ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Nº 2863.

Die Störungen werden als Functionen zweier Anomalien dargestellt.

(Ein Nachtrag zu dem gleichlautend überschriebenen Aufsatz in Astr. Nachr. Nr. 2611.)

Von Aug. Weiler.

I. Die Störungsglieder sind bekanntlich als Functionen zweier Anomalien gegeben, von welchen die eine auf die Bewegung der Masse m , die andere auf die Bewegung der Masse m_1 bezogen ist. Um die Störungsgleichungen zu integrieren, ist es bei den Astronomen üblich, die beiden Anomalien vorerst durch eine einzige unabhängige Veränderliche zu ersetzen. Diese Transformation erfordert in allen Fällen weitläufige Entwicklungen in der Form von unendlichen Reihen. Ich habe daher den Vorschlag gemacht, die Integrale der Störungsgleichungen als Functionen zweier Anomalien darzustellen.

Bekanntlich lässt sich die Störungsfunktion in eine unendliche Reihe entwickeln, deren Glieder nach positiven Potenzen der drei Veränderlichen r , $\frac{1}{r_1}$ und s geordnet fortschreiten. r ist der Leitstrahl der Masse m , zu welcher die innere Bahn, r_1 der Leitstrahl der Masse m_1 , zu welcher die äussere Bahn gehört, und s bezeichnet den Cosinus des Winkels, welchen die beiden Leitstrahlen mit einander bilden. In Nr. 2611 habe ich

$$r = a(1 - e \cos \varepsilon), \quad \frac{r_1}{r} = 1 + e_1 \cos v_1$$

gesetzt, habe also die excentrische Anomalie der Masse m und die wahre Anomalie der Masse m_1 in die Störungsgleichungen eingeführt. Ich habe ferner

$$-s = \cos^2 \frac{1}{2} \mathcal{F} \cos(u - u_1) + \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F} \cos(u + u_1)$$

gesetzt, wo $\mathcal{F}$ der Winkel ist, welchen die Ebenen der Bahnen mit einander bilden. Es ist gestattet, von der Voraussetzung auszugehen, dass die Durchschnittslinie dieser Ebenen in einer unveränderlichen durch den Nullpunkt der Coordinaten gelegten Ebene fortschreitet. Diese Voraussetzung ist immer dann erfüllt, wenn der Nullpunkt der Coordinaten mit irgend einem Punkte einer bestimmten in der Ebene der drei Körper liegenden Curve zusammenfällt. Wird die unveränderliche Ebene als Coordinatenebene angenommen, so haben die beiden Bahnen eine gemeinsame Knotenlinie. In diesem Falle sind u und u_1 die Winkel, welche die Leitstrahlen r und r_1 mit der gemeinsamen Knotenlinie bilden.

In die zur Bestimmung von s gegebene Gleichung setze man:

$$u = \varpi + v \\ u_1 = \varpi_1 + v_1,$$

indem man mit ϖ und ϖ_1 die Winkel bezeichnet, welche die Perihelien der beiden von den Massen m und m_1 beschriebenen Ellipsen mit der Knotenlinie bilden. Sollen die Störungsglieder der ersten Ordnung als Functionen der beiden Anomalien ε und v_1 dargestellt werden, so lasse man alle periodischen und säcularen Störungen, welche in den Werthen von ϖ und ϖ_1 enthalten sind, vorläufig ausser Acht, und setze:

$$\varpi = \varpi_0 + \beta v_1 \quad \varpi_1 = \varpi_{01} + \beta_1 v_1$$

worin ϖ_0 , ϖ_{01} , β , β_1 beständige Grössen sind. Schliesslich ist noch in dem obigen Werthe von u die Veränderliche v durch die excentrische Anomalie ε auszudrücken.

Auf Grund dieser Verwandlungen sind alle Störungsglieder als die Sinus oder als die Cosinus der Vielfachen von ε und v_1 gegeben; und es sollen nun auch die Störungen als Functionen von ε und v_1 dargestellt werden. Ich habe das erreicht durch die Vermittelung einer unendlichen Reihe partieller Integrationen. Diese Darstellungsweise der Störungen erweist sich deshalb als bedeutungsvoll, weil man die Störungsglieder leicht so einrichten kann, dass sich alle diejenigen säcularen Störungen, welche die periodischen Störungen numerisch überwiegen, unmittelbar durch die erste partielle Integration ergeben. Diese säcularen Störungen sind mit der störenden Masse nicht multiplicirt, während alle periodischen Störungen diesen Factor haben. Die ersteren erreichen daher einen hohen numerischen Werth; wohingegen der numerische Werth der periodischen Störungen sich in engen Grenzen bewegt. In der von mir vorgeschlagenen Integrationsmethode kommt also die unendliche Reihe der partiellen Integrationen nicht bei der Ermittlung dieser säcularen Störungen, sondern nur bei der Ermittlung der periodischen Störungen in Anwendung. Es ist einleuchtend, dass die Zahl der partiellen Integrationen aus diesem Grunde nur eine geringe ist.

