9. *Bestimmung der Elasticitätsconstanten für das chlorsaure Natron; von W. Voigt.*

(Aus den Gött. Nachrichten Nr. 6 mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Die Untersuchung der Elasticitätsverhältnisse des chlorsauren Natrons bietet ein besonderes Interesse wegen der tetartoëdrischen Krystallform und den damit zusammenhängenden electrischen Eigenschaften dieses Minerales; denn es ist, wie ich schon früher mehrfach betont habe, ein Zusammenhang zwischen dem electrischen und dem elastischen Verhalten im hohen Grade wahrscheinlich.

Das Material für die Beobachtungen ist von Hrn. Goldbach in Kehl geliefert worden; es war vielleicht schon ungewöhnlich vollkommen, denn die einzelnen Krystalle hatten bis 25 mm Kantenlänge; sie besassen indessen nur kleine von Fortwachsungserscheinungen völlig freie Bereiche und gestatteten daher auch nur die Herstellung einer sehr geringen Zahl von Stäbchen für die Messung. Und diese kleine Zahl ist noch durch die Schwierigkeit der Bearbeitung des äusserst spröden Materials reducirt worden, sodass schliesslich nur drei Stäbchen der Messung unterzogen werden konnten; zwei mit der Längsrichtung (L) und den Querdimensionen (B und D) parallel Würfelnormalen (W I und II), und eines mit der Längs- und Dickenrichtung parallel einer Granatoëdernormalen (G).

Die für die Berechnung in Betracht kommenden Formeln sind folgende:

Der Biegungswiderstand E oder der Biegungsmodul E, und der Drillungswiderstand T oder der Drillungsmodul T ergeben sich aus den Dimensionen L, B, D, aus der Belastung P, deren Hebelarm R und aus der gemessenen Biegung η und dem gemessenen Drillungswinkel τ nach den Formeln:

$$(1) \qquad E = \frac{1}{\mathrm{E}} = \frac{P\,L}{4\,B\,D^3\,\eta},$$

$$(2) \qquad T = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{3\,P\,R\,L}{B\,D^3\,\tau\left(1 - 0{,}630 \cdot \dfrac{D}{B}\right)}.$$

Aus ihnen folgen leicht die allgemeinen Elasticitätsmoduln s_{11}, s_{12} und s_{44}, da

(3) $$E_w = s_{11}, \quad E_g = \tfrac{1}{4}\left(2(s_{11} + s_{12}) + s_{44}\right), \quad T_w = s_{44},$$

und aus diesen berechnen sich die Elasticitätsconstanten nach den Formeln:

(4) $$c_{11} = \frac{s_{11} + s_{12}}{(s_{11} - s_{12})(s_{11} + 2\,s_{12})}, \quad c_{12} = \frac{-\,s_{12}}{(s_{11} - s_{12})(s_{11} + 2\,s_{12})}, \quad c_{44} = \frac{1}{s_{44}}.$$

Der Berechnung ist, wie bei den früheren Bestimmungen, das Gewicht eines Grammes als Kraft-, das Millimeter als Längeneinheit zu Grunde gelegt.

Dimensionen.

Breiten und Dicken sind von Hrn. Dr. Pockels mit dem früher benutzten Sphärometer gemessen und nach den Formeln:

$$D = D_0 + \delta_1\,\alpha + \delta_2\,\alpha^2$$

$$B = B_0 + \beta_1\,\alpha + \beta_2\,\alpha^2$$

berechnet worden.[1]) Sie sind im Folgenden in Einheiten des Sphärometers (= 1/992,6 mm) angegeben.

W. Nr. 1. $D = 1000 + \delta$. $B = 4900 + \delta$.

δ beob.	27,8	44,9	51,8	50,7	41,8
δ ber.	28,4	44,4	52,0	51,2	42,0
β beob.	−46,5	+14	48	65	65
β ber.	−45	+12	49	66	64

$\delta_0 = 52{,}0$, $\delta_1 = 3{,}4$, $\delta_2 = -\,4{,}2$. $\beta_0 = 12$, $\beta_1 = 27{,}4$, $\beta_2 = -\,9{,}8$.

W. Nr. 2. $D = 1100 + \delta$. $B = 4900 + \beta$.

δ beob.	46,2	73,1	89,8	101,2	100,6
δ ber.	46,2	72,8	90,8	100,2	101,0
β beob.	47	52	44	20	−35
β ber.	45	55	45	16	−33

$\delta_0 = 90{,}8$, $\delta_1 = 13{,}7$, $\delta_2 = -4{,}3$. $\beta_0 = 45$, $\beta_1 = 19{,}6$, $\beta_2 = -\,9{,}8$.

G. $D = 1000 + \delta$. $B = 4000 + b$.

δ beob.	10,8	18,1	19,4	16,6	7,2
δ ber.	10,8	18,0	19,8	16,2	7,2
β beob.	407	414	399	398	379
β ber.	408	409	405	395	379

$\delta_0 = 19{,}8$, $\delta_1 = 0{,}87$, $\delta_2 = -2{,}7$. $\beta_0 = 405$, $\beta_1 = 7{,}2$, $\beta_2 = -\,2{,}8$.

