7. *Über zeitliche Beziehungen von Schwingungen
in Kondensatorkreisen;
von Max Dieckmann.*

(Auszug aus der Straßburger Inaugural-Dissertation.)

In einem gewöhnlichen Kondensatorkreise ist der Verlauf des oszillierenden Stromes der Entladung außer der Amplitude durch drei Größen, und zwar Schwingungszahl, Dämpfung und Phasenkonstante charakterisiert. Letztere zu kennen ist notwendig, wenn man zwei Kreise hat und deren zeitlichen Zusammenhang untersuchen will.

Gesetzt wir hätten zwei oszillierende Ströme

$$i_1 = a_1 e^{-\alpha_1 t} \sin(n t + \varphi_1)$$

und

$$i_2 = a_2 e^{-\alpha_2 t} \sin(n t + \varphi_2),$$

so läßt sich die Phasenverschiebung $\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)$ ermitteln, wenn man

$$\int_0^{\infty} i_1^2 dt, \quad \int_0^{\infty} i_2^2 dt \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$$

kennt.

Am wichtigsten ist die Kenntnis der Stelle, an der dieses letzte Integral gleich Null wird; dies entspricht auch bei gedämpften Schwingungen, wie sie bei Kondensatorentladungen in Betracht kommen, einer Phasendifferenz von 90° . Dabei ist zunächst keine Rücksicht zu nehmen auf die Art, wie diese phasenverschobenen Ströme hergestellt werden, sie müssen nur die oben angegebene Form haben.

Es läßt sich andererseits zeigen, daß, wenn man zwei Kondensatorkreise induktiv koppelt, von denen der eine in bekannter Weise eine Funkenstrecke enthält, und man mit i_1 und i_2 die respektiven Ströme, die nicht mehr von der obigen einfachen Form zu sein brauchen, bezeichnet, allgemein $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ verschwindet, falls die Eigenschwingungen beider Kreise über-

einstimmen oder, präziser gesagt, $p_1 c_1$ gleich $p_2 c_2$ ist, wo p und c bezugsweise die Selbstinduktionen und Kapazitäten sind.

Es erschien nun wünschenswert, eine Methode auszuarbeiten, welche durch eine Messung den Wert dieses Integrals zu ermitteln gestattet oder hauptsächlich das Nullwerden des Integrals anzeigt, und dann diese Methode anzuwenden

1. auf die Untersuchung einer Anordnung, in welcher phasenverschobene Ströme erzeugt werden, und

2. auf die Untersuchung von zwei induktiv gekoppelten Kreisen.

Als Resultat der zweiten Anwendung ließ sich ein schärferes Kriterium für die Resonanz zweier Kreise erwarten, als bis jetzt in der Bjerknesschen Resonanzkurve gegeben war. Dies stellte gleichzeitig die Möglichkeit in Aussicht, Selbstinduktionen, Kapazitäten und Dielektrizitätskonstanten mit einem größeren Grade von Genauigkeit zu messen.

Die Methode selbst beruht auf gleichzeitiger Anwendung dreier Thermoelemente und ist schematisch in Fig. 1 dargestellt.

Fig. 1. Skizze des Meßaufbaues.

In I und II fließen die Ströme i_1 bez. i_2 ; es sind entweder die phasenverschobenen Ströme oder der primäre bez. sekundäre Strom des gekoppelten Systems.

Im geschlossenen Kreis a_1, b_1, c_1, d, f, e wird ein diesem Strom proportionaler Strom induziert unter der Bedingung, daß die Induktanz sehr groß gegen den Ohmschen Widerstand ist; genau ebenso in a_2, b_2, c_2, e, f, d ein zu i_2 proportionaler Strom. Die beiden Kreise haben allerdings den Teil d, f, e gemeinsam, da aber die Induktanz eines jeden Kreises gegen den Ohmschen Widerstand überhaupt, also gegen den Widerstand des Thermoelementes d, f, e groß sein soll, bleibt die letzte Überlegung gültig.