Ich habe dem Störungsgliede eine der folgenden Formen gegeben:

$$C v \frac{r_1^2}{r^2} \cos(A + B v_1 + c \varepsilon - c_1 v_1) \varepsilon' \\ C v \frac{r_1^2}{r^2} \sin(A + B v_1 + c \varepsilon - c_1 v_1) \varepsilon'.$$

In demselben sind A , B , C beständige Grössen, von welchen B und C die störende Masse als Factor enthalten, dagegen sind c und c_1 positive oder negative ganze Zahlen. Ferner

ist zur Abkürzung $v = \frac{\lambda}{(1-e^2)^{3/2}}$ gesetzt. Ich habe in Nr. 2611 gezeigt, dass diese Störungsglieder nur in dem Falle zu säcularen Störungen führen, welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind, wenn gleichzeitig $c = 0$ und $c_1 = 0$ gegeben ist. Auf Grund der identischen Gleichung:

$$\frac{p_1^2}{r_1^2} v \varepsilon' = v_1' + \frac{p_1^2}{r_1^2} v \varepsilon' e \cos \varepsilon$$

ergeben sich in diesem Falle die säcularen Störungen:

$$\frac{C}{B} \sin(A + B v_1), \quad - \frac{C}{B} \cos(A + B v_1).$$

Entwickelt man in irgend einem anderen Falle, wo nicht gleichzeitig $c = 0$ und $c_1 = 0$ gegeben ist, das Integral des Störungsgliedes, vermittelt einer unendlichen Reihe partieller Integrationen, als eine Function der beiden Anomalien ε und v_1 , so enthält diese Entwicklung allerdings auch wieder säculare Störungen; aber es zeigt sich, dass die hier entstehenden säcularen Störungen, ebenso wie die periodischen Störungen, durchgehends mit der störenden Masse multiplicirt sind. Es ergeben sich also diejenigen säcularen Störungen, welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind, unmittelbar durch die erste partielle Integration aus der oben vorgeschriebenen Form der Störungsglieder. Man braucht nur diejenigen Störungsglieder auszuwählen, in welchen gleichzeitig $c = 0$ und $c_1 = 0$ ist. Man kann dann die erwähnten säcularen Störungen ohne Weiteres anschreiben. Dies ist in Nr. 2611 unter 4. gezeigt worden.

Es hat mir anfänglich geschienen, dass die einfache Regel, nach welcher man alle diejenigen säcularen Störungen bilden kann, welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind, nur dann bestehe, wenn die Störungen als Functionen der beiden Anomalien ε und v_1 dargestellt

$$(1 - e^2)^{3/2} \frac{r^2}{p^2} = 1 - 2e \cos v + 2(2e - x)x \cos 2v - 2(3e - 2x)x^2 \cos 3v + 2(4e - 3x)x^3 \cos 4v - \dots$$

worin gesetzt ist:

$$x = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}.$$

Indem ich mich der weiteren Abkürzung bediene:

$$R = -2e \cos v + 2(2e - x)x \cos 2v - 2(3e - 2x)x^2 \cos 3v + 2(4e - 3x)x^3 \cos 4v - \dots$$

schreibe ich die erwähnte Entwicklung in der Form:

$$(1 - e^2)^{3/2} \frac{r^2}{p^2} = 1 + R.$$

In die zu integrierende Gleichung

$$Z' = C v y^2 \sin(\eta - c_1 v_1) v'$$

setze ich nun $v' = (1 + R)v' - Rv'$ ein. Aus dieser identischen Gleichung folgt:

$$v y^2 v' = \lambda y^2 \frac{r^2}{p^2} v' - v y^2 R v'.$$

Da aber $v' = \frac{p^2}{r^2}$ und $v_1' = \lambda y^2$ ist, so hat man auch die identische Gleichung:

werden. Werden die Integrale der Störungsgleichungen als Functionen der wahren Anomalien v und v_1 dargestellt, so findet man zum Behuf der Herleitung der erwähnten säcularen Störungen eine ebenso einfache Regel, wie unter der andern Voraussetzung. Meine Absicht ist, dies hier nachzuweisen.

