ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 1225—1226.

Construction einer compendiösen Tafel der reciproken Werthe zur Erleichterung sehr exacter Rechnungen, von Herrn Dr. Lehmann.

Es ist in der Astronomie und Geodäsie und in anderen physischen Anwendungen der Mathematik ein nicht gerade seltener Fall, dass man ein Rechnungsergebniss in mehr Decimalen gebraucht, als es durch siebenziffrige logarithmische oder trigonometrische Tafeln erlangt werden kann, und dass dabei über die obere und untere Grenze kein Zweifel übrig bleiben darf. Diese Forderung würde auch durch die correctesten zehnziffrigen Logarithmen-Tafeln nur unvollkommen und auf einem grossen Umwege erfüllt werden, und es scheint daher, als wäre man allein auf die in extenso auszuführenden wirklichen Multiplicationen, Divisionen und Wurzel-Ausziehungen angewiesen. In der That möchte für sehr exacte Multiplicationen kein anderes Erleichterungsmittel vorhanden sein, als das unter dem Namen der abgekürzten Multiplication bekannte Verfahren, über welches wir, so wie über Additionen und Subtractionen, einige nöthige Bemerkungen vorausschicken wollen, die leichteste und unzweideutigste Bestimmung der oberen und unteren Grenze des jedesmaligen Endresultats betreffend.

Bei der Addition zweier Posten addirt man, wenn man daran gewöhnt ist, am bequemsten von der Linken zur Rechten, und addirt von den Ziffern an, wo die oberen und unteren Grenzen auseinandergehen, die unteren Grenzen unter sich und die oberen Grenzen unter sich.

Bei der Subtraction eines kleineren Postens von einem grösseren subtrahirt man ebenfalls von der Linken zur Rechten, und subtrahirt von den Ziffern an, wo die oberen und unteren Grenzen auseinandergehen, die obere Grenze des Subtrahendus von der unteren Grenze des Minuendus und die untere Grenze des Subtrahendus von der oberen Grenze des Minuendus.

Sind mehrere Posten zusammen zu addiren und von einander zu subtrahiren, so schreibt man die subtractiven Posten (wenn ihre Summe nach Ausweis der Ziffern der linken End-Columnne kleiner ist, als die Summe der additiven Posten) unter die additiven Posten, beide Systeme durch einen Horizontal-Strich von einander geschieden, und addirt und subtrahirt dann von der Rechten zur Linken (und zwar, wenn man daran gewöhnt ist, am bequemsten immer zwei

oder gar drei Columnnen auf einmal), also zuerst diejenigen Ziffern, bei denen die oberen und unteren Grenzen auseinander gehen; und zwar addirt man die oberen Grenzen der subtractiven Posten von unten nach oben, und vermindert die dadurch erhaltene Summe nach und nach um die unteren Grenzen der einzelnen additiven Posten, bis die unteren Grenzen der additiven Posten überwiegend werden und weiterhin addirt werden müssen (es sei denn, dass die Summe der oberen Grenzen der subtractiven Posten überwiegend bleibt, in welchem Falle dann eine oder einige Einheiten von der zunächst links folgenden Columnne der additiven Posten geborgt werden müssen); hat man auf diese Art die untere Grenze des Resultats gefunden, so addirt man dazu, um die obere Grenze zu erlangen, die Summe der Abstände der oberen und unteren Grenze aller additiven und subtractiven Posten, nachdem man jede untere Grenze von der zugehörigen oberen Grenze subtrahirt hat.

Sollen zwei abgekürzte Decimalbrüche, deren jeder zwischen einer oberen und unteren Grenze eingeschlossen ist, mit einander multiplicirt werden, so multiplicirt man den Multiplicandus von der Rechten zur Linken mit den zwei höchsten Ziffern des Multipliers, und zwar anfangs (wo die obere und untere Grenze des Multiplicandus auseinander gehen) sowohl die untere als die obere Grenze des Multiplicandus mit den zwei höchsten Ziffern des Multipliers; dann multiplicirt man den Multiplicandus mit den zwei folgenden Ziffern des Multipliers (wobei man aber rechts zwei Ziffern des Multiplicandus, die vorher beachtet wurden, unbeachtet lassen kann, wofür man nur sich der oberen und unteren Grenze dessen, was um dieser unbeachteten Ziffern willen zum Product addirt werden muss, vergewissert), und fährt so, berücksichtigend, dass die letzten beibehaltenen Ziffern aller Partial-Producte von einerlei Ordnung sein und senkrecht unter einander geschrieben werden müssen, nach und nach weiter fort (wobei man sich, so oft ein Ziffer-Paar oder eine Ziffer-Trias des Multipliers ein genaues Vielfaches oder ein genauer aliquoter Theil eines früher angewandten Ziffer-Paares ist, des Vortheils bedienen kann, das neue Partial-Product aus dem früheren

durch Multiplication oder Division mit derjenigen ganzen Zahl zu bestimmen, welche anzeigt, das Wievielfache oder der wievielte aliquote Theil), bis man an die Stelle des Multipliers kommt, wo die obere und untere Grenze aus einandergehen, wo dann die untere Grenze des übrig gebliebenen Theils des Multipliers mit der unteren Grenze des auf wenige Ziffern zusammengeschrumpften Multiplicandus und die obere Grenze des übrig gebliebenen Theils des Multipliers mit der oberen Grenze des Multiplicandus multiplicirt werden muss.

Aber sobald es an Divisionen oder Wurzel-Ausziehungen aus sehr vielziffrigen Zahlen geht, wird die exacte Rechnung ohne Hülfe von Tafeln beschwerlich, und kann nur dadurch erleichtert werden, dass man das Resultat erst durch siebenziffrige Logarithmen-Tafeln ermittelt und dieses dann als ersten Näherungswerth betrachtet, zu welchem noch einige Decimal-Stellen mehr durch exacte Rechnung zu bestimmen sind. Diese exacte Rechnung nun kann sehr erleichtert werden und namentlich alle Divisionen und Wurzel-Ausziehungen umgehen, wenn man eine compendiöse Tafel der reciproken Werthe zur Hand hat. Eine solche wollen wir jetzt construiren.