Biegungen.

Die Dimensionen, welche in früher angegebener Weise aus den vorstehenden Zahlen abgeleitet sind, sind in Millimetern, die Biegungen in Theilen der beobachteten Scala (= 0,0002954 mm), die Belastungen in Grammen angegeben; η_P' bezeichnet die Eindrückung der Lagerschneiden, die durch Combinationen von zwei Beobachtungen desselben Stäbchens bei verschiedener Länge erhalten wird und von den direct gemessenen η_P in Abzug zu bringen ist.

1) W. Voigt, Wied. Ann. **31.** p. 475. 1887.

W. I. $L = 14{,}07$, $B = 4{,}98$, $D = 1{,}058$, $P = 60$.
1. Lage $\eta = 8{,}6 \quad 8{,}7 \quad 8{,}7 \quad 8{,}8$
2. Lage $\eta = 8{,}6 \quad 8{,}9 \quad 8{,}7$
$L = 22{,}7$
1. Lage $\eta = 25{,}2 \quad 25{,}1 \quad 25{,}3$
2. Lage $\eta = 25{,}2 \quad 25{,}2 \quad 25{,}1$
$\eta_{60} = 25{,}20$, $\eta_{60}' = 2{,}90$. $E = \mathbf{4{,}15_3 \, . \, 10^6}$.

W. II. $L = 14{,}07$, $B = 5{,}014$, $D = 1{,}198$, $P = 80$.
1. Lage $\eta = 8{,}5 \quad 8{,}6 \quad 8{,}5$
2. Lage $\eta = 8{,}7 \quad 8{,}6 \quad 8{,}4$
$L = 22{,}7$
1. Lage $\eta = 23{,}6 \quad 23{,}8 \quad 23{,}6$
2. Lage $\eta = 23{,}5 \quad 23{,}4 \quad 23{,}5$
$\eta_{80} = 23{,}57$, $\eta_{80}' = 3{,}16$. $E = \mathbf{4{,}14_2 \, . \, 10^6}$.
Mittelwerth $E_w = \mathbf{4{,}14_7 \, . \, 10^{+6}}$, $\mathrm{E}_w = \mathbf{0{,}241_2 \, . \, 10^{-6}}$.

G. $L = 14{,}07$, $B = 4{,}98_4$, $D = 1{,}059$, $P = 60$.
1. Lage $\eta = 13{,}5 \quad 13{,}7 \quad 13{,}6$
2. Lage $\eta = 13{,}3 \quad 13{,}1 \quad 13{,}1$
$L = 22{,}07$
1. Lage $\eta = 39{,}8 \quad 40{,}1 \quad 40{,}0$
2. Lage $\eta = 39{,}4 \quad 39{,}4 \quad 39{,}3$
$\eta_{60} = 39{,}7$, $\eta_{60}' = 4{,}2$.
$E_g = \mathbf{2{,}58_1 \, . \, 10^{+6}}$, $\mathrm{E}_g = \mathbf{0{,}387_5 \, . \, 10^{-6}}$.

Drillungen.

Die beobachteten Drehungen sind in Theilen der Scala (σ), welche gleich 1,0037 mm waren, angegeben; aus ihnen folgt der Drehungswinkel τ durch Division mit dem Abstand $A = 5173$ der Scala von den Spiegeln. Die Axenreibung (ϱ) ist in früher erörterte Weise eliminirt. G bezeichnet das Gewicht der Waagschale, welches mit ϱ zusammen aus der Berechnung verschwindet; das Symbol $l\,R$ resp. $r\,R$ bedeutet, dass die Messung an der linken oder rechten Rolle des Apparates vorgenommen ist. Der mittlere Werth von R ist 36,80 mm.

W. Nr. 1. $L = 12{,}40$, $B = 4{,}975$, $D = 1{,}057$.

$r\,R$.	$G + 10$,	$\sigma = 34{,}7$	34,6	34,8	34,6	34,6	$\varrho = 0{,}9$
	G,	$\sigma = 12{,}1$	12,0	12,1	12,0		$\varrho = 0{,}8$
$l\,R$.	$G + 10$,	$\sigma = 34{,}6$	34,7	34,7	34,7	34,6	$\varrho = 1{,}1$
	G,	$\sigma = 11{,}9$	11,9	11,7	11,8		$\varrho = 1{,}3$

$\sigma_{10} = 22{,}72$, $T = \mathbf{1{,}22_8 \, . \, 10^{+6}}$.

W. Nr. 2. $L = 16{,}50$, $B = 4{,}977$, $D = 1{,}190$.

$l\,R$.	$G + 10$,	$\sigma = 44{,}4$	44,4	44,4	44,3		$\varrho = 2{,}0$
	G,	$\sigma = 22{,}1$	22,3	22,3	22,4	22,3	$\varrho = 2{,}0$
R.	$G + 10$,	$\sigma = 42{,}6$	42,6	42,6	42,9	42,6	$\varrho = 1{,}6$
	G,	$\sigma = 21{,}2$	21,1	21,2	21,3		$\varrho = 1{,}6$

$\sigma_{10} = 21{,}80$, $T = \mathbf{1{,}21_2 \, . \, 10^{+6}}$.
Mittelwerth $T_w = \mathbf{1{,}21_8 \, . \, 10^{+6}}$, $\mathrm{T}_w = \mathbf{0{,}821 \, . \, 10^{-6}}$.