2. Ich gebe diesmal den Störungsgliedern eine der Formen:

$$C v \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos(A + B v_1 + c v - c_1 v_1) v'$$

$$C v \frac{p_1^2}{r_1^2} \sin(A + B v_1 + c v - c_1 v_1) v'$$

in welchen die Buchstaben $A B C c c_1$ dieselbe Bedeutung haben wie oben, ferner $v = \frac{\lambda}{(1 - e^2)^{3/2}}$ gesetzt ist. Zum Behuf der weiteren Abkürzung setze ich noch $\frac{p_1^2}{r_1^2} = y$, $A + B v_1 = \eta$; und schreibe, um die zweite Form zu integrieren, die folgende Gleichung:

$$Z' = C v y^2 \sin(\eta + c v - c_1 v_1) v'.$$

Es wird darauf hingewiesen, dass es für den Fall $c = 0$ ein Integrationsverfahren giebt, welches zu einem einfacheren Resultat führt, als das allgemein, für irgend einen ganzzahligen Werth c , auch für den Fall $c = 0$ gültige Verfahren. Es ist offenbar, dass sich für den Fall $c = 0$ der numerisch überwiegende Theil des zu bestimmenden Integrals als eine Function von v_1 allein darstellt. Dieser Theil soll das partielle Integral sein. Um das letztere herzuleiten, bin ich genöthigt, von der Entwicklung der Grösse $\frac{r^2}{p^2}$ nach den Cosinus der Vielfachen von v Gebrauch zu machen. Es ist bekanntlich:

$$v y^2 v' = v_1' - v y^2 R v'.$$

Die zu integrierende Gleichung geht nun über in:

$$Z' = C \sin(\eta - c_1 v_1) v_1' - C v y^2 \sin(\eta - c_1 v_1) R v'.$$

Der erste Theil rechts führt zu einer Function von v_1 allein; der zweite Theil besteht aus Gliedern von der Form:

$$C v y^2 \sin(\eta + c v - c_1 v_1) v'$$

in welchen jedesmal $c > 0$ ist. Das Integral des ersten Theils ist als ein partielles Integral des ursprünglichen Störungsgliedes aufzufassen. Das Integral des zweiten Theils ist die Correction dieses partiellen Integrals. Es ist

erwähnenswerth, dass alle Glieder der Correction den Coefficienten Cv haben, wohingegen der Coefficient des partiellen Integrals C ist.

Der Fall $c = 0$ verlangt schon deshalb eine besondere Betrachtung, weil derselbe zu den säcularen und auch zu den der Zeit proportionalen Störungen führt. Wenn neben $c = 0$ zugleich $c_1 = 0$ ist, so hat man die Gleichung:

$$Z' = C \sin \eta v_1' - C v y^2 \sin \eta R v'.$$

Es ist aber $\eta = A + B v_1$, und es entsteht durch die Integration des ersten Theils rechts die säculare Störung:

$$- \frac{C}{B} \cos \eta.$$

Die säculare Störung ist mit der störenden Masse nicht multiplicirt, weil die störende Masse, welche in den beiden Coefficienten C und B enthalten ist, aus dem Quotienten $\frac{C}{B}$ wegfällt. Die periodischen Störungen enthalten die störende Masse immer als Factor. Daraus erklärt es sich, dass die säculare Störung in ihrem numerischen Werthe die periodischen Störungen überwiegt.

3. Ich nehme jetzt an, in der zu integrierenden Gleichung

$$Z' = C v y^2 \sin(\eta + c v - c_1 v_1) v'$$

sei $c > 0$ oder $c < 0$. Das Integral soll als eine Function der beiden Anomalien v und v_1 dargestellt werden, was vermittelt einer unendlichen Reihe partieller Integrationen erreicht wird. An die Stelle von v_1 führe ich eine neue Veränderliche in das Störungsglied ein, indem ich

$$x = v_1 - (1 + \frac{1}{2} e_1^2) v v$$

setze. Die hier getroffene Wahl des Coefficienten von v wird sich unten rechtfertigen. Ich denke mir v_1 vermittelt x eliminirt, und integriere die vorliegende Differentialgleichung partiell nach v , indem ich die Grössen y und x als beständig betrachte. Es ergibt sich das partielle Integral:

$$\xi = -C_1 y^2 \cos(\eta + c v - c_1 v_1)$$

in welchem der Coefficient C_1 gegeben ist durch die Gleichung:

$$x' = (1 + \frac{1}{2} e_1^2) R v v' + (2 e_1 \cos v_1 + \frac{1}{2} e_1^2 \cos 2 v_1) (1 + R) v v'.$$