Wir bezeichnen das Argument derselben mit x , die Function mit $\frac{1}{x}$, neben welche wir dann, um die zweiten Differenzen auf eine so bequeme Art, wie in *Vega's* siebenziffrigen trigonometrischen Tafeln berücksichtigen zu können, noch die Function $\frac{d\frac{1}{x}}{dx}$, d. i. $-\frac{1}{x^2}$, stellen wollen. Die Tafel darf nicht mit $x = 0$ anfangen, weil dazu $\frac{1}{x} = \infty$ gehören und also die Interpolation am Anfang der Tafel verboten würde. Da aber die Stellung des Komma im Argument keinen Einfluss auf die Function hat, ausgenommen, dass das Komma in $\frac{1}{x}$ um ebenso viele Stellen, aber nach entgegengesetzter Richtung, fortrückt als in x , so ist es am bequemsten, nur ganze Zahlen zu Argumenten zu nehmen und diese von 10^n bis 10^{n+1} (wo n eine ganze positive Zahl bedeutet) fortschreiten zu lassen und zwar anfangs nach dem Intervall $\Delta x = 1$, dann ruckweise nach grösseren Intervallen

$$\Delta x = 2 \qquad \Delta x = 5$$

und zuletzt nach dem Intervall $\Delta x = 10$, — oder auch ruckweise nach den Intervallen

$$\Delta x = 2 \qquad \Delta x = 5 \qquad \Delta x = 20 \qquad \Delta x = 20,$$

oder

$$\Delta x = 5 \qquad \Delta x = 10 \qquad \Delta x = 20 \qquad \Delta x = 50.$$

Eine halbe Einheit der letzten in $\frac{1}{x}$ heizubehaltenden Deci-

male werde mit z , eine halbe Einheit der letzten in $\frac{d\frac{1}{x}}{dx}$ heizubehaltenden Decimale mit z' bezeichnet. Zu $x \pm p \Delta x$ gehört streng genommen die Function $\frac{1}{x \mp p \Delta x}$; statt dessen giebt die Interpolation der Tafel, wenn x ein wirklich in der Tafel angesetztes Argument bezeichnet und p positiv und nicht grösser als $\frac{1}{2}$ ist,

$$\frac{1}{x} \pm p \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} p \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x \mp \Delta x)^2} \right] \right) \Delta x,$$

und lässt also den Fehler

$$\frac{1}{x \mp p \Delta x} - \frac{1}{x} \mp p \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} p \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x \mp \Delta x)^2} \right] \right) \Delta x \\ = \left(\frac{p}{x} \right)^2 \mp \frac{(3-2p)x + (2-p)\Delta x}{2(x \mp \Delta x)^2(x \mp p \Delta x)} \Delta x^3$$

zurück, welcher sich noch um der Grössen z und z' willen absolut genommen um $z + p z' \Delta x$ vermehren kann. Der Theil $z + p z' \Delta x$ wächst (bei constanten x und Δx) von 0 an ohne Schwanken, während p von 0 bis $\frac{1}{2}$ wächst. Dasselbe lässt sich auch von dem absoluten Werthe des Theils $\left(\frac{p}{x} \right)^2 \mp \frac{(3-2p)x + (2-p)\Delta x}{2(x \mp \Delta x)^2(x \mp p \Delta x)} \Delta x^3$ beweisen; doch müssen wir vorher den kleinsten zulässigen Werth von x ermitteln.

Wollten wir $x = 10$, $\Delta x = 1$ und $p = \frac{1}{2}$ setzen, so wäre der absolute Werth des genannten Theils des Fehlers, wenn die unteren Zeichen gelten, $= \left(\frac{1}{20} \right)^2 \cdot \frac{(3-1) \cdot 10 + \frac{3}{2}}{2(10+1)^2(10+\frac{1}{2})}$

$$= \frac{0,05375}{2541}, \text{ also der Gesamtfehler } > \frac{0,05375}{2541} + z, \text{ also}$$

(da der grösste Fehler eines durch Interpolation einer siebenziffrigen Logarithmentafel gefundenen Logarithmus, von der Abwerfung der 8^{ten} Bruchstellen in der Tafel und von der Vernachlässigung der 2^{ten} Differenzen und von der gewohnten Abwerfung der 8^{ten} Bruchstelle nach geschehener Interpolation herrührend, nur eine äusserst unbedeutende Kleinigkeit mehr als 0,0000001 beträgt und wir dem entsprechend auch in unserer Tafel den Gesamtfehler nicht grösser, als 2 z dulden

dürfen) $z > \frac{0,05375}{2541}$, d. i., $> 0,00002\dots$, also (da die Form der Tafel erfordert $z =$ der Hälfte einer Potenz von $\frac{1}{10}$ mit ganzen Ezponenten zu setzen) z nicht kleiner als 0,00005; wir müssten uns also begnügen, $\frac{1}{10}$ in der Tafel bei der 4^{ten} Bruchstelle abzuberechnen und $= 0,0909$ zu setzen, ebenso auch $\frac{1}{100}$ u. s. w. bei der 4^{ten} Bruchstelle abzuberechnen. Eine solche Tafel, von $x = 10$ bis $x = 100$ fortschreitend, welche höchstens 91 Argumente enthalten würde, ist zu unbedeutend und leistet doch den im Quotienten auf 3

geltende Ziffern auszudehnenden höchst einfachen Divisionen der Zahl 1 durch gegebene Zahlen kaum einen merklichen Vortheil. Diese Bemerkung trifft in noch stärkerem Grade zu, wenn wir in die Tafel statt der Argumente $x =$

	10	11	12	...	100
nur $x =$	10	12	14	...	100

aufnehmen, oder wenn wir gar die Tafel, anstatt sie mit $x = 10$ anzufangen, mit $x = 1$ anfangen wollten. Setzen wir aber $x = 100$ oder grösser, so ist (da Δx höchstens $= 50$) x jedenfalls grösser, als Δx , also für jedes p , welches nicht grösser als $\frac{1}{2}$ ist, (weil für ein solches p auch $3-2p > 2-p$ ist) $(3-2p)x > (2-p)\Delta x$, also

$$\frac{6x^2 \mp 4x\Delta x - p(6x^2 + 3x \pm (3x-2)\Delta x - 4\Delta x^2) + p^2(2x \pm (6x-1)\Delta x - 3\Delta x^2)}{(x \mp p\Delta x)^2}$$