Die Thermoelemente sollen gleichempfindlich sein, dann ist die elektromotorische Kraft des Elementes b_1, c_1 proportional

zu $a^2 i_1^2$, des zweiten zu $b^2 i_2^2$ und des dritten zu $(a i_1 + b i_2)^2$, wo a und b von dem Transformationsverhältnis abhängen. Schaltet man nun die drei Thermoelemente mit einem Galvanometer in Reihe, aber so, daß sich die Spannungen von $b_1 c_1$ und $b_2 c_2$ addieren, aber von der des Thermoelementes $d e$ subtrahieren, so erhält man offenbar Ausschläge, welche proportional zu

$$\int_0^\infty (a i_1 + b i_2)^2 dt - \int_0^\infty (a^2 i_1^2 + b^2 i_2^2) dt$$

oder zu

$$\int_0^\infty i_1 i_2 dt$$

proportional sind.

Das $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ (und damit auch die Ausschläge) kann positive und negative Werte haben. Von Wichtigkeit ist namentlich die Beobachtung der Nullwerte.

Alles in allem erfordert der Meßaufbau, über dessen Einzelheiten die Straßburger Dissertation das nähere enthält, hinsichtlich der Vermeidung unerwünschter Induktionen einige Vorsicht. Nach einmal gelungener Abgleichung ergaben jedoch häufige, späterhin gelegentlich vorgenommene Kontrollmessungen die völlige Konstanz der Thermoelemente und der Meßbereitschaft.

A. Für den Fall zweier zeitlich aufeinander bezogenen Schwingungskreise gleicher Wechselzahl läßt sich zeigen, daß dem Verschwinden des $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ eine Phasenverschiebung von sehr nahe zu $\pi/2$ entspricht. Die Rechnung ergibt nämlich, daß für

$$\int_0^\infty i_1 i_2 dt = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{n}{\delta},$$

wo δ die halbe Summe der Dämpfungsexponenten und n die Schwingungszahl bedeutet. δ wird aber im allgemeinen sehr klein gegen n sein.

Ein Weg, Phasenverschiebungen herzustellen, wurde von

Hrn. Dr. Mandelstam und Dr. Papalexi angegeben.¹⁾ Fig. 2 zeigt die zur Verwendung kommende Schaltanordnung.

Fig. 2. Kreise zur Herstellung phasenverschobener Schwingungen.

Es sind drei Schwingungskreise I, II und III gebildet. Die Kapazitäten sind unter Hinzufügung der entsprechenden Indizes mit C , die Selbstinduktionen mit S bezeichnet.

An der Funkenstrecke F_I des Kreises I liegen die Sekundärpole eines Funkeninduktors. Die Funkenstrecke F_{II} des Kreises II ist durch einen hohen Widerstand R überbrückt. O_I und O_{II} sind Drahtschlingen, welche auf die Meßkreise K_I und K_2 induzieren.

Der Kreis III heißt der Koppelkreis, da durch seine Vermittelung der Kreis II zum Schwingen angeregt wird.

Kreis I und II lassen sich so herstellen oder durch Veränderung der Selbstinduktion so einjustieren, daß sie die für den beabsichtigten Zweck erforderliche gleiche Schwingungsdauer haben. Das zeitliche Nachhinken des Kreises II gegen den Kreis I, oder die gegenseitige Phasenverschiebung hängt neben der Beschaffenheit der Funkenstrecke F_{II} von der Größe der Schwingungsdauer des Kreises III + II oder, da II konstant sein soll, von der des Kreises III allein ab. Um diese genügend verändern zu können, sind die Selbstinduktionen S_{III} und S'_{III} in sehr weiten Grenzen variabel.

Kreis I und II sind völlig symmetrisch auf paraffinierten Holzgestellen, wo es angängig war, unter Zuhilfenahme von Glas und Hartgummi fest und stabil montiert. Bei der Her-

¹⁾ L. Mandelstam u. N. Papalexi, Physik. Zeitschr. 7. p. 303 bis 306. 1906.

stellung wurde des weiteren berücksichtigt, daß die Funkenstrecke F_I die Funkenstrecke F_{II} des präziseren Einsetzens wegen belichten soll, also der Abstand zwischen ihnen nur sehr klein sein darf, während andererseits I und II, um gegenseitige Induktion auszuschließen, möglichst weit entfernt sein müssen.

Die Funkenstrecken F_I und F_{II} befinden sich demgemäß in etwa 4 cm Abstand auf einem gemeinsamen Gestell, während die entfernt aufgestellten Kreise I und II durch je 60 cm lange, engparallele starre Zuführungen mit den Funkenkugeln verbunden sind. Die Kugeln bestehen aus Zink, sie haben 1,5 cm Durchmesser, der Abstand der Kugeln jeder Funkenstrecke ist fein verstellbar und ablesbar.