In diesem Werthe von x' haben alle Glieder den Factor v' ; aber es ist kein Glied vorhanden, in welchem die Derivirte v' einen beständigen Coefficienten hat. Aus dieser Einrichtung der Derivirten x' folgt, wie sich sogleich zeigen

$$C_1 = \frac{C v}{c + (B - c_1) (1 + \frac{1}{2} e_1^2) v}.$$

Um das vollständige Integral des Störungsgliedes aufzustellen, füge ich dem partiellen Integral eine Correction bei. Schreibt man das vollständige Integral in der Form $Z = \xi + \xi_1$, so entsteht durch die Differentiation:

$$Z' = \frac{d\xi}{dv} v' + \frac{d\xi}{dx} x' + \frac{d\xi}{dy} y' + \xi_1'.$$

Der partiellen Integration zufolge ist aber auch $Z' = \frac{d\xi}{dv} v'$.

Zur Bestimmung der Correction ξ_1 hat man daher die Differentialgleichung:

$$-\xi_1' = \frac{d\xi}{dx} x' + \frac{d\xi}{dy} y',$$

in welche die partiellen Derivirten von ξ , und auch die Derivirten x' und y' eingesetzt werden müssen.

Die Derivirte x' kann leicht so eingerichtet werden, dass alle Glieder dieser Derivirten den Factor v' haben. In der Gleichung

$$x = v_1 - (1 + \frac{1}{2} e_1^2) v v$$

aber ist der Coefficient von v so gewählt, dass die Derivirte x' kein Glied enthält, in welchem der Coefficient von v' eine Beständige ist. Man erhält zunächst:

$$x' = v_1' - (1 + \frac{1}{2} e_1^2) v v'.$$

Dem ersten Gliede rechts muss nun der Factor

$$1 = \frac{r^2}{\rho^2} v' = \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} (1 + R) v'$$

beigefügt werden. Setzt man nun noch $v_1' = \lambda \frac{\rho_1^2}{r_1^2}$ ein, so geht die vorliegende Derivirte über in:

$$x' = \frac{\rho_1^2}{r_1^2} (1 + R) v v' - (1 + \frac{1}{2} e_1^2) v v'.$$

Setzt man ferner

$$\frac{\rho_1^2}{r_1^2} = 1 + \frac{1}{2} e_1^2 + 2 e_1 \cos v_1 + \frac{1}{2} e_1^2 \cos 2 v_1$$

so ergibt sich die Derivirte:

$$x' = (1 + \frac{1}{2} e_1^2) R v v' + (2 e_1 \cos v_1 + \frac{1}{2} e_1^2 \cos 2 v_1) (1 + R) v v'.$$

wird, dass die Derivirte der Correction ξ_1 kein Glied enthält, welches gleichartig ist mit dem ursprünglichen Störungsgliede Z' .

Ich schreibe ferner die Derivirte:

$$-y' = \lambda y^2 e_1 \sin v_1 = \lambda y^2 e_1 \sin v_1 \frac{r^2}{\rho^2} v' = v y^2 e_1 \sin v_1 (1 + R) v'$$

und die partiellen Derivirten:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} &= C_1 y^2 (B - c_1) \sin(\eta + c v - c_1 v_1) \\ -\frac{d\xi}{dy} &= C_1 (2 + 2 e_1 \cos v_1) \cos(\eta + c v - c_1 v_1). \end{aligned}$$

Ich erhalte alsdann die Derivirte der Correction ζ_1 in der Form:

$$\begin{aligned} -\zeta_1' &= C_1 \nu y^2 (B - c_1) (1 + \frac{1}{2} e_1^2) \sin(\eta + c\nu - c_1 \nu_1) R \nu' \\ &\quad + C_1 \nu y^2 [(B - c_1) (2e_1 \cos \nu_1 + \frac{1}{2} e_1^2 \cos 2\nu_1) \sin(\eta + c\nu - c_1 \nu_1) \\ &\quad + (2e_1 \sin \nu_1 + e_1^2 \sin 2\nu_1) \cos(\eta + c\nu - c_1 \nu_1)] (1 + R) \nu'. \end{aligned}$$

