« *Avendo un sistema di conduttori alcuni carichi di elettricità, altri scarichi (cioè carichi solo di eguali quantità delle opposte elettricità separate per influenza) se in quelli che sono carichi il potenziale ha valori $K_1 V, K_2 V \dots$ anche negli altri conduttori il potenziale assumerà valori $K_{(m+1)} V, K_{(m+2)} V \dots$.* »

Bologna, Maggio 1872.

SULL'ATTRAZIONE DELLE MONTAGNE; DI FILIPPO KELLER
ASSISTENTE NELLA R. UNIVERSITA' DI ROMA.

Il sig. Faye propose nell'Accademia di Parigi, di servirsi del grande traforo del Frejus, onde determinare l'attrazione del monte che gli sovrasta e sembra che questa proposta sarà fra poco realizzata. Per tale fine basta determinare il tempo di oscillazione di un pendolo tanto alla sommità del monte, quanto nel punto del traforo verticalmente al di sotto. Questa idea in fondo non è nuova: l'astronomo Airy ⁽¹⁾ già fece ricerche di simile natura in una profonda miniera dell'Inghilterra, e si servì dei risultati ottenuti per dedurre la densità media del globo terrestre; e le osservazioni del celebre Carlini ⁽²⁾ sulla cima del Monte Ceniso, confrontate con quelle eseguite sotto la medesima latitudine ed in poca altezza sul livello del mare, ebbero il medesimo scopo. Nondimeno mi sembra, che la proposta del sig. Faye sia felicissima, atteso che l'altezza disponibile nel caso del Frejus è circa quattro volte maggiore di quella della miniera in cui sperimentò Airy. L'azione attrattiva del

(1) *Bibliothèque universelle de Genève*, année 1857, tome XXXV, pag. 29.

(2) *Effemeride di Milano*, anno 1824, Appendice, pag. 25.

Frejus è quindi molto più considerevole, ed i risultati ottenuti avranno perciò un'esattezza molto maggiore.

Essendomi da qualche tempo occupato delle attrazioni delle montagne, ho compilato un piccolo lavoro su questo argomento. La sua prima parte, del tutto analitica, trovasi presentemente sotto il torchio; ma siccome la seconda, che tratta di vari casi numerici non può essere terminata in sì breve tempo e ciò principalmente per mancanza di una serie di dati numerici, così credo utile di dare qui un breve sunto di alcuni argomenti, che vengono trattati in tale lavoro e che sono in relazione colla proposta del sig. Faye.

1. L'attrazione delle montagne può studiarsi specialmente in due modi, secondo che questa forza agisca prossimamente nella direzione della gravità, ovvero sotto un angolo retto alla medesima. Nel primo caso viene questa forza principalmente modificata nella sua intensità, e questo è appunto il caso del Frejus; lo strumento per osservare questa modificazione è il pendolo. Nel secondo caso si manifesta l'azione perturbatrice in ispecie nella direzione della gravità, essa produce la deviazione del filo a piombo. Ambedue queste azioni sono di un interesse particolare per la geologia, perchè esse fanno in ultima analisi conoscere il rapporto fra la massa del globo terrestre e quella del monte che attrae e quindi anche il rapporto delle densità medie di questi due corpi. La deviazione del filo a piombo poi interessa ancora in maggior grado la geodesia, perchè avendo luogo questa deviazione in un certo sito, allora la sua verticale effettiva non coincide più colla normale della superficie generale dell'ellissoide terrestre; la posizione di questo luogo determinata per mezzo dell'astronomia necessita di una correzione più o meno grande. Così per ogni luogo della terra debbonsi, rigorosamente parlando, distinguere due diverse latitudini: una astronomica che è affetta della deviazione del filo a piombo (perchè lo zero delle graduazioni dei cerchi verticali degli strumenti astronomici non può regolarsi fuorchè col filo a piombo o col livello), l'altra geodetica la quale non dipende da questa circostanza. Un caso assai rimarchevole di attrazione locale esiste nei contorni di Mosca, ove in alcuni punti la differenza fra le due indicate latitudini giunge fino a 7 in 8 secondi, sebbene il ter-

reno sia quasi piano ⁽¹⁾; vi debbono quindi nel suolo esistere delle forti eterogeneità.