Kreis I und II sind nach Möglichkeit so angeordnet, daß nur geringe Streuung vorhanden sein kann. Die Selbstinduktionen bestehen aus Kreissolenoidspulen, auf denen eine Kontaktkurbel zur Regulierung schleift. Neben den Koppelschiebern O ist noch je eine Schlinge vorhanden zum Zwecke der Kontrollmessungen nach der früheren Methode.¹⁾

Als Kapazitäten aller Kreise dienen Leidener Flaschen von etwa je $2,7 \times 10^{-3}$ Mikrof., neuartig ist im Kreise III die Einrichtung der variablen Selbstinduktion.

Fig. 3 zeigt ihr Schaltschema, Fig. 4 ihre Ausführung. T sind gehörig isolierte und versteifte Kreissolenoidspulen. Der Index r oder l bezeichnet den Sinn der Wicklung als rechts oder links.

Diese Spulen haben jede rund 5400 C.G.S. Einheiten Selbstinduktion. Sie lassen sich paarweise durch Schleifkontakte X symmetrisch mittels eines isolierenden Handgriffes in den Koppelkreis ein- und ausschalten und dienen so zur groben Veränderung der Selbstinduktion. Die Feinregulierung erfolgt durch die aus blankem Draht hergestellten, über paraffiniertes Holz gewickelten Solenoidspulen U , von denen gleichfalls durch die isoliert starr verbundenen Schleifkontakte Y verschieden große Stücke in den Kreis gebracht werden können. Es lassen sich also, da die Selbstinduktionen U entsprechend

---

1) F. Braun, Physik. Zeitschr. 5. p. 193. 1904; J. Zenneck, Elektromagn. Schwing. Stuttgart 1905. p. 462.

bemessen sind, kontinuierlich die Übergangswerte zwischen die großen Stufen einschalten.

Fig. 3. Schaltschema der Koppelkreiselbstinduktion.

In Wirklichkeit liegen die Spulen nicht so, wie in Fig. 3 der Übersichtlichkeit wegen gezeichnet ist, sondern in zwei Stößen zu je acht Stück, wie es Fig. 4 zeigt, da durch eine derartige Über-einanderschichtung von rechts und links gewundenen Spulen die störende Induktionswirkung nach außen erheblich geschwächt wird. Der ganze Apparat läßt also eine Variierung der Selbstinduktion von wenigen Zentimetern bis rund 100000 cm zu. Zu dieser Selbstinduktion kommen noch zwei dauernd in den Koppelkreis eingeschaltete Solenoidspulen von der ungefähren Größe der Selbstinduktion in Kreis I und II hinzu.

Fig. 4.

Ausführung der Koppelkreiselbstinduktion.

Die Messung bestand in folgendem. Bei konstant gehaltenen Funkenlängen F_I und F_{II} (Fig. 2) wurde, nachdem vorher durch Regulierung der Selbstinduktionen S_I und S_{II} Kreis I auf Kreis II abgestimmt war, S_{III} und S'_{III} variiert und zu jedem Wert dieser Selbstinduktion der entsprechende Ausschlag im Galvanometer abgelesen. Die Verbindung der Meßanordnung mit den Kreisen I und II ist aus der Fig. 2 ohne weiteres ersichtlich.

Eine aus derartigen Beobachtungen gewonnene Kurve stellt Fig. 5 dar. Als Abszissen sind die Werte von $S_{III} S'_{III}$ — als Einheit ein Spulenpaar der Fig. 3, d. i. ca. 11000 cm Selbstinduktion —, als Ordinaten die Galvanometerausschläge aufgetragen. Die Schwingungszahl in diesem Fall betrug rund 3×10^6 pro Sekunde.

Wurde nun der Wert von $S_{III} S'_{III}$ aufgefunden, für welchen der Ausschlag gleich Null war, so wurde der Bereich dieses Wertes mit der Braunschen Methode untersucht. Zu dem Ende bestand dauernd ein völlig unabhängiger Meßaufbau, der durch Umlegen der Wippe *W* mit dem Galvanometer verbunden werden konnte; auf die Art war es möglich, jederzeit von einer Meßmethode zur anderen überzugehen.

Die Braunsche Methode ergab für diesen Punkt und ebenfalls für alle weiter unten mitgeteilten entsprechenden Beobachtungen bis auf die Versuchsfehler gleiche Galvanometerausschläge für Hinter- und Gegeneinander-Schaltung.