Macht man die goniometrischen Functionen von ν_1 linear, so geht dies über in:

$$\begin{aligned} -\zeta_1' &= C_1 \nu y^2 (B - c_1) (1 + \frac{1}{2} e_1^2) \sin(\eta + c\nu - c_1 \nu_1) R \nu' \\ &\quad + C_1 \nu y^2 [(B - c_1 + 1) e_1 \sin(\eta + c\nu - c_1 \nu_1 + \nu_1) + (B - c_1 + 2) \frac{1}{4} e_1^2 \sin(\eta + c\nu - c_1 \nu_1 + 2\nu_1) \\ &\quad + (B - c_1 - 1) e_1 \sin(\eta + c\nu - c_1 \nu_1 - \nu_1) + (B - c_1 - 2) \frac{1}{4} e_1^2 \sin(\eta + c\nu - c_1 \nu_1 - 2\nu_1)] (1 + R) \nu'. \end{aligned}$$

Macht man auch die goniometrischen Functionen von ν linear, so erhalten alle Glieder der Derivirten ζ_1' die Form:

$$C_2 \nu y^2 \sin(\eta + k\nu - k_1 \nu_1) \nu'$$

welche, abgesehen von den beständigen Coefficienten, mit dem ursprünglichen Störungsgliede:

$$C \nu y^2 \sin(\eta + c\nu - c_1 \nu_1) \nu'$$

übereinstimmt und daher ebenso integrirt werden kann, wie dieses. Fände sich in der Derivirten ζ_1' ein Glied, in welchem $k = c$ und zugleich $k_1 = c_1$ ist, so wäre dasselbe mit dem ursprünglichen Störungsgliede gleichartig. Aus dem vorliegenden Werthe von ζ_1' ist ersichtlich, dass dieser Fall nicht eintritt. Es ist das bewirkt durch die Wahl der Veränderlichen x , welche an die Stelle von ν_1 gesetzt worden ist.

Es ist auch ersichtlich, dass der Coefficient C_2 neben dem Coefficienten C noch den Factor ν hat, und auch mit zwei Potenzen von e und e_1 multiplicirt ist, deren Exponenten positive ganze Zahlen sind. Diese Exponenten können nicht gleichzeitig gleich Null sein, und es hat also der Coefficient C_2 jedenfalls einen der Factoren $C\nu e$ und $C\nu e_1$. Aus dieser Beschaffenheit des Coefficienten C_2 lässt sich die Convergenz jener unendlichen Reihe beurtheilen, deren Glieder durch die auf einander folgenden partiellen Integrationen ausgedrückt sind.

Aus der vorliegenden Form der Derivirten ζ_1' ist ferner ersichtlich, dass dasjenige Glied dieser Derivirten, in welchem der ganzzahlige Coefficient von ν_1 verschwindet, in welchem also $k_1 = 0$ ist, jedesmal den Factor B hat. Es finden sich in der Derivirten ζ_1' im Ganzen fünf ganzzahlige Coefficienten von ν_1 , nämlich c_1 , $c_1 \pm 1$, $c_1 \pm 2$. Wenn von diesen Coefficienten einer verschwindet, so hat das betreffende Glied jedesmal den Factor B . Es ist schon erwähnt, dass der Coefficient C_2 mit der störenden Masse multiplicirt ist, dass auch der Coefficient B die störende Masse als Factor enthält. Es folgt daraus, dass alle diejenigen Glieder der Derivirten ζ_1' , in welchen $k_1 = 0$ ist, das Quadrat der störenden Masse als Factor enthalten.

Noch eine andere Eigenschaft der Derivirten ζ_1' ist zu erwähnen. Dieselbe betrifft den Fall $B = 0$. Ich habe gezeigt, dass alle diejenigen Glieder der Derivirten ζ_1' , in welchen $k_1 = 0$ ist, den Factor B haben. Für den Fall $B = 0$ verschwinden diese Glieder der Derivirten ζ_1' .

Wenn also in dem zu integrierenden Störungsgliede das Argument des Sinus die Form $c\nu - c_1 \nu_1$ hat, so ist in der Derivirten der Correction ζ_1 , welche dem ersten partiellen Integral des Störungsgliedes beizufügen ist, niemals ein Glied vorhanden, in welchem $k_1 = 0$ ist, welches also unabhängig von ν_1 als eine Function von ν allein vorliegt.