Ora, per venire sulle ricerche da farsi sul Frejus, sia B questo monte, (Vedi *fig. 1, Tav. IV*) A l'ellissoide terrestre propriamente detto, tOt la sua superficie, O' la stazione superiore corrispondente alla sommità del monte e O la stazione inferiore entro il traforo. Guidisi per il punto O un piano tangente MN all'ellissoide terrestre, il quale rappresenta quindi l'orizzonte apparente di questo punto. Nel punto O consiste la gravità di due parti, proveniente l'una dalla terra, la quale agisce dall'alto in basso, e l'altra dalla massa del monte posta al di sopra del piano MN , e questa agisce in senso opposto; la risultante è quindi rappresentata dalla differenza di queste forze. Nella stazione superiore O' consiste la gravità pure di due parti, proveniente l'una dalla terra e l'altra dalla massa del monte superiore alla MN , ma queste due forze si sommano nel caso presente, perchè ambedue agiscono dall'alto in basso.

Egli è utile di considerare la massa posta al di sotto del piano tangente MN composta di due parti distinte, una A , l'altra CC' , le quali vengono fra loro separate dalla superficie dell'ellissoide terrestre u , in guisa che le forze agenti sopra ciascuna stazione siano in numero di tre cioè; 1. l'attrazione dell'ellissoide terrestre; 2. l'azione del monte B superiore all'orizzonte apparente della stazione inferiore; 3. l'azione dei monti circonvicini CC' compresi fra l'orizzonte MN e la superficie terrestre. Siano per la stazione inferiore queste forze rispettivamente Z , P e Q e per la superiore Z' , P' , Q' e le gravità totali in questi due punti saranno espresse da

$$g = Z - P + Q \qquad g' = Z' + P' + Q'.$$

2. Per dedurre l'attrazione della massa B sul punto O o piuttosto la sua componente verticale, si divide la massa medesima per tanti piani paralleli alla MN in elementi, i quali si

(1) *Relazioni intorno alle attrazioni locali risultanti nei contorni di Mosca*, del Prof. Santini. Venezia, 1865.

possono considerare come piani materiali omogenei; e per determinare l'azione di uno qualsiasi di questi strati tanto sul punto O, quanto sull'altro O' si rifletta che in pratica tale piano sarà limitato da un poligono, il quale si accosta più che è possibile al suo vero perimetro.

Si collochi ora un sistema ortogonale a tre assi in guisa, che la sua origine si confonda col punto O, e l'asse delle z colla verticale ascendente; il piano delle xy si trova quindi nell'orizzonte apparente MN del punto O, mentre del resto la direzione dell'asse delle x rimane arbitraria. Sia RS il piano ovvero strato di cui si cerca l'attrazione, il quale dista dal punto O per l'intervallo $= h$, avendo il medesimo l'ertezza dh e la densità γ la quale, come già si disse, viene supposta uniforme. Essendo inoltre (x, y_1) (x, y_2) . . . (x_m, y_m) i vertici di questo poligono, presi nell'ordine dell'andamento positivo del suo perimetro e dZ l'attrazione verticale che esso esercita sul punto O, si avrà la seguente formula:

$$dZ = 2\gamma\pi dh - \gamma dh \sum \left(\text{arc. tang. } \frac{\pm h[x_n(x_n - x_{n+1}) + y_n(y_n - y_{n+1})]}{(x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n) \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + h^2}} \right. \\ \left. + \text{arc. tang. } \frac{\mp h[x_{n+1}(x_n - x_{n+1}) + y_{n+1}(y_n - y_{n+1})]}{(x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n) \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 + h^2}} \right).$$

Il sommatorio comprende qui successivamente tutti i valori interni di n da 1 fino m , confondendosi inoltre $m + 1$ con 1, e i simboli *arc. tang.* debbonsi sempre intendere compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Circa i doppi segni è da notare che i medesimi si riferiscono fra loro e, per quanto spetta finalmente alla scelta del segno, si rifletta, che se non ambedue almeno una delle quantità sotto i simboli *arc. tang.* dev'essere positiva: la scelta del segno è quindi assicurata quando si rende positivo quello dei due *arc. tang.* il quale possiede il valore numerico maggiore. L'unità di attrazione di questa formula è la forza con cui si attraggono due punti materiali ciascuno della massa $= 1$ e posti nella distanza $= 1$.