Es entspricht also tatsächlich dieser Punkt einer Phasenverschiebung von $\pi/2$. Solche Kurven wurden nun für verschiedene sekundäre Funkenlängen aufgenommen und schließlich noch die primäre Funkenstrecke variiert.

Es ist im allgemeinen schwierig, die Phasenverschiebung von $\pi/2$ längere Zeit konstant zu erhalten, jedoch ist die Labilität nicht unter allen Umständen gleich stark. Um in diesen Fragen einige Klarheit zu gewinnen, wurden die Ergebnisse benutzt, um eine Fläche aus Karton zu konstruieren, welche übersichtlich die charakteristischen Verhältnisse der untersuchten Anordnung wiedergibt. Die Fläche ist in Fig. 6 nach Art einer Gebirgskarte dargestellt. Die durch die verschiedene Tönung angedeuteten Höhen entsprechen den Galvanometerausschlägen, je nach der Bezifferung positiven oder nega-

Fig. 5. Beobachtungskurve zur Konstatierung von $\pi/2$ Phasenverschiebung.

tiven Vorzeichens; die Nulllinie bezeichnet die Phasenverschiebung von $\pi/2$.

Es zeigt sich nun zunächst deutlich, daß die Nulllinie die Fläche in Gebieten sehr verschiedener Steilheit schneidet; bei der Selbstinduktion Stufe 4 gehen die Werte sehr schroff von positiven zu negativen Werten über, bei der Selbstinduktion Stufe 6 umgekehrt sehr allmählich. Aber noch ein weiteres

Fig. 6. Beobachtungsfläche als Karte.

ist beachtenswert. Ein Teil der Nullkurve — etwa zwischen den Selbstinduktionsstufen 3 und 4 — läuft nahezu parallel der X -Achse, eine kleine Veränderung der Selbstinduktion hat also hier kaum Einfluß, um so mehr macht sich aber eine Inkonzanz der Funkenlänge bemerkbar. Anders liegen die Verhältnisse zwischen den Selbstinduktionswerten 4 und 5. Hier hat die Nullkurve fast die Richtung der Y -Achse, und eine Änderung der Funkenlänge bleibt auf den Wert der Phase von geringem Einfluß. Besonders bemerkenswert wegen der völligen Stabilität der Phase ist auch die Stelle der Nullkurve, die man bei Einschaltung der Selbstinduktion 6 und

Funkenlänge 1,82 mm erhält. Es war stets möglich, bei vorheriger beliebiger Stellung der Funkenstrecke und Selbstinduktion einen bestimmten Punkt der Fläche wiederzuerhalten, und man konnte auf eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ einstellen, auch ohne das Galvanometer zu beobachten. Messungen nach der alten Methode bestätigten auch hier die Richtigkeit der Ergebnisse.

Die oben besprochenen Ergebnisse lassen sich folgendermaßen verwerten.

Da es in der Praxis schwierig ist, die Funkenstrecke längere Zeit unverändert zu erhalten, so wird man, *wenn man dauernd konstante Phase haben will*, jedesmal nach derartigen Stellen, d. h. *derartigen zusammengehörigen Werten von Funkenstrecke und Selbstinduktion, in welchen die Phase wenig von der Funkenlänge abhängt*, suchen müssen und diese dann benutzen.

Diejenigen Stellen, in welchen die Phasenverschiebung sehr stark von der Funkenlänge abhängt, bieten andererseits eine empfindliche Methode, *die Abhängigkeit der Schlagweite vom magnetischen Feld, Beleuchtung etc.* zu untersuchen. Über diesen Gegenstand sollen weitere Untersuchungen angestellt werden.

B. Für den Fall zweier induktiv gekoppelter Kreise ließ sich das Integral

$$\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt \quad \text{auf das Integral} \quad \int_0^{\infty} i_2^2 dt,$$

welches bereits gelöst vorliegt, zurückführen und man kann schreiben:

$$\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt = \frac{w_2 (p_1 C_1 - p_2 C_2)}{p_{12} (w_1 C_1 + w_2 C_2)} \int_0^{\infty} i_2^2 dt.$$

Die geometrische Form von $\int_0^{\infty} i_2^2 dt$ für lose Koppelung als Funktion der sekundären Schwingungszahl ist durch die Bjerknessche Resonanzkurve bekannt. Für den Fall der losen Koppelung läßt sich also unter denselben Voraussetzungen der Wert von $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ als Funktion der sekundären Schwin-

gungszahl darstellen. Führt man nach Zenneck¹⁾ die Resonanzkurve des Stromeffektes ein, so folgt für die Empfindlichkeit am Resonanzpunkt

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \nu_2} \right)_{\nu_2 = \nu_1} = \frac{E_{a0}^2}{8 p_1 p_2 \delta_1 (\delta_1 + \delta_2)^2},$$

wo E_{a0} die elektromotorische Kraft des Primärkreises und δ die Dämpfungsfaktoren bedeuten.