Die erhaltenen Zahlen stimmen so gut überein, als überhaupt zu erwarten, die Resultate haben also eine gewisse Zuverlässigkeit.

Folgerungen.

Aus den gefundenen E und T ergeben sich sogleich die Werthe der Elasticitätsmoduln

$$s_{11} = 0{,}241_2 \,.\, 10^{-6}, \quad s_{12} = 0{,}123_3 \,.\, 10^{-6}, \quad s_{44} = 0{,}821 \,.\, 10^{-6}$$

und aus ihnen erhält man die Elasticitätsconstanten

$$c_{11} = 6{,}33 \,.\, 10^{+6}, \quad c_{12} = -\,2{,}14 \,.\, 10^{+6}, \quad c_{44} = 1{,}218 \,.\, 10^{+6}.$$

Diese Resultate sind sehr bemerkenswerth, besonders wenn man sie mit denjenigen vergleicht, welche für das dem chlorsauren Natron nachstehende Steinsalz gefunden sind. Hier ergab sich

$$s_{11} = 0{,}238 \,.\, 10^{-6}, \quad s_{12} = -\,0{,}052 \,.\, 10^{-6}, \quad s_{44} = 0{,}773 \,.\, 10^{-6}.$$

$$c_{11} = 4{,}77 \,.\, 10^{+6}, \quad c_{12} = +\,1{,}32 \,.\, 10^{+6}, \quad c_{44} = 1{,}29 \,.\, 10^{+6}.$$

Es haben also s_{12} und c_{12} in beiden Fällen entgegengesetzte Vorzeichen.

Dies hat wichtige Folgen. Der Modul s_{12} ist das Maass der Querdilatation eines Cylinders, dessen Axe in eine Würfelnormale fällt, bei longitudinalem Zug; ein *negativer* Werth von s_{12} gibt eine Quercontraction — wie sie fast überall stattfindet und als nahezu selbstverständlich betrachtet zu werden pflegt — ein *positiver* aber eine Querdilatation als Begleitung der Längsdilatation. Eine solche war bisher einzig am Pyrit bei gleicher Orientirung aufgefunden[1]) und wegen ihrer Absonderlichkeit dort nicht allzusehr betont; es schien denkbar, dass sie nur scheinbar infolge des nicht ganz vollkommenen Materials aufgetreten wäre. Nach diesem neuen Resultate ist es aber als sichergestellt zu betrachten, *dass in einigen Fällen die Längsdehnung eines Cylinders eine Vergrösserung des Querschnittes zur Folge hat.*

Was die Werthe der Elasticitätsconstanten angeht, so soll nach der Theorie dann

$$c_{11} = 3\,c_{12}$$

sein, wenn die kleinsten Theile keine Polarität besitzen.

1) W. Voigt, Wied. Ann. **35.** p. 651. 1888.

Diese Relation ist bei Steinsalz sehr nahezu erfüllt; beim chlorsauren Natron findet sich der denkbar stärkste Widerspruch damit, denn c_{11} und c_{12} haben entgegengesetzte Vorzeichen. Man wird also dem chlorsauren Natron Molecüle mit sehr starker Polarität beilegen müssen, und dies steht in guter Uebereinstimmung mit der starken piëzoelectrischen Erregbarkeit, welche dieses Mineral zeigt.

Es hat ein gewisses Interesse, zu untersuchen, wie sich nach der früher gegebenen[1]) und mehrfach durch die Erfahrung bestätigten Theorie *dichtes* (quasi-isotropes) chlorsaures Natron verhalten müsste. Nach den abgeleiteten Formeln sind für solches die Elasticitätsconstanten c und c_1 gegeben durch

$$c = \tfrac{1}{5}(3\,c_{11} + 2\,c_{12} + 4\,c_{44}), \qquad c_1 = \tfrac{1}{5}(c_{11} + 4\,c_{12} - 2\,c_{44});$$

und es berechnet sich aus den oben gefunden c_{hk}:

$$c = 3{,}92\,.\,10^{+6}, \qquad c_1 = -\,0{,}93\,.\,10^{+6}.$$

Nun ist der Werth des Moduls s_1 der Querdilatation für isotrope Substanzen

$$s_1 = -\,\frac{c_1}{(c - c_1)(c + 2\,c_1)},$$

und hieraus folgt sofort, dass das singuläre Verhalten des chlorsauren Natrons auch im *dichten* Vorkommen erhalten bleiben, also auch ein Cylinder aus diesem Material bei Längsdehnung eine Vergrösserung des Querschnittes zeigen müsste.

Göttingen, Anfang März 1893.

1) W. Voigt, Wied. Ann. **38.** p. 579. 1889.