Der von p unabhängige Theil des Zählers dieses Bruches ist positiv; wenn wir aber den mit der ersten Potenz von p multiplicirten Theil durch $-p$ dividiren, so erhalten wir eine Grösse, welche mit Rücksicht auf das Zeichen nicht kleiner ist, als $6x^2 + 3x - (3x-2) \cdot 50 - 4 \cdot 50^2$. d. i., nicht kleiner, als $6x^2 - 147x - 9900$, also >

$$6 \cdot 100^2 - 147 \cdot 100 - 9900,$$

also gewiss positiv; der Coefficient von p^2 endlich ist, wenn die oberen Zeichen gelten, $= 2x + (6x - [3\Delta x + 1])\Delta x$, also positiv, und dagegen, wenn die unteren Zeichen gelten,

$$6x^2 + 4x\Delta x - \frac{1}{2}(6x^2 + 3x - (3x-2)\Delta x - 4\Delta x^2) - \frac{1}{4}(2(3\Delta x - 1)x - \Delta x + 3\Delta x^2),$$

d. i., nicht kleiner als

$$2x^2 + (4\Delta x - 1)x + \frac{5\Delta x - 3}{4}\Delta x,$$

also gewiss ebenfalls positiv. Der genannte Differential-Coefficient ist also überhaupt positiv. Und so ist bewiesen, was wir beweisen wollten, nämlich, dass der absolute Werth des von z und z' unabhängigen Theils des Fehlers von 0 an ohne Schwanken wächst, während p von 0 bis $\frac{1}{2}$ wächst. Das Maximum des Fehlers findet also bei $p = \frac{1}{2}$ statt, und ist =

$$\frac{4x \mp 3\Delta x}{8x^2(x \mp \Delta x)^2(2x \mp \Delta x)} \Delta x^3 + z + \frac{1}{2}z'\Delta x.$$

Es lässt sich leicht beweisen, dass es bei constanten $x, \Delta x, z, z'$ grösser ist, wenn man die oberen, als wenn man die

$$\frac{4x + 3\Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2(2x + \Delta x)} > \frac{4(x + \Delta x) - 3\Delta x}{(x + \Delta x)^2(x + \Delta x - \Delta x)^2(2(x + \Delta x) - \Delta x)}.$$

Aus allem diesem folgt, dass das absolute Maximum des Fehlers bei constantem Δx ohne Schwanken abnimmt, so lange x successive um Δx vermehrt wird.

Setzen wir $x = 100$ und $\Delta x = 1$, so darf $\frac{1}{x}$ in der

$$\left(\frac{p}{x}\right)^2 \cdot \frac{\mp (3-2p)x + (2-p)\Delta x}{2(x \mp \Delta x)^2(x \mp p\Delta x)} \Delta x^3$$

negativ oder positiv, je nachdem die oberen oder unteren Zeichen gelten. Folglich ist der absolute Werth des von z und z' unabhängigen Theils des Fehlers, mit $\frac{2x^2(x \mp \Delta x)^2}{\Delta x^3}$ multiplicirt, =

$$p^2 \cdot \frac{(3-2p)x \mp (2-p)\Delta x}{x \mp p\Delta x};$$

hiervon ist der nach p genommene Differential-Coefficient, durch p dividirt, =

mit Rücksicht auf das Zeichen nicht grösser, als $2x - (6x-1) - 3$, d. i., nicht grösser, als $-4x - 2$, also gewiss negativ. Der genannte Zähler ist also, wenn die oberen Zeichen gelten, mit Rücksicht auf das Zeichen grösser, als

$$6x^2 - 4x\Delta x - \frac{1}{2}(6x^2 + 3x + (3x-2)\Delta x - 4\Delta x^2),$$

d. i., grösser als

$$x(2x - \frac{1}{2}\Delta x) + x(x - \frac{3}{2}) + \Delta x + 2\Delta x^2,$$

also gewiss positiv; gelten aber die unteren Zeichen, so ist der genannte Zähler mit Rücksicht auf das Zeichen nicht kleiner als

unteren Zeichen nimmt; da nämlich $x > \Delta x$, so ist $16x^2 > 16\Delta x^2$, also um so mehr $28x^2 > 16\Delta x^2$, also (wenn man beiderseits mit $x\Delta x$ multiplicirt, dann $7x^3(x-2\Delta x) + x(x^3-8\Delta x^3) + (x^2-3\Delta x^2)\Delta x^2$ addirt, und dann durch $(x^2-\Delta x^2)^2(4x^2-\Delta x^2)$ dividirt)

$$\frac{4x-3\Delta x}{(x-\Delta x)^2(2x-\Delta x)} > \frac{4x+3\Delta x}{(x+\Delta x)^2(2x+\Delta x)}.$$

Dagegen ist das absolute Maximum des Fehlers grösser, wenn die unteren Zeichen gelten, als wenn die oberen Zeichen gelten und zugleich x um Δx grösser angenommen wird, als bei den unteren Zeichen; denn $4x + 3\Delta x$ ist $> 4(x+\Delta x) - 3\Delta x$, $x^2(x+\Delta x)^2$ aber $= (x+\Delta x)^2(x+\Delta x-\Delta x)^2$, und $2x + \Delta x = 2(x+\Delta x) - \Delta x$, also

$$\frac{4x + 3\Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2(2x + \Delta x)} > \frac{4(x + \Delta x) - 3\Delta x}{(x + \Delta x)^2(x + \Delta x - \Delta x)^2(2(x + \Delta x) - \Delta x)}.$$

Tafel nicht genauer angesetzt werden als so, dass

$$z = \frac{4 \cdot 100 + 3}{8 \cdot 100^2 \cdot (100 + 1)^2 \cdot (2 \cdot 100 + 1)} = 0,0000000024 \dots$$

wird, weil sonst das absolute Maximum des Fehlers $> 2z$ würde. Setzt man aber

$x = 100 \quad \Delta x = 1 \quad z = 0,000000005,$
 so ist $\frac{1}{2} z' \Delta x = 0,000000005 - 0,0000000024... =$
 $0,0000000025... \text{ statthaft, was } z' = \frac{0,0000000025...}{\frac{1}{2} \Delta x} =$
 $0,000000005... \text{ giebt. Man würde also durch die An-}$
 nahmen

$x = 100 \quad \Delta x = 1 \quad z = 0,000000005 = z'$
 verbürgen können, dass das absolute Maximum des Fehlers kleiner als $2z$ würde; aber man bindet sich dadurch die Hände, weil man dadurch genöthigt wird, das Intervall $\Delta x = 1$ bis $x = 1000$ fortzuführen und zu dem Ende 899 Werthe von $\frac{1}{x}$ und ebenso viele von $\frac{d^{\frac{1}{x}}}{dx}$ zu berechnen;

$$\frac{4x+6}{8x^2(x+2)^2(2x+2)} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 0,000000005 \cdot 2 = 0,000000005,$$

der Gleichung

$$x^2 \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{8x+12} \right) = 444444444,444...$$

gleichgeltend. Die linke Seite dieser Gleichung ist positiv (weil $11 > 1$ und $4 < 8x+12$ und daher $\frac{1}{4} > \frac{1}{8x+12}$ ist) und desto grösser, je grösser x . Da nun x sehr gross sein muss, um dieser Gleichung Genüge zu thun, so ist $x^2 \cdot x^2$ verhältnissmässig nur wenig kleiner als $444444444,444...$, also x nur wenig kleiner als 145,.... Setzen wir

$x = 144 \quad \Delta x = 2 \quad z = 0,000000005 \quad z' = 0,0000000005,$
 so wird z vom absoluten Maximum des Fehlers, wenn die unteren Zeichen gelten, um

$$\frac{4 \cdot 144 + 3 \cdot 2}{8 \cdot 144^2 \cdot (144 + 2)^2 \cdot (2 \cdot 144 + 2)} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 0,0000000005 \cdot 2,$$

d. i., um $0,00000000504...$, also noch um eine Kleinigkeit mehr als z übertroffen. Setzt man aber $x = 146$, statt 144, so verwandelt sich $0,00000000504...$ in $0,00000000479...$, folglich können wir den Ruck von $\Delta x = 1$ zu $\Delta x = 2$ noch nicht bei $x = 144$, wohl aber bei $x = 146$ anbringen.