Die Kurve schneidet sehr steil durch den Resonanzpunkt auf der Abszissenachse hindurch.

Die Empfindlichkeit wird *ceteris paribus* um so größer, je kleiner die Dämpfung und die Koppelung sind. Wie schon oben erwähnt, verschwindet das Integral

$$\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt \quad \text{für} \quad p_1 c_1 = p_2 c_2$$

bei jeder Koppelung. Bei meinen Versuchen wurde die Koppelung im allgemeinen lose gewählt, weil so die Vergleichsresonanzkurve schärfer wird.

Fig. 7. Induktiv gekoppelte Kreise.

Die zu den Versuchen benutzte Anordnung zweier geschlossener induktiv gekoppelter Kreise zeigt Fig. 7. I ist der Primärkreis, II der Sekundärkreis. Der Primärkreis ist

1) J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen p. 592.

derselbe wie Kreis I unter A., nur ist noch eine weitere Induktionsschlinge Q_1 mittels langer, gut isolierter und verlitzter Drähte eingeschaltet. Der Sekundärkreis II hat an Stelle seiner Leidener Flaschen eine variable Kapazität C_v erhalten. Als Spannungsquelle wurde, wie unter A., ein kleiner, mit städtischem Wechselstrom ohne Unterbrecher betriebener Induktor benutzt, der mit zwei Leidener Flaschen und seiner Sekundärwicklung als Resonanzinduktor arbeitete, oder ein mit Turbinenunterbrecher betriebenes, von sieben Akkumulatoren gespeistes, größeres Induktorium.

Die Messungen wurden so angestellt, daß von Kreis II einmal eine gewöhnliche Bjerknessche Resonanzkurve und sodann mittels der beschriebenen Methode eine $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ Kurve aufgenommen wurde. Fig. 8 gibt das Ergebnis einer der-

Fig. 8. $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ Kurve.

artigen Beobachtung wieder. Als Abszissen sind die Drehungswinkel des variablen Kondensators aufgetragen, als Ordinaten die Galvanometerausläge. Da letztere bis auf $\pm 0,5$ mm

sicher anzugeben sind, so ergibt sich eine Genauigkeit der Kapazitätsmessung von 0,1 Proz.

Die Ergebnisse der Untersuchung lassen sich zum Schluß dahin zusammenfassen:

1. Die Drei-Thermoelement-Nullmethode gestattet Phasenverschiebungen von $\pi/2$ zu konstatieren.

2. Es ist bis zu einem gewissen Grade möglich, beliebige Phasenverschiebungen zwischen zwei mittels eines Koppelkreises gekoppelten Schwingungskreisen durch alleinige Variation der sekundären Funkenlänge zu erzielen.

3. Es zeigt sich für die Konstanz einer Phasenverschiebung von $\pi/2$ von Einfluß, in welchen Beträgen die Selbstinduktion des Koppelkreises und die Funkenlänge der sekundären Funkenstrecke bei ihrer Herstellung beteiligt sind.

4. Die Methode scheint ein empfindliches Hilfsmittel für die Untersuchung des Zustandes von Funkenstrecken zu sein, und es ist beabsichtigt, nach dieser Richtung weitere Versuche anzustellen.

5. Die $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ Kurven ermöglichen eine schärfere Abstimmung induktiv gekoppelter Kreise, als die Bjerknessche Kurve.

6. Es ist ohne Schwierigkeit möglich, Kapazitäten auf 0,1 Proz. genau zu bestimmen; ebenso werden sich Selbstinduktionen, Dielektrizitätskonstanten etc. mittels der Nullmethode leicht bis zu der angeführten Genauigkeit messen lassen.

Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. F. Braun, ergebenst zu danken. Ebenso danke ich Hrn. Dr. L. Mandelstam für die Anregung zu dieser Arbeit und die vielfache Förderung während ihrer Ausführung.

(Eingegangen 5. August 1907.)