XXVII. Auflösung einiger Aufgaben der stereographischen Projection.

Von

E. von Fedorow in St. Petersburg.

(Mit 7 Textfiguren.)

Ich erlaube mir hier auf einige Aufgaben der stereographischen Projection und ihre Auflösungen aufmerksam zu machen, deren ich mich mehrfach bei meiner Untersuchung der optischen Verhältnisse der Plagioklase in bequemer Weise bediente.

Die erste Gruppe derselben steht in engem Verhältnisse zu der bekannten Aufgabe, die Kreisbögen von sehr grossem Durchmesser zu ziehen. Die Aufgaben dieser Art bildeten den Gegenstand einer speciellen Abhandlung von Websky*). Dieser Gelehrte hat aber eine sehr grosse Genauigkeit in Aussicht gehabt. Andererseits löst er die Aufgaben durch Rechnung und nicht durch Construction.

Bei meiner Untersuchung stand aber nicht die Genauigkeit, sondern die rasche und bequeme Ausführung im Vordergrund. Deshalb war es nicht unzweckmässig, sich der folgenden angenäherten Methode zu bedienen.

Dieser liegt folgendes, den Mathematikern sehr gut bekanntes Princip zu Grunde.

Ziehen wir eine Curve AB in Betracht (Fig. 4). Ein sehr kleiner Bogen

$A'B'$ derselben lässt sich als ein Kreisbogen auffassen; der Fehler, der dabei begangen wird, wird um so unbedeutender, je kleiner der Bogen $A'B'$ ist. Der Kreisbogen, welcher dieselbe Tangente CD mit der Curve und denselben Krümmungsradius in dem Berührungspunkte hat, ist der Curve in

*) Mittheilungen aus den Sitzungsber. d. k. pr. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1886, Hft. 4 (Ueber Construction flacher Zonenbögen). Ref. in dieser Zeitschr. 14, 77.

solchem Grade angenähert, dass er mit ihr die Berührung zweiter Ordnung hat *).

Mit Hülfe dieses Principis wird folgende Auflösung unmittelbar verständlich.

Fig. 2.

1. Aufgabe. Einen sehr flachen Kreisbogen durch die Enden A und B eines Diameters und durch den Punkt b_i zu ziehen **) (Fig. 2).

Wir ziehen zuerst einen beliebigen, aber möglichst flachen, durch die Punkte A und B hindurchgehenden Kreisbogen ADB , und dann eine Reihe zu AB senkrechter Geraden $a_0 b_0, a_1 b_1 \dots a_n b_n$. An einer von diesen Geraden $a_i b_i$ finden wir das Verhältniss $\frac{c_i a_i}{b_i a_i}$, und auf allen anderen

Geraden ergeben sich die Punkte $b_0, b_1 \dots b_n$, welche der Proportionalität $\frac{c_0 a_0}{b_0 a_0} = \frac{c_1 a_1}{b_1 a_1} = \dots = \frac{c_n a_n}{b_n a_n}$ genügen.

Der durch die Punkte $A, b_0, b_1 \dots b_i \dots b_n, B$ gehende, sehr flache Ellipsenbogen lässt sich mit genügender Strenge als ein Kreisbogen ansehen.

Fig. 3.

Die Construction lässt sich mit Hülfe des Proportionalzirkels sehr bequem und rasch vollziehen.

Ich will den so construirten Bogen einen genäherten Kreisbogen nennen.

Zweite Aufgabe. Auf einen genäherten Kreisbogen in einem gegebenen Punkte a die Normale zu ziehen (Fig. 3).

Infolge des Umstandes, dass der

*) Der bekannten Theorie der Berührung der Curven zufolge, welche wir Lagrange verdanken.

**) Herr G. Wulff, mein hochgeehrter College, hat mich mündlich mit seiner schönen Methode bekannt gemacht, welche hoffentlich bald von ihm publicirt wird.

genäherte Kreisbogen dem wirklichen Kreisbogen sehr nahe steht, ist folgende, allgemein bekannte Construction anzuwenden:

Auf dem Bogen nehmen wir die gleichen Theile $ac = ab$ und ziehen dann aus den Punkten b und c als Centren die sich in den Punkten A und B schneidenden Kreisbögen von einem und demselben Durchmesser. Die Gerade AB ist die gesuchte Normale.

Dritte Aufgabe. Den Winkel zwischen zwei genäherten Zonenkreisen zu finden (Fig. 4).

Es seien AB und CD zwei gegebene genäherte Kreisbögen, E ihr Durchschnittspunkt.

Ziehen wir durch den Punkt E zwei Normalen Ea und Eb (zu AB und zu CD), so ist der Winkel aEb der gesuchte.

Es mögen nun Aufgaben anderer Art folgen, und zwar solche, bei welchen die Transformation der Projectionsebene im Vordergrund steht.

Da gerade die Aufgaben dieser Art zu den häufigsten und gewöhnlichsten bei meinen Untersuchungen gehörten, so suchte ich die einfachste und rascheste Methode sie aufzulösen.