Setzen wir

$$\Delta x = 5 \quad z = 0,000000005 \quad z' = 0,0000000005,$$

so finden wir dasjenige x , für welches das absolute Maximum des Fehlers $= 2z$ ist, sehr nahe dadurch, dass wir (in den Factoren des Zählers und Nenners des von z und z' unabhängigen Theils der Formel für das absolute Maximum des Fehlers) Δx gegen x verschwinden lassen, wodurch die Bedingungsgleichung wird:

$$\frac{\Delta x^3}{4x^4} + \frac{1}{2} z' \Delta x = z,$$

numerisch also:

denn bei den Annahmen

$$\Delta x = 2 \quad z = z'$$

würde $z + \frac{1}{2} z' \Delta x = z + z'$ das absolute Maximum ($= 2z$) des statthaften Fehlers schon erschöpfen und nichts für den von z und z' unabhängigen Theil übrig lassen. Wir müssen also, wenn wir (von irgend einem x an) $\Delta x = 2$ setzen wollen, nothwendig $z' < z$, also höchstens $= \frac{1}{10} z$ setzen. Setzen wir

$$\Delta x = 2 \quad z = 0,000000005 \quad z' = 0,0000000005,$$

so ist die Bedingungsgleichung für dasjenige x , bei welchem das absolute Maximum des Fehlers $= 2z$ ist, nämlich die Gleichung

$$\frac{125}{4x^4} + 0,00000000125 = 0,000000005,$$

was $x = 302,...$ giebt. Setzen wir

$x = 300, \quad \Delta x = 5, \quad z = 0,000000005 \quad z' = 0,0000000005,$
 so verwandelt sich die vorher gefundene Zahl $0,00000000479...$ in $0,00000000499...$; wollten wir aber $x = 290$ statt 300 setzen, so würden wir $0,00000000553...$ erhalten. Folglich können wir den Ruck von $\Delta x = 2$ zu $\Delta x = 5$ noch nicht bei $x = 290$, wohl aber bei $x = 300$ anbringen.

Setzen wir

$$\Delta x = 10 \quad z = 0,000000005 \quad z' = 0,0000000005,$$

so wird die genäherte Bedingungsgleichung

$$\frac{1000}{4x^4} + 0,0000000025 = 0,000000005,$$

und giebt $x = 562,...$ Setzen wir

$$x = 560 \quad \Delta x = 10 \quad z = 0,000000005 \quad z' = 0,0000000005,$$

so verwandelt sich die zuletzt herausgebrachte Zahl $0,00000000553...$ in $0,00000000496...$; wollten wir aber $x = 550$ statt 560 setzen, so würden wir $0,00000000514...$ erhalten. Folglich können wir den Ruck von $\Delta x = 5$ zu $\Delta x = 10$ noch nicht bei $x = 550$, wohl aber bei $x = 560$ anbringen. Der Ruck von $\Delta x = 10$ zu $\Delta x = 20$ darf nicht eintreten, weil sonst $z + \frac{1}{2} z' \Delta x = 2z$ wäre und daher (wenn $p = \frac{1}{2}$) für den von z und z' unabhängigen Theil des Fehlers nichts übrig bliebe.

Die Tafel wird also im Ganzen nur 219 Intervalle enthalten, nämlich

$$46 \text{ mit } \Delta x = 1,$$

$$77 \text{ mit } \Delta x = 2,$$

$$52 \text{ mit } \Delta x = 5,$$

$$44 \text{ mit } \Delta x = 10.$$

Sie hat also einen weit geringeren Umfang als die gebräuchlichen fünfziffrigen Logarithmen-Tafeln, und leistet doch mehr, indem durch ihre Interpolation $\frac{1}{x}$ überall mit Sicherheit in 6 geltenden Ziffern gefunden wird (d. h. so, dass das absolute Maximum des Fehlers gleich einer Einheit der 6^{ten} geltenden Ziffer ist). Wollten wir 7 geltende Ziffern sicher erhalten, so müssten wir eine von $x = 1000$ bis $x = 10000$ fortschreitende Tafel berechnen, in welcher die Anzahl der Intervalle hoch in die Tausende gehen würde. Indessen werden wir in einer folgenden Abhandlung zeigen, dass wir leicht jeden umgekehrten Werth einer gegebenen Zahl, ja jeden Quotienten zweier gegebener Zahlen mit Sicherheit nicht nur in 7, sondern in 13 geltenden Ziffern finden können, wenn wir eine siebenziffrige Logarithmen-Tafel und unsere Tafel der sechsziffrigen umgekehrten Werthe zusammen benutzen, in 19 geltenden Ziffern aber, wenn wir den aus unserer Tafel gefundenen umgekehrten Werth zweimal benutzen u. s. w.

Die Berechnung der Tafel der in 8 Bruchstellen anzusetzenden Werthe von

$$\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \frac{1}{103}, \dots, \frac{1}{990}$$

und der in 9 Bruchstellen anzusetzenden Werthe von

$$(\frac{1}{101})^2, (\frac{1}{102})^2, (\frac{1}{103})^2, \dots, (\frac{1}{990})^2$$

durch wirkliche Division wird ausser den Differenzen-Controllen noch controllirt durch die Vergleichung mit den mittelst siebenziffriger Logarithmen-Tafeln berechneten Werthen von

$\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \frac{1}{103}, \dots, \frac{1}{990}, (\frac{1}{101})^2, (\frac{1}{102})^2, (\frac{1}{103})^2, \dots, (\frac{1}{150})^2$ und mit den mittelst fünfziffriger Logarithmen-Tafeln berechneten Werthen von

$$(\frac{1}{152})^2, (\frac{1}{154})^2, (\frac{1}{156})^2, \dots, (\frac{1}{990})^2.$$