Mediante la precedente equazione, che esprime il differen-

ziale della attrazione del monte sul punto O, si possono in ogni caso della pratica trovare le attrazioni di tanti strati (come RS) quanti occorrono per una determinata approssimazione della forza in proposito, valendosi del resto del metodo delle quadrature comunemente adottate per tale fine. Per ciò che spetta al tracciamento degli strati, questo si potrebbe eseguire con una livellazione barometrica, servendosi di poi della nota tavola esprimente la differenza fra i due orizzonti, uno apparente l'altro vero.

3.° Col metodo ora esposto si deducono le attrazioni del monte B sopra i punti O e O' e queste due forze, generalmente parlando, non saranno fra loro uguali, dipendendo il loro rapporto dalla forma del monte. Per delucidare questo punto con un caso pratico, si rifletta che Carlini nelle sue ricerche sull'attrazione del Monte Cenisio considerò questo monte come una calotta sferica di base orizzontale, assegnando al raggio della base il valore di miglia italiane $5\frac{1}{2}$ ed all'altezza un miglio. Ora le attrazioni di una calotta sferica, la quale possiede il raggio della base $= r$, l'altezza h e la densità γ , sopra due punti posto il primo nel centro della base ed il secondo al suo vertice vengono espresse dalle formule (1):

$$P = 2 \pi h \gamma \frac{3 r^4 + h^4 - 4 r^2 h^2}{3 (r^2 - h^2)^2}$$

$$P' = 2 \pi h \gamma \left(1 - \frac{4}{3} \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right).$$

L'unità di forza è qui la medesima di quella stabilita di sopra (2). Prendendo per unità di lunghezza l'ettometro si ha $h = 18,52$ ed essendo di più $r = 5,5 h$, si ottengono mediante le precedenti formule i seguenti valori delle attrazioni:

$$P = 94,33 \gamma \qquad P' = 88,61 \gamma.$$

(1) Plana, *Sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices*. Estratto dalle Memorie dell'Accademia di Torino, 1846, pag. 25 e 26.

Da questi risultati apparisce, che la differenza delle due forze in proposito è tale da non poterla trascurare in pratica.

4.^o Venendo a determinare le attrazioni delle masse C, C' poste al di sotto della MN, sopra le due stazioni O e O' è da notare, che queste si trovano in un modo del tutto simile a quello esposto antecedentemente per la massa B. L'unica differenza che passa fra i due casi consiste in ciò, che nel presente avrà ciascun poligono nel suo interno uno spazio vuoto corrispondente alla intersezione del suo piano coll'ellissoide terrestre. Parlando in astratto tale vuoto dovrebbe considerarsi come un ellisse, ma ognuno vedrà, che nella attuale ricerca basterà di riguardare la terra come sferica ed allora si riduce l'indicato ellisse in un circolo e l'azione di questo si deve togliere da quella del poligono espressa dalla formula del § 2. Essendo r il raggio del circolo e h la distanza del suo piano dal punto attratto, l'indicata attrazione del circolo sarà espressa da :

$$2\pi\gamma\left(1 - \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right)dh.$$

I calcoli numerici in proposito si possono poi ancora alquanto abbreviare. Essendo infatti R" S" l'ultimo degli strati da considerarsi, si calcolino prima le azioni dei rispettivi strati senza tenere conto dei circoli, che si debbono togliere. Fatto ciò si determina il valore approssimato della massa R" OS" del tutto conforme a quanto fu esposto in occasione della massa B; alla fine poi si toglie l'azione complessiva degli strati circolari, riflettendo che il loro insieme forma una calotta sferica, la di cui attrazione viene espressa dalla seconda formula del § 3.

Circa il numero degli strati R' S', R" S" ec. che si debbono guidare parallelamente alla MN è da notare, che questo dipende dalle condizioni particolari del caso di cui si tratta, come anche dal grado di esattezza che si vuole raggiungere. Ragionando sugli strati inferiori al piano MN si può ancora osservare, che quello contiguo a questo piano non può esercitare

alcuna azione sul punto O; considerando però successivamente strati in maggior profondità sotto questo punto, la loro azione si farà sentire e diverrà per una certa profondità un massimo, dopo il quale l'azione medesima andrà diminuendo.

La precedente esposizione suppose che lo strato considerato sia omogeneo; quando ciò non avesse luogo si dovrebbe il medesimo spezzare in due o più parti, considerando separatamente le loro azioni, e per tal fine sarebbe ancora applicabile la formula del § 2.

(*Continua*)