Die Derivirte ζ_1' kann auch ein säculares Glied enthalten. Wenn nämlich neben $k_1 = 0$ zugleich $k = 0$ ist, so hat man ein säculares Glied. Die Grösse R ist nach den Cosinus der Vielfachen von ν entwickelt, und enthält daher jedenfalls ein mit $\cos c\nu$ multiplicirtes Glied. Dieses Glied von R bewirkt, dass in der Derivirten ζ_1' ein Glied entsteht, in welchem $k = 0$ ist. Dem Obigen zufolge ist das in der Derivirten ζ_1' enthaltene säculare Glied mit dem Quadrat der störenden Masse multiplicirt, weil in demselben $k_1 = 0$ ist. Das Integral dieses Gliedes erhält den Nenner B , welcher mit der ersten Potenz der störenden Masse multiplicirt ist. Hieraus folgt, dass alle säcularen Störungen, welche in der Correction ζ_1 enthalten sind, ebenso wie die periodischen Störungen mit der ersten Potenz der störenden Masse multiplicirt sind; und es ist nun auch der Beweis geführt, dass alle diejenigen säcularen Störungen, welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind, unmittelbar aus der ersten partiellen Integration der Gleichung:

$$Z' = C \nu y^2 \sin(\eta + c\nu - c_1 \nu_1) \nu'$$

hervorgehen.

4. Um die andere Form des Störungsgliedes zu integrieren, schreibe ich die Gleichung:

$$Z' = C \nu y^2 \cos(\eta + c\nu - c_1 \nu_1) \nu'$$

und gelange zu dem partiellen Integrale:

$$\zeta = C_1 y^2 \sin(\eta + c\nu - c_1 \nu_1).$$

in welchem zur Abkürzung gesetzt ist:

$$C_1 = \frac{C \nu}{c + (B - c_1) (1 + \frac{1}{2} e_1^2) \nu}.$$

Schreibt man das vollständige Integral in der Form

$$Z = \zeta + \zeta_1$$

so erhält man zur Bestimmung der Correction ζ_1 die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
-\zeta_1' = & C_1 v y^2 (B - c_1) (1 + \frac{1}{2} e_1^2) \cos(\eta + cv - c_1 v_1) R v' \\
& + C_1 v y^2 [(B - c_1 + 1) e_1 \cos(\eta + cv - c_1 v_1 + v_1) + (B - c_1 + 2) \frac{1}{4} e_1^2 \cos(\eta + cv - c_1 v_1 + 2v_1) \\
& + (B - c_1 - 1) e_1 \cos(\eta + cv - c_1 v_1 - v_1) + (B - c_1 - 2) \frac{1}{4} e_1^2 \cos(\eta + cv - c_1 v_1 - 2v_1)] (1 + R) v'.
\end{aligned}$$

Darin ist wieder: $R = -2e \cos v + 2(2e - x) x \cos 2v - 2(3e - 2x) x^2 \cos 3v + 2(4e - 3x) x^3 \cos 4v - \dots$

wenn zur Abkürzung gesetzt ist:

$$x = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}.$$

Es versteht sich, dass die unter 3. nachgewiesenen Eigenschaften der Correction ζ_1 für die eine wie für die andere Form des Störungsgliedes gelten. Es ist gezeigt worden, dass diejenigen säcularen Störungen, welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind, durch die erste partielle Integration erhalten werden. Zu dem gleichen Ergebniss gelangt man bezüglich der der Zeit proportionalen Störungen. Auch diese Störungen ergeben sich unmittelbar durch die erste partielle Integration des Störungsgliedes. Das unter 3. integrierte Störungsglied:

$$Z' = C v y^2 \sin(\eta + cv - c_1 v_1) v'$$

führt zwar nicht zu solchen Störungen. Man kann nur in dem Falle zu einer der Zeit proportionalen Störung gelangen, wenn neben $c = 0$ und $c_1 = 0$ zugleich $B = 0$ ist. Aus der Art, wie die Störungsglieder entstanden sind, folgt aber, dass in dem Werthe $\eta = A + B v_1$ gleichzeitig mit B auch die Beständige A verschwindet, dass also für diesen Fall die obige Gleichung übergeht in $Z' = 0$, oder dass Z eine unbestimmte Beständige ist. Wohl aber kann die Gleichung

$$Z' = C v y^2 \cos(\eta + cv - c_1 v_1) v'$$

zu einer der Zeit proportionalen Störung führen. Nach den unter 2. gegebenen Ausführungen ist für den Fall $c = 0$ die vorliegende Gleichung überzuführen in:

$$Z' = C \cos(\eta - c_1 v_1) v_1' - C v y^2 \cos(\eta - c_1 v_1) R v'.$$

Setzt man noch $c_1 = 0$ und $\eta = 0$ voraus, so geht der erste Theil rechts über in $C v_1'$, und es ergibt sich das partielle Integral $\zeta = C v_1$. Dies ist die einzige der Zeit proportionale Störung, zu welcher die vorliegende Differentialgleichung führt. Integriert man dieselbe in der allgemeinen Form, so verschwinden in der Correction des partiellen Integrals alle die der Zeit proportionalen Störungen, weil dieselben wegen $k_1 = 0$ den Factor $B = 0$ haben.