Jede Abweichung um Eine Einheit der letzten in unserer Tafel beibehaltenen Decimale erregte den Verdacht eines Fehlers, der dann in den allermeisten Fällen entdeckt wurde; eine Abweichung um 2 oder mehr Einheiten der letzten Decimale gab die richtige Rechnung nie. Die Differenzen-Controlle hätte gestimmt, auch wenn das Intervall Δx durchgängig $= 10$ gewesen wäre. Das absolute Maximum der 4^{ten} Differenzen der zu $x =$

$$100 \quad 101 \quad 102 \quad \dots \quad 146$$

gehörigen $\frac{1}{x}$ zeigte sich $= 0,00000005$, das absolute Maximum der 4^{ten} Differenzen der zu $x =$

$$100 \quad 102 \quad 104 \quad \dots \quad 300$$

gehörigen $\frac{1}{x}$ aber $= 0,00000006$, das absolute Maximum der 4^{ten} Differenzen der zu $x =$

$$300 \quad 305 \quad 310 \quad \dots \quad 420$$

gehörigen $\frac{1}{x} = 0,00000005$, das absolute Maximum der 3^{ten} Differenzen der zu $x =$

$$410 \quad 415 \quad 420 \quad \dots \quad 560$$

gehörigen $\frac{1}{x} = 0,00000003$, das absolute Maximum der 7^{ten} Differenzen der zu $x =$

$$100 \quad 110 \quad 120 \quad \dots \quad 180$$

gehörigen $\frac{1}{x} = 0,00000039$, das absolute Maximum der 6^{ten} Differenzen der zu $x =$

$$130 \quad 140 \quad 150 \quad \dots \quad 240$$

gehörigen $\frac{1}{x} = 0,00000028$, das absolute Maximum der 5^{ten} Differenzen der zu $x =$

$$200 \quad 210 \quad 220 \quad \dots \quad 360$$

gehörigen $\frac{1}{x} = 0,00000010$, das absolute Maximum der 4^{ten} Differenzen der zu $x =$

$$330 \quad 340 \quad 350 \quad \dots \quad 630$$

gehörigen $\frac{1}{x} = 0,00000008$, das absolute Maximum der 3^{ten} Differenzen der zu $x =$

$$610 \quad 620 \quad 630 \quad \dots \quad 1000$$

gehörigen $\frac{1}{x} = 0,00000004$, das absolute Maximum der 3^{ten} Differenzen der zu $x =$

$$100 \quad 101 \quad 102 \quad \dots \quad 146$$

gehörigen $\frac{1}{x^2} = 0,000000003$, das absolute Maximum der 4^{ten} Differenzen der zu $x =$

$$100 \quad 102 \quad 104 \quad \dots \quad 154$$

gehörigen $\frac{1}{x^2} = 0,000000005$, das absolute Maximum der 3^{ten} Differenzen der zu $x =$

$$150 \quad 152 \quad 154 \quad \dots \quad 300$$

gehörigen $\frac{1}{x^2} = 0,000000004$, das absolute Maximum der 3^{ten} Differenzen der zu $x =$

$$300 \quad 305 \quad 310 \quad \dots \quad 560$$

gehörigen $\frac{1}{x^2} = 0,000000003$, die 7te Differenz der zu $x =$
 100 110 120 ... 170

gehörigen $\frac{1}{x^2} = -0,000000004$, das absolute Maximum der
 6ten Differenzen der zu $x =$
 120 130 140 ... 190

gehörigen $\frac{1}{x^2} = 0,000000029$, das absolute Maximum der
 5ten Differenzen der zu $x =$
 150 160 170 ... 260

gehörigen $\frac{1}{x^2} = 0,000000014$, das absolute Maximum der
 4ten Differenzen der zu $x =$
 220 230 240 ... 400

gehörigen $\frac{1}{x^2} = 0,000000006$, das absolute Maximum der
 3ten Differenzen der zu $x =$
 380 390 400 ... 770

gehörigen $\frac{1}{x^2} = 0,000000003$, und das absolute Maximum
 der 2ten Differenzen der zu $x =$
 760 770 780 ... 1000

gehörigen $\frac{1}{x^2} = 0,000000002$. Eine noch unzweideutigere
 Controlle lässt sich aus der Gleichung

$$\left(\frac{1}{(x + \frac{1}{2}\Delta x)^2} + \frac{1}{(x - \frac{1}{2}\Delta x)^2} \right) \cdot \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{1}{x - \frac{1}{2}\Delta x} - \frac{1}{x + \frac{1}{2}\Delta x} \right) = \frac{\Delta x^3}{2(x^2 - \frac{1}{4}\Delta x^2)^2}$$

ableiten; verstehen wir nämlich unter $x - \frac{1}{2}\Delta x$ und $x + \frac{1}{2}\Delta x$
 zwei unmittelbar auf einander folgende Argumente der Tafel,
 so sind $\frac{1}{x - \frac{1}{2}\Delta x}$ und $\frac{1}{x + \frac{1}{2}\Delta x}$ die neben diesen Argumen-
 ten befindlichen Functionen, $-\frac{1}{(x - \frac{1}{2}\Delta x)^2}$ und $-\frac{1}{(x + \frac{1}{2}\Delta x)^2}$

$$\begin{aligned} -\frac{20+1}{2 \cdot 10^9} + \frac{1}{2(100,5^2 - \frac{1}{4})^2} &= -0,0000000055.. \text{ und } +\frac{20+1}{2 \cdot 10^9} + \frac{1}{2(145,5^2 - \frac{1}{4})^2} = +0,0000000116..., \\ -\frac{20+2}{2 \cdot 10^9} + \frac{2^3}{2(147^2 - 1)^2} &= -0,0000000024.. \text{ und } +\frac{20+2}{2 \cdot 10^9} + \frac{1}{2(299^2 - 1)^2} = +0,0000000115..., \\ -\frac{20+5}{2 \cdot 10^9} + \frac{5^3}{2(302,5^2 - \frac{25}{4})^2} &= -0,0000000058.. \text{ und } +\frac{20+5}{2 \cdot 10^9} + \frac{1}{2(557,5^2 - \frac{25}{4})^2} = +0,0000000131..., \\ -\frac{20+10}{2 \cdot 10^9} + \frac{10^3}{2(565^2 - \frac{100}{4})^2} &= -0,0000000100.. \text{ und } +\frac{20+10}{2 \cdot 10^9} + \frac{1}{2(995^2 - \frac{100}{4})^2} = +0,0000000155... \end{aligned}$$

bleibt. Diese Grenzen werden nur durch folgende aus der Tafel abgeleitete Werthe von

$$\left(\frac{1}{(x + \frac{1}{2}\Delta x)^2} + \frac{1}{(x - \frac{1}{2}\Delta x)^2} \right) \cdot \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{1}{x - \frac{1}{2}\Delta x} - \frac{1}{x + \frac{1}{2}\Delta x} \right) \text{ überschritten:}$$

