irgend einem Punkte ihrer Ebene die 4 Tangenten, den Strahl nach dem Doppelpunkt und die Strahlen nach den 3 Wendepunkten zieht, so erhält man 8 Strahlen, welche, um überhaupt so einer C_3^4 angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass ihre Gesamtheit durch fünf von ihnen endlichdeutig bestimmt ist, und zwar

- a) 12-deutig, wenn die 4 Tangenten und der Strahl nach dem Doppelpunkte gegeben sind,
- b) 12-deutig, wenn die 4 Tangenten und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind.
- c) 18-deutig, wenn 3 Tangenten, der Doppelpunktsstrahl und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind.“

4) *Die Erzeugungsweise und die Stammzahlen der Ausartung ϑ führen zu folgendem Satze:*

„Wenn man von irgend einem Punkte S einer C_3^4 die in ihm berührende Tangente, die beiden sonstigen Tangenten, den Strahl nach dem Doppelpunkte und die Strahlen nach den 3 Wendepunkten zieht, so erhält man 7 Strahlen durch S , welche, um überhaupt so einer C_3^4 angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass ihre Gesamtheit durch vier von ihnen endlichdeutig bestimmt ist, und zwar:

- a) eindeutig, wenn die Tangenten und der Strahl nach dem Doppelpunkte gegeben sind,
- b) zweideutig, wenn die Tangenten und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind,
- c) zweideutig, wenn die in S berührende Tangente, eine der beiden sonstigen Tangenten, der Doppelpunktsstrahl und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind,
- d) eindeutig, wenn die beiden nicht in S berührenden Tangenten, der Doppelpunktsstrahl und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind.

Die tiefe Ausbildung, welche die Theorie der cubischen Plancurven in den letzten Jahren erfahren hat, macht es wohl möglich, die Gleichungen wirklich aufzustellen, deren Gradzahlen in den obigen Sätzen für die C_3^4 und in den analogen Sätzen für die C_3^3 (§ 51.) angegeben sind. Steigt man jedoch zu Plancurven mit noch höheren Constantenzahlen auf, so wird das Problem der Aufstellung der analogen Gleichungen immer schwieriger. Ihre Gradzahlen können wir jedoch noch immer nach unserer Methode auffinden, indem wir durch homographische Abbildung gewisse Ausartungen der zu untersuchenden Curve feststellen

und dann für dieselbe hinreichend viel Anzahlen ableiten, um so durch Rückschlüsse die Stammzahlen der Ausartungen zu erkennen.

So hat der Verfasser noch einige Gradzahlen für die cubische Plancurve sechsten Ranges C_3^6 bestimmt. Man bilde nämlich die allgemeine C_3^6 gerade so ab, wie in § 41. die C_3^3 und in § 54. die C_3^4 . Dann findet man die folgenden beiden Ausartungen, wenn man $\lambda = 0$ setzt, die Axe beliebig legt und erstens den Scheitel S beliebig, zweitens aber auf die Curve legt. Die erste Ausartung besteht aus einer dreifachen Ordnungsgeraden, auf welcher 6 einfache Rangpunkte und die 9 Wendepunkte liegen. Die zweite Ausartung besteht aus einer doppelten und einer einfachen Ordnungsgeraden, welche sich in einem doppelten Rangpunkte schneiden; die doppelte Ordnungsgerade enthält 4 einfache Rangpunkte und die 9 Wendepunkte. Indem man nun in ähnlicher Weise wie bei der C_3^3 und C_3^4 auch bei der C_3^6 gewisse Anzahlen auf mehreren *verschiedenen* Wegen berechnet, kommt man zu den Werthen gewisser Stammzahlen dieser beiden Ausartungen, und diese führen dann zu den beiden folgenden Sätzen:

„Wenn man an eine cubische Plancurve sechsten Ranges C_3^6 von irgend einem Punkte ihrer Ebene aus die 6 Tangenten und die Strahlen nach den 9 Wendepunkten zieht, so erhält man 15 Strahlen, welche, um überhaupt so einer C_3^6 angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass ihre Gesamtheit durch 6 von ihnen *endlichdeutig bestimmt ist*, und zwar

- a) *eindeutig*, wenn die 6 Tangenten,
- b) *120-deutig*, wenn 5 Tangenten und 1 Wendepunktsstrahl gegeben ist.“

„Thut man dasselbe für einen auf der Curve gelegenen Punkt, so fallen zwei Tangenten in einen Strahl g zusammen. Die 4 sonstigen Tangenten a , die Tangente g und die 9 Wendepunktsstrahlen bilden dann 14 Strahlen, welche so von einander abhängen, dass ihre Gesamtheit durch 5 von ihnen *endlichdeutig bestimmt ist*, und zwar:

- a) *eindeutig*, wenn die Tangente g und die 4 Tangenten a gegeben sind,
- b) *eindeutig*, wenn die 4 Tangenten a und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind,
- c) *vierdeutig*, wenn die Tangente g , 3 von den 4 Tangenten a und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind.“

In derselben Weise, wie die Ausartung ε bei der C_3^3 und bei der C_3^4 erhalten wurde, bekommt man bei einer Curve C_n n^{ter} Ordnung, n^{ten} Ranges mit δ Doppelpunkten, α Spitzen, $2\delta'$ Doppeltangentenberührungspunkten und α' Wendepunkten eine Ausartung, welche aus einer n -fachen Ordnungsgeraden besteht, auf der m einfache Rang-

punkte, δ Doppelpunkte, α Spitzen, $2\delta'$ Doppeltangentenberührungspunkte und α' Wendepunkte liegen. Die Constantenzahl dieser Ausartung muss aber um 1 kleiner als die der C_n , also gleich

$$\frac{1}{2}n(n+3) - \delta - 2\alpha - 1$$

sein. Folglich können auf der Ordnungsgeraden nur

$$\frac{1}{2}n(n+3) - \delta - 2\alpha - 3$$

von den $m + \delta + \alpha + 2\delta' + \alpha'$ ausgezeichneten Punkten *willkürlich* gewählt werden, damit die Ausartung überhaupt eine C_n werde. Daraus ergibt sich, dass die Lage jener ausgezeichneten Punkte durch

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-3) + 2\delta' + \alpha'$$

Gleichungen bedingt wird. Hieraus ergibt sich für die allgemeine Curve C_n der Satz:

„Wenn man an eine beliebige Curve n^{ter} Ordnung von einem Punkte ihrer Ebene aus die sämtlichen Tangenten, die Strahlen nach den Doppelpunkten, nach den Spitzen, nach den $2\delta'$ Doppeltangentenberührungspunkten und nach den α' Wendepunkten zieht, so sind diese Strahlen durch

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-3) + 2\delta' + \alpha'$$

Gleichungen in ihrer Lage von einander abhängig. Bemerkenswerth ist, dass die Zahl der Gleichungen für die gegenseitige Lage der Tangenten, der Doppelpunktsstrahlen und der Strahlen nach den Spitzen allein abhängt von der Ordnungszahl n , nämlich gleich

$$\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)$$

ist. Für $n=4$ ergibt sich die Anzahl solcher Gleichungen gleich 1.“

Die Grade dieser Gleichungen sind bis jetzt nur in wenigen Fällen bestimmt. Für $n=4$, $\delta=0$, $\alpha=0$ hat Herr Zeuthen (Afm. Eg. § 70.) bestimmt, dass der Grad der Gleichung, welche bei 12 von einem Punkte an die C_4 gehenden Tangenten, die Lage der zwölften aus der Lage der 11 übrigen bestimmt, gleich 451440 ist. Die algebraische Herleitung dieser Anzahl wird durch die gegenwärtige Preisaufgabe der Kgl. Dänischen Akademie verlangt.

Hamburg, im November 1877.