5. Wir haben angenommen, dass in dem Störungsgliede der Coefficient c eine positive oder negative Zahl sei. Auch für den Fall $c = 0$ ist das vorgeschriebene Integrationsverfahren gültig. Doch giebt dasselbe dem partiellen Integral in diesem Falle eine unzweckmässige Form, weil in dem Werthe von ζ_1' die Glieder der zweiten und der dritten Zeile die Derivirte einer Function von v_1

allein darstellen, nachdem man $(1 + R) v' = \frac{\lambda}{v}$ gesetzt hat. Vereinigt man diese Function mit dem partiellen

Integral ζ , welches gleichfalls eine Function von v_1 allein ist, so gelangt man zu jenem anderen partiellen Integral, welches insbesondere für den Fall $c = 0$ aufgestellt worden ist.

Werden die Störungen als Functionen der beiden Anomalien ε und v_1 dargestellt, so ist die Derivirte der Correction des partiellen Integrals in ihrer vollständigen Form durch eine begrenzte Anzahl Glieder ausgedrückt. Sollen aber die Störungen als Functionen der beiden Anomalien v und v_1 dargestellt werden, so ergibt sich die Derivirte der Correction des partiellen Integrals in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder nach steigenden Potenzen der Excentricität e geordnet sind. Der Vorzug, welchen man aus diesem Grunde dem ersten Verfahren einräumen dürfte, kommt nicht mehr in Betracht, wenn die Excentricität e hinreichend klein ist, so dass die höheren Potenzen von e vernachlässigt werden können. Dagegen hat das zweite Verfahren einen Vorzug, welcher nicht an bestimmte Rücksichten gebunden ist, sondern für alle Fälle geltend gemacht werden kann. Der Vorzug des zweiten Verfahrens gründet sich auf die Beschaffenheit der Glieder, zu welchen die Entwicklung der Störungsfuction führt. Es darf nämlich angenommen werden, die Störungsfuction liege nach den Cosinus der Vielfachen von u und u_1 entwickelt vor. Die Bedeutung der Winkel u und u_1 ist gegeben durch die Gleichungen:

$$u = \varpi_0 + \beta v_1 + v, \quad u_1 = \varpi_{01} + \beta_1 v_1 + v_1.$$

Werden die Störungen als Functionen von ε und v_1 dargestellt, so muss in dem Vielfachen von u die wahre Anomalie v durch die excentrische ε ersetzt werden. Dies kann aber nur durch eine nichts weniger als einfache Rechnung erzielt werden. Diese Umformung in der Entwicklung der Störungsfuction fällt weg, wenn die Störungen als Functionen von v und v_1 dargestellt werden.

Dem hier Mitgetheilten ist zu entnehmen, dass man in einem gegebenen Falle das Integral des Störungsgliedes als eine Function von v und v_1 darstellen soll, wenn die Excentricität der inneren Bahn hinreichend klein ist, so dass von den Potenzen von e nur etliche in Betracht kommen. Wenn aber die Excentricität e der Einheit nahe steht, dann möchte es wohl begründet sein, das Integral des Störungsgliedes als eine Function von ε und v_1 darzustellen.

Auch in der Publ. XII der AG. § 19 bis § 27 werden die Störungen als Functionen der wahren Anomalien v und v_1 dargestellt. Dass die Resultate dort verwickelt ausgefallen sind, und als wenig fruchtbar sich erweisen, hat seinen Grund nicht in der Wahl dieser beiden Anomalien. Denn das in dem vorliegenden Aufsatz mitgetheilte Verfahren giebt das Integral als eine Function von v , v_1 und $\frac{p_1}{r_1}$,

welche letztere Grösse als eine sehr einfache Function von v_1 vorliegt. In der Publ. XII der AG. ist das Integral des Störungsgliedes als eine Function von v , v_1 , $\frac{p_1}{r_1}$ und $\frac{p}{r}$ gegeben. Der Umstand, dass hier auch die unentwickelte Grösse $\frac{p}{r}$ in das Integral hereingezogen ist, scheint der eigentliche Grund zu sein, welcher die Verwicklungen dort

Karlsruhe 1888 im September.

herbeigeführt hat. Es möge diese Mittheilung daher als die Berichtigung von dem angesehen werden, was in den einleitenden Bemerkungen des in Nr. 2611 enthaltenen Aufsatzes über die Wahl der beiden Anomalien gesagt ist.