die neben diesen Functionen befindlichen Differential-Coeffi-
 cienten, und $-\left(\frac{1}{(x + \frac{1}{2}\Delta x)^2} + \frac{1}{(x - \frac{1}{2}\Delta x)^2} \right) \cdot \frac{1}{2}$ das arith-
 metische Mittel zwischen diesen beiden Differential-Coeffi-
 cienten. Multiplicirt man dies absolut genommene arith-
 metische Mittel mit Δx , und subtrahirt man von dem Product
 die absolut genommene Differenz der beiden Functionen, so
 ist der Rest zufolge obiger Gleichung positiv; er kann aber
 wegen der in den Functionen abgeworfenen 9ten Bruchstellen
 und wegen der in den Differential-Coefficienten abgeworfenen
 10ten Bruchstellen negativ werden; der Fehler von
 $\left(\frac{1}{(x + \frac{1}{2}\Delta x)^2} + \frac{1}{(x - \frac{1}{2}\Delta x)^2} \right) \cdot \frac{\Delta x}{2}$ ist innerhalb der Grenzen

$\pm 0,0000000005 \Delta x$ und der Fehler von $\frac{1}{x - \frac{1}{2}\Delta x} - \frac{1}{x + \frac{1}{2}\Delta x}$
 innerhalb der Grenzen $\pm 0,000000001$ und folglich der Fehler
 der linken Seite obiger Gleichung innerhalb der Grenzen
 $\pm \frac{20 + \Delta x}{2 \cdot 10^9}$ eingeschlossen. Hieraus folgt, dass, wenn man
 in diese linke Seite die in der Tafel angesetzten Werthe von
 $\frac{1}{(x + \frac{1}{2}\Delta x)^2}$, $\frac{1}{(x - \frac{1}{2}\Delta x)^2}$, $\frac{1}{x - \frac{1}{2}\Delta x}$, $\frac{1}{x + \frac{1}{2}\Delta x}$ setzt,
 diese linke Seite innerhalb der Grenzen
 $-\frac{20 + \Delta x}{2 \cdot 10^9} + \frac{\Delta x^2}{2(x^2 - \frac{1}{4}\Delta x^2)^2}$ und $+\frac{20 + \Delta x}{2 \cdot 10^9} + \frac{\Delta x^2}{2(x^2 - \frac{1}{4}\Delta x^2)^2}$
 eingeschlossen sein muss. Da nun für den mit $\Delta x = 1$
 behafteten Theil der Tafel x nicht $< 100,5$ und nicht $> 145,5$,
 für den mit $\Delta x = 2$ behafteten Theil aber x nicht < 147
 und nicht > 299 , für den mit $\Delta x = 5$ behafteten Theil x
 nicht $< 302,5$ und nicht $> 557,5$, und für den mit $\Delta x = 10$
 behafteten Theil x nicht < 565 und nicht > 995 ist, so
 erregt kein Werth von

$\left(\frac{1}{(x + \frac{1}{2}\Delta x)^2} + \frac{1}{(x - \frac{1}{2}\Delta x)^2} \right) \cdot \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{1}{x - \frac{1}{2}\Delta x} - \frac{1}{x + \frac{1}{2}\Delta x} \right)$,
 den man bei der durch alle 219 Intervalle fortgeführten
 Prüfung der Tafel erhält, Anstoss, so lange er resp. inner-
 halb der Grenzen

x	
138,5	-0,0000000065
143,5	-0,0000000065
183	-0,0000000030
203	-0,0000000040
227	-0,0000000040
231	-0,0000000070
241	-0,0000000040
251	-0,0000000030
259	-0,0000000040
267	-0,0000000040
275	-0,0000000030
277	-0,0000000040
285	-0,0000000060
293	-0,0000000030
297	-0,0000000060
332,5	+0,0000000150

Aber es ist erlaubt, bei $x = 138,5$ bis $x = 145,5$ statt

der Grenze $-\frac{20+1}{2 \cdot 10^9} + \frac{1}{2(100,5^2 - \frac{1}{4})^2}$ die Grenze

$-\frac{20+1}{2 \cdot 10^9} + \frac{1}{2(138,5^2 - \frac{1}{4})^2} = -0,0000000091\dots$, bei

$x = 183$ bis 299 statt der Grenze $-\frac{20+2}{2 \cdot 10^9} + \frac{2^3}{2(147^2 - 1)^2}$

die Grenze $\frac{20+2}{2 \cdot 10^9} + \frac{2^3}{2(183^2 - 1)^2} = -0,0000000072\dots$,

und bei $x = 302,5$ bis $332,5$ statt der Grenze $+\frac{20+5}{2 \cdot 10^9}$

$+\frac{5^3}{2(557,5^2 - \frac{25}{4})^2}$ die Grenze $+\frac{20+5}{2 \cdot 10^9} + \frac{5^3}{2(332,5^2 - \frac{25}{4})^2}$

$= +0,0000000176\dots$ zu setzen, und so haben wir durch-

gehends genügende Controllen und, da die zu allen in der
Tafel wirklich anzusetzenden Argumenten x gehörigen

$\frac{4x \mp 3 \Delta x}{8x^2(x \mp \Delta x)^2(2x \mp \Delta x)} + z + \frac{1}{2} z' \Delta x$ unter $2z$ blei-

ben, einen völlig strengen Beweis der Ausreichendheit folgender

Tafel der reciproken Werthe.

x	$\frac{1}{x}$	$\frac{d^1}{dx}$	$10^9 \Delta \frac{d^1}{dx}$
100	0,01000000	-0,000100000	+1970
101	0,00990099	-0,000098030	+1913
102	0,00980392	-0,000096117	+1857
103	0,00970874	-0,000094260	+1804
104	0,00961538	-0,000092456	+1753
105	0,00952381	-0,000090703	+1703
106	0,00943396	-0,000089000	+1656
107	0,00934579	-0,000087344	+1610
108	0,00925926	-0,000085734	+1566
109	0,00917431	-0,000084168	+1523
110	0,00909091	-0,000082645	+1483
111	0,00900901	-0,000081162	+1443
112	0,00892857	-0,000079719	