Zu diesem Zwecke habe ich auf durchsichtigem Papiere Projectionen von zweierlei Art drucken lassen, welche aus den Figg. 5 und 6 so gleich verständlich sind.

Der grösseren Genauigkeit willen gab ich diesen Projectionen Durchmesser von 20 cm.

Fig. 4.

Fig. 5.

Vierte Aufgabe. Die Projectionsebene ist derart zu transformiren, dass der Pol a die Lage O des Centrums annimmt. Gesucht die neue Lage des Poles b^*) (Fig. 5 auf vor. Seite).

In diesem Falle ist die Transformation so aufzufassen, als ob das System mit den Punkten a und b um den zur Gerade aO senkrechten Durchmesser CD als Axe gedreht wird.

Man legt dabei die auf dem durchsichtigen Papiere gedruckte Projection Fig. 5 auf die gegebene derart, dass die (gleichen) Projectionskreise zusammenfallen und zugleich der Diameter AB mit der Geraden aO .

Dann liest man auf der Projection unmittelbar ab, um wieviel Grade das System gedreht ist. Das Ablesen geschieht fast bis auf $\frac{1}{2}$ Grad genau, und dies genügt vollständig für die von mir ausgeführten optischen Untersuchungen der Feldspathe.

Weiss man jetzt diesen Winkel, so ist es leicht, auch die neue Lage b' des Punktes b ebenso wie die jedes anderen aufzufinden, indem man die Richtung des durch b hindurchgehenden Kleinkreises der Projection in Gedanken verfolgt und die gefundene Grösse des Winkels in dieser Richtung aufträgt.

Fünfte Aufgabe. Gegeben ein Pol a und ein durch denselben hindurchgehender Zonenkreis EF . Die Projection so zu transformiren, dass a die Lage des Centrums O annimmt, und der Zonenkreis EF die Lage GH (Fig. 5).

Ziehe man die Gerade aO und finde, wie in der vorigen Aufgabe, die Lage eines dem Bogen EaF angehörigen Punktes; da finden wir die Gerade $E'F'$.

Jetzt bleibt nur übrig die Projection um den Punkt O zu drehen, bis die Gerade $E'F'$ mit der Geraden GH zusammenfällt, also um den Winkel $F'OH$, was besonders leicht mit Hülfe der auf durchsichtigem Papiere gedruckten Projection Fig. 6 sich vollziehen lässt.

Fig. 6.

^{*)} Ueber eine einfache Auflösung dieser Aufgabe durch Construction hat Herr G. Wulff im vorigen Jahre in einer Sitzung der k. mineralog. Ges. zu St. Petersburg vorgetragen.

Nun ist es leicht, zu der Aufgabe dieser Art in der allgemeinsten Form überzugehen, und zwar:

Sechste Aufgabe. Die Transformation der stereographischen Projection muss derart ausgeführt werden, dass dem Pole a' die neue Lage a , und dem durch a' hindurchgehenden Zonenkreise $A'B'$ die Lage AB zukommt (dabei braucht man nicht die Richtung in dem Zonenkreise ausser Acht zu lassen; diese Richtungen sind durch Pfeile angegeben, Fig. 7).

Ziehen wir durch das Centrum O den zum Zonenkreise AB senkrechten Zonenkreis (Gerade) Ob , messen den Winkel ab und finden auf dem Bogen $A'B'$ den Punkt b' (in gehöriger Richtung) dadurch, dass die Grösse des Bogens $a'b'$ der des Bogens ab gleich ist; endlich ziehen wir durch den Punkt b' den zu $A'B'$ senkrechten Kreisbogen $b'O'$ und finden den Punkt O' dadurch, dass $b'O'$ gleich bo ist.

Dem Punkte O' entspricht jetzt das Centrum und dem Kreisbogen $b'O'$ der bo ; die Aufgabe ist also auf die vorige zurückgeführt worden.

Fig. 7.

Zum Schluss möchte ich bemerken, dass die einfache Lösung der Aufgabe der Transformation auch die einfachere Auflösung mancher anderer Aufgaben zur Folge hat.

Sollen z. B. die Winkel zwischen den Tracen der Flächen $b, c, d \dots$ auf der Fläche a aufgefunden werden, so haben wir die Transformation so vorzunehmen, dass der Pol a in die Lage des Projectionscentrums übergeführt wird, und finden dann die neuen Lagen von $b, c, d \dots$. Bezeichnen wir die neuen Lagen dieser Pole entsprechend durch $a', b', c', d' \dots$, so sind die Winkel zwischen den Geraden $a'b', a'c', a'd' \dots$ die gesuchten.

Bedeutend die Pole e', f' die der optischen Axen, so ergeben sich auch die Halbirenden zwischen den Geraden $a'e'$ und $a'f'$, und dies sind die Auslöschungsrichtungen auf der Fläche a' resp. a .