Ich erwähne schliesslich, dass der vorliegende Aufsatz schon 1886 geschrieben war; dass ich denselben aber zurückbehalten wollte, bis ich im Stande war, auch die Anwendung dieser Integrationsmethode auf die Theorie der Planetenstörungen zu geben.

August Weiler.

Sur les équations servant à déterminer les formes des queues cométaires.

La solution, donnée dans les Astr. Nachr. No. 2856, du problème: Trouver la dépendance mutuelle nécessaire entre la vitesse initiale g et l'angle λ , pour que l'enveloppe des courbes

$$(A) \quad g^2 \sin^2 \lambda \cdot \xi = g^2 \sin \lambda \cos \lambda \cdot \zeta + \frac{1+\mu}{2r^2} \zeta^2$$

soit une chaînette de la forme:

$$(B) \quad \xi = \frac{1}{2}(e^c + e^{-c}) - (c + \varepsilon)$$

n'est pas correcte. En effet, au lieu de prendre l'intégrale

$$(I) \quad \frac{1}{Rc} \cdot \frac{d\gamma}{d\delta} \left(\delta \frac{d\gamma}{d\delta} - \gamma \right) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\delta \frac{d\gamma}{d\delta} - \gamma}{Rc}} + e^{-\frac{\delta \frac{d\gamma}{d\delta} - \gamma}{Rc}} \right) - \left(1 + \frac{\varepsilon}{c} \right)$$

En différentiant, on trouve:

$$(II) \quad \frac{d^2\gamma}{d\delta^2} \left[2 \frac{d\gamma}{d\delta} - \frac{\gamma}{\delta} - \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\delta \frac{d\gamma}{d\delta} - \gamma}{Rc}} - e^{-\frac{\delta \frac{d\gamma}{d\delta} - \gamma}{Rc}} \right) \right] = 0$$

$\frac{d^2\gamma}{d\delta^2} = 0$, ou $\frac{d\gamma}{d\delta} = C$, combiné avec l'équation (I), donnera l'intégrale générale:

$$\frac{C}{Rc} (\delta C - \gamma) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\delta C - \gamma}{Rc}} + e^{-\frac{\delta C - \gamma}{Rc}} \right) - \left(1 + \frac{\varepsilon}{c} \right).$$

Cette équation, combinée avec sa dérivée par rapport à C , donnera l'intégrale singulière. On aura le même résultat en éliminant $\frac{d\gamma}{d\delta}$ entre (I) et la deuxième membre de l'équation (II), égalé à zéro. C'est donc de l'équation (B') qu'il faut déterminer $\frac{d\gamma}{d\delta}$, et, en (I), $\frac{d\gamma}{d\delta}$ doit être remplacée par l'expression ainsi obtenue. On obtiendra la solution suivante:

$$(III) \quad 1 \pm \sqrt{1 + \frac{g^2 \sin^2 \lambda}{Rc}} \left[\frac{g^2}{4Rc} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{c} \right) \right] = \frac{g^2 \sin^2 \lambda}{2Rc} \cdot \cos. \text{hyp.} \left\{ \pm \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{g^2 \sin^2 \lambda}{2Rc}} \left[\frac{g^2 \cos^2 \lambda}{4Rc} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{c} \right) \right] \pm \sqrt{1 + \frac{g^2 \sin^2 \lambda}{Rc}} \left[\frac{g^2}{4Rc} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{c} \right) \right] - \frac{g^2 \sin 2\lambda}{4Rc} \right\}$$

Pour $\lambda = 0^\circ$ ou 180° , on a pour le signe —:

$$g^2 = 4(R\varepsilon)^2$$

comme on doit avoir. La tangente de la courbe, qui est symétrique par rapport aux axes des coordonnées, est ici

parallèle à l'axe des ξ . Elle ne coupe pas généralement l'axe des ζ , et elle a des points, où le rayon de courbure est égal à zéro.

En cherchant l'enveloppe de (A), quand g et λ sont liés par (III), on trouve la chaînette (B).

Courbevoie près Paris 1888 Sept. 25.

Hans Jürg. Kiaer.