x	$\frac{1}{x}$	$\frac{d^1}{dx}$	$10^9 \Delta \frac{d^1}{dx}$
112	0,00892857	-0,000079719	+1404
113	0,00884956	-0,000078315	+1368
114	0,00877193	-0,000076947	+1333
115	0,00869565	-0,000075614	+1298
116	0,00862069	-0,000074316	+1265
117	0,00854701	-0,000073051	+1233
118	0,00847458	-0,000071818	+1202
119	0,00840336	-0,000070616	+1172
120	0,00833333	-0,000069444	+1143
121	0,00826446	-0,000068301	+1115
122	0,00819672	-0,000067186	+1088
123	0,00813008	-0,000066098	+1062
124	0,00806452	-0,000065036	+1036
125	0,00800000	-0,000064000	+1012
126	0,00793651	-0,000062988	+988
127	0,00787402	-0,000062000	+965
128	0,00781250	-0,000061035	+942
129	0,00775194	-0,000060093	+921
130	0,00769231	-0,000059172	+900
131	0,00763359	-0,000058272	+880
132	0,00757576	-0,000057392	+860
133	0,00751880	-0,000056532	+840
134	0,00746269	-0,000055692	+822
135	0,00740741	-0,000054870	+804
136	0,00735294	-0,000054066	+787
137	0,00729927	-0,000053279	+769
138	0,00724638	-0,000052510	+753
139	0,00719424	-0,000051757	+737
140	0,00714286	-0,000051020	+721
141	0,00709220	-0,000050299	+706
142	0,00704225	-0,000049593	+691
143	0,00699301	-0,000048902	+677
144	0,00694444	-0,000048225	+663
145	0,00689655	-0,000047562	+649
146	0,00684932	-0,000046913	+1259
148	0,00675676	-0,000045654	+1210
150	0,00666667	-0,000044444	+1161
152	0,00657895	-0,000043283	+1117
154	0,00649351	-0,000042166	+1075
156	0,00641026	-0,000041091	+1033
158	0,00632911	-0,000040058	+995
160	0,00625000	-0,000039063	+959
162	0,00617284	-0,000038104	+924
164	0,00609756	-0,000037180	+890
166	0,00602410	-0,000036290	+859
168	0,00595238	-0,000035431	+829
170	0,00588235	-0,000034602	+800
172	0,00581395	-0,000033802	+773
174	0,00574713	-0,000033029	+746
176	0,00568182	-0,000032283	+722
178	0,00561798	-0,000031561	+697
180	0,00555556	-0,000030864	+674
182	0,00549451	-0,000030190	+653
184	0,00543478	-0,000029537	+632
186	0,00537634	-0,000028905	+612
188	0,00531915	-0,000028293	+592
190	0,00526316	-0,000027701	

x	$\frac{1}{x}$	$\frac{d^1}{dx}$	$10^9 \Delta \frac{d^1}{dx}$
190	0,00326316	-0,000027701	+374
192	0,00320833	-0,000027127	+357
194	0,00315464	-0,000026570	+339
196	0,00310204	-0,000026031	+323
198	0,00305051	-0,000025508	+308
200	0,00300000	-0,000025000	+493
202	0,00295050	-0,000024507	+478
204	0,00290196	-0,000024029	+464
206	0,00285437	-0,000023565	+451
208	0,00280769	-0,000023114	+438
210	0,00276190	-0,000022676	+426
212	0,00271698	-0,000022250	+414
214	0,00267290	-0,000021836	+403
216	0,00262963	-0,000021433	+391
218	0,00258716	-0,000021042	+381
220	0,00254545	-0,000020661	+370
222	0,00250450	-0,000020291	+361
224	0,00246429	-0,000019930	+351
226	0,00242478	-0,000019579	+342
228	0,00238596	-0,000019237	+333
230	0,00234783	-0,000018904	+325
232	0,00231034	-0,000018579	+316
234	0,00227350	-0,000018263	+308
236	0,00223729	-0,000017955	+301
238	0,00220168	-0,000017654	+293
240	0,00216667	-0,000017361	+286
242	0,00213223	-0,000017075	+278
244	0,00209836	-0,000016797	+272
246	0,00206504	-0,000016525	+266
248	0,00203226	-0,000016259	+259
250	0,00200000	-0,000016000	+253
252	0,00196825	-0,000015747	+247
254	0,00193701	-0,000015500	+241
256	0,00190625	-0,000015259	+236
258	0,00187597	-0,000015023	+230
260	0,00184615	-0,000014793	+225
262	0,00181679	-0,000014568	+220
264	0,00178788	-0,000014348	+215
266	0,00175940	-0,000014133	+210
268	0,00173134	-0,000013923	+206
270	0,00170370	-0,000013717	+201
272	0,00167647	-0,000013516	+196
274	0,00164964	-0,000013320	+193
276	0,00162319	-0,000013127	+188
278	0,00159712	-0,000012939	+184
280	0,00157143	-0,000012755	+180
282	0,00154610	-0,000012575	+177
284	0,00152113	-0,000012398	+172
286	0,00149650	-0,000012226	+170
288	0,00147222	-0,000012056	+165
290	0,00144828	-0,000011891	+163
292	0,00142466	-0,000011728	+159
294	0,00140136	-0,000011569	+156
296	0,00137838	-0,000011413	+152
298	0,00135570	-0,000011261	+150
300	0,00133333	-0,000011111	+361
305	0,00327869	-0,000010750	

x	$\frac{1}{x}$	$\frac{d^1}{dx}$	$10^9 \Delta \frac{d^1}{dx}$
305	0,00327869	-0,000010750	+344
310	0,00322581	-0,000010406	+328
315	0,00317460	-0,000010078	+312
320	0,00312500	-0,000009766	+299
325	0,00307692	-0,000009467	+284
330	0,00303030	-0,000009183	+272
335	0,00298508	-0,000008911	+260
340	0,00294118	-0,000008651	+249
345	0,00289855	-0,000008402	+239
350	0,00285714	-0,000008163	+228
355	0,00281690	-0,000007935	+219
360	0,00277778	-0,000007716	+210
365	0,00273973	-0,000007506	+201
370	0,00270270	-0,000007305	+194
375	0,00266667	-0,000007111	+186
380	0,00263158	-0,000006925	+178
385	0,00259746	-0,000006747	+172
390	0,00256410	-0,000006575	+166
395	0,00253165	-0,000006409	+159
400	0,00250000	-0,000006250	+153
405	0,00246914	-0,000006097	+148
410	0,00243902	-0,000005949	+143
415	0,00240963	-0,000005806	+137
420	0,00238095	-0,000005669	+133
425	0,00235294	-0,000005536	+128
430	0,00232558	-0,000005408	+123
435	0,00229885	-0,000005285	+120
440	0,00227273	-0,000005165	+115
445	0,00224719	-0,000005050	+112
450	0,00222222	-0,000004938	+108
455	0,00219780	-0,000004830	+104
460	0,00217391	-0,000004726	+101
465	0,00215054	-0,000004625	+98
470	0,00212766	-0,000004527	+95
475	0,00210526	-0,000004432	+92
480	0,00208333	-0,000004340	+89
485	0,00206186	-0,000004251	+86
490	0,00204082	-0,000004165	+84
495	0,00202020	-0,000004081	+81
500	0,00200000	-0,000004000	+79
505	0,00198020	-0,000003921	+76
510	0,00196078	-0,000003845	+75
515	0,00194175	-0,000003770	+72
520	0,00192308	-0,000003698	+70
525	0,00190476	-0,000003628	+68
530	0,00188679	-0,000003560	+66
535	0,00186916	-0,000003494	+65
540	0,00185185	-0,000003429	+62
545	0,00183486	-0,000003367	+61
550	0,00181815	-0,000003306	+60
555	0,00180180	-0,000003246	+57
560	0,00178571	-0,000003189	+111
570	0,00175439	-0,000003078	+105
580	0,00172414	-0,000002973	+100
590	0,00169492	-0,000002873	+95
600	0,00166667	-0,000002778	+91
610	0,00163934	-0,000002687	

x	$\frac{1}{x}$	$\frac{d^1}{dx}$	$10^9 \Delta' \frac{d^1}{dx}$
610	0,00163934	-0,000002687	+86
620	0,00161290	-0,000002601	+81
630	0,00158730	-0,000002520	+79
640	0,00156250	-0,000002441	+74
650	0,00153846	-0,000002367	+71
660	0,00151515	-0,000002296	+68
670	0,00149254	-0,000002228	+65
680	0,00147059	-0,000002163	+63
690	0,00144928	-0,000002100	+59
700	0,00142857	-0,000002041	+57
710	0,00140845	-0,000001984	+55
720	0,00138889	-0,000001929	+52
730	0,00136986	-0,000001877	+51
740	0,00135135	-0,000001826	+48
750	0,00133333	-0,000001778	+47
760	0,00131579	-0,000001731	+44
770	0,00129870	-0,000001687	+43
780	0,00128205	-0,000001644	+42
790	0,00126582	-0,000001602	+40
800	0,00125000	-0,000001562	+38
810	0,00123457	-0,000001524	+37
820	0,00121951	-0,000001487	+35
830	0,00120482	-0,000001452	+35
840	0,00119048	-0,000001417	+33
850	0,00117647	-0,000001384	+32
860	0,00116279	-0,000001352	+31
870	0,00114943	-0,000001321	+30
880	0,00113636	-0,000001291	+29
890	0,00112360	-0,000001262	+27
900	0,00111111	-0,000001235	+27
910	0,00109890	-0,000001208	+27
920	0,00108696	-0,000001181	+25
930	0,00107527	-0,000001156	+24
940	0,00106383	-0,000001132	+24
950	0,00105263	-0,000001108	+23
960	0,00104167	-0,000001085	+22
970	0,00103093	-0,000001063	+22
980	0,00102041	-0,000001041	+21
990	0,00101010	-0,000001020	+20
1000	0,00100000	-0,000001000	

Für die Differenzen von $\frac{d^1}{dx}$ giebt es ausser der Differenzen-Controle noch eine sehr sichere Summen-Controle; ihre Summe muss nämlich (da diese Werthe $\Delta' \frac{d^1}{dx}$ ohne Beachtung der in $\frac{d^1}{dx}$ abgeworfenen 10^{ten} Bruchstellen gefunden sind) genau der Differenz zwischen den zu $x = 100$ und $x = 1000$ gehörigen $\frac{d^1}{dx}$ gleich, also $\Sigma 10^9 \Delta' \frac{d^1}{dx} =$

99000 sein. Diese Probe habe ich, um mich vor allen Abschreibefehlern in der Columnne $10^9 \Delta' \frac{d^1}{dx}$ zu verwahren,

nicht vermittelt Ansicht des Concepts, sondern der Reinschrift vollzogen, wobei mir Ruhepunkte nach je 10 bis 15 Intervallen zu Statten kamen, indem nämlich die vom Argument 100 bis zum Argument x sich erstreckende $\Sigma 10^9 \Delta' \frac{d^1}{dx}$

die dekadische Ergänzung der 5 letzten Ziffern von $-\frac{d^1}{dx}$ sein muss.

Wir wollen noch an einem Beispiele den Gebrauch der Tafel zeigen. Gesetzt, es soll zu $5468,3173_{864}...$ der umgekehrte Werth gefunden werden, so liegt das Zehnfache desselben zwischen $\frac{1}{546}$ und $\frac{1}{550}$. Da $546,83173_{864}...$ näher an 545 als an 550 liegt, so geht man von dem in der Tafel angesetzten Werth $\frac{1}{545} = 0,00183486$ aus. Die Tafel giebt ausserdem unmittelbar $-\frac{1}{545} = -0,000003367$ und $-\frac{1}{550} = -0,000003306$, daneben aber die Differenz $+0,000000061$. Folglich ist $546,83173_{864}... - 545$ (d. i. $+1,83173_{864}...$) mit $-0,000003367 + \frac{1,83173_{864}...}{2(550-545)} \cdot 0,000000061$, d. i. mit $-0,000003367 + 0,183173_{864}... \times 0,000000061$, d. i. mit $-0,000003367 + 0,0000001127...$, d. i. mit $-0,0000033557_{864}...$ zu multipliciren. Man findet

$$\begin{aligned} 0,0000033 \cdot 1,83173_{864}... &= 0,0000060447_{864}... \\ 0,000000055 \cdot 1,83173_{864}... &= 100_{11}... \\ 0,0000000007_{864}... \times 1,83... &= 1_{864}... \\ \hline 0,0000033557_{864}... \times 1,83174_{864}... &= 0,0000061_{864}... \end{aligned}$$

$$\text{also } \frac{1}{546,83173_{864}...} = 0,00183486 - 0,0000061_{864}... \pm 0,00000001$$

$$= 0,00182869_{73}..., \text{ also } \frac{1}{5468,3173_{864}...} = 0,000182869_{73}...$$

Nun ist zwar nicht zu leugnen, dass man dies Resultat mit derselben Genauigkeit vermittelt sechs- oder siebenziffriger Logarithmen-Tafeln finden würde; aber man erhält dadurch nicht mit solcher Sicherheit die obere und untere Grenze, es sei denn, dass man sich der in № 1075 der A. N., § 52, beschriebenen Methode (mit Hinzufügung einer überzähligen 8ten und 9ten Bruchstelle) bediene, was aber doch wiederum weiltäufiger sein möchte, als der Gebrauch der Tafel der reciproken Werthe.

Den Gebrauch dieser Tafel zur Erleichterung einer sehr exacten Division einer gegebenen Zahl durch eine andere werden wir in einer folgenden Abhandlung erläutern.