XIII.

Einfaches Verfahren den Punkt maximaler Arbeitsleistung eines Muskels an experimentell gefundenen Curven zu construiren.

Von

Dr. O. Wiener

Assistent am physikalischen Institut zu Strassburg i. E.

(Mit 5 Figuren.)

Bei Untersuchungen über die Veränderung der Leistungsfähigkeit eines Muskels, welche derselbe beispielsweise unter dem Einfluss von Giften erleidet, wird bisweilen als charakteristische Grösse das Maximum der äusseren Arbeit angegeben, welche für gleichbleibende Reizstärken bei der Ueberwindung einer bestimmten äusseren Kraft geleistet wird. Dieses Maximum pflegt an der Hand einer experimentell gefundenen Curve bestimmt zu werden, bei der als Abscisse die äussere Kraft, z. B. ein zu hebendes Gewicht, und als Ordinate der unter Ueberwindung dieser Kraft zurückgelegte Weg, z. B. die Hubhöhe jenes Gewichts, aufgetragen wurde. Die geleistete äussere Arbeit ist dann jeweils gleich dem Product von Abscisse und Ordinate und wird daher für jeden Punkt der Curve durch das von den Ordinaten desselben und den Coordinatenaxen begrenzte Rechteck dargestellt (s. die schraffirten Rechtecke der Fig. 1).

Die Ermittlung des Maximums der Arbeit ist somit auf die geometrische Aufgabe zurückgeführt, den Punkt der Curve zu suchen, für welchen die Grösse jenes Rechtecks ein Maximum wird. Die Lösung derselben ist für den Fall bekannt¹⁾, dass die Curve aus einer geraden Linie besteht, welche die Axen auf ihrer positiven Seite schneiden (z. B. die Gerade AB in Fig. 1). Das Maximum tritt dann für die Mitte der von den Axen auf der Geraden ausgeschnittenen Strecke ein (in Fig. 1 der Punkt P , wobei $AP = PB$).

Eine allgemeine Lösung aber für den Fall, dass jene Curve aus einer beliebigen gekrümmten Linie besteht, scheint bisher nicht bekannt

1) Vgl. Hermann, Handb. d. Physiologie. I. Bd. 1. Thl. S. 76.

zu sein. Man war also darauf angewiesen, entweder einen analytischen Ausdruck für die experimentell gefundene Curve aufzustellen und dann nach dem üblichen analytischen Verfahren das Maximum zu berechnen, oder die Arbeit in einer zweiten Curve graphisch aufzutragen und deren maximale Erhebung über die Abscissenaxe festzustellen.

Den Anlass, mit der bezeichneten Aufgabe mich zu beschäftigen, erhielt ich durch Herrn Dr. Dreser, welcher bei seiner Arbeit „Ueber die Messung der durch pharmakologische Agentien bedingten Veränderungen der Arbeitsgrösse und der Elasticitätszustände des Skelettmuskels“¹⁾ ebenfalls auf dieses Problem geführt wurde und mir davon Mittheilung machte. Ich gelangte zu einem Satz, welcher dasselbe allgemein löst und in einer einfachen Verallgemeinerung der Lösung für den Fall der geraden Linie besteht. Er gestattet unmittelbar an der experimentell gefundenen Curve das Arbeitsmaximum zu bestimmen. Da derselbe, wie mir von fachmännischer Seite versichert wird, bei Untersuchungen wie die oben citirte praktische Verwendung finden kann, so sei mir erlaubt, hier kurz darüber zu berichten.

Der Satz lautet:

Liegt in einem Punkt der Curve ein Arbeitsmaximum vor, so ist seine Entfernung von den beiden Coordinatenaxen, längs der in ihm gezogenen Tangente gemessen, gleich gross.

Also entspricht z. B. in Fig. 1 dem Punkt P ein Arbeitsmaximum, so ist auf der durch ihn an die Curve gelegten Tangente AB das Stück $AP = PB$ (ebenso in Fig. 4).

Fig. 1.

Die Umkehrung dieses Satzes ist nicht richtig; denn das Gleiche gilt für einen Punkt, in dem ein Minimum oder überhaupt ein momentaner Stillstand in der Aenderung der zugehörigen Arbeit vorliegt. Die Lösung der Aufgabe bedarf also einer Vervollständigung, die durch den folgenden Satz gegeben wird:

Um zu erfahren, nach welcher Seite der Curve hin in einem beliebigen Punkt derselben die Arbeit zunimmt,

1) Dieses Archiv. XXVII. Bd. S. 50.

ziehe man die Tangente in diesem Punkt und vergleiche auf derselben seine Entfernung von den Koordinatenachsen: dann nimmt nach der Seite des grösseren Abschnittes auf der Tangente die Arbeit zu und nach der Seite des kleineren ab.

So ist in Fig. 1 für den Punkt P' auf der durch ihn gezogenen Tangente $A'B'$ die Entfernung nach B' grösser als nach A' ; hier nimmt also die Arbeit in Richtung nach B' zu und nach A' ab.

Beweis dieser Sätze:

Seien P_1 und P_2 (s. Fig. 2) zwei benachbarte Punkte der Curve; P_1 habe die Coordinaten x und y , P_2 davon verschiedene um die absoluten Beträge dx und dy . Dann erhält man die Arbeit für den Punkt P_2 aus derjenigen für den Punkt P_1 , wenn man von der letzteren das (vertical schraffierte) Rechteck $x\ dy$ abzieht und das (horizontal schraffierte) $y\ dx$ zuzählt. Liegt ein Arbeitsmaximum vor, so müssen diese beiden Rechtecke einander gleich sein; also $y\ dx = x\ dy$, oder $\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$. Fallen die beiden Punkte P_1 und P_2 zu einem einzigen P zusammen, so geht ihre Verbindungs-

Fig. 2.

linie in die Tangente im Punkt P über, und $\frac{dy}{dx}$ wird gleich $\operatorname{tg} \alpha$, wenn α den Winkel der Tangente mit der x -Axe bedeutet (s. Fig. 1); $\operatorname{tg} \alpha$ ist dann gleich $\frac{y}{x_1}$, wobei x_1 die Strecke FB darstellt. Es folgt also

für den Fall eines Maximums $\frac{y}{x} = \frac{y}{x_1}$, also $x = x_1$; da aber PF zur y -Axe parallel läuft, so ist dann auch $AP = PB$, was zu beweisen war. Es wird zugleich ersichtlich, dass dieselbe Beziehung für den Fall gilt, wenn in P ein Minimum oder überhaupt ein momentaner Stillstand für die Arbeitsänderung vorliegt.

Zum Beweis des zweiten Satzes nehme man an, die Arbeit für einen Punkt P_2' sei grösser als diejenige für den benachbarten P_1' ; dann muss das für P_2' hinzugekommene Rechteck grösser als das hinweggefallene sein; also $y'dx' > x'dy'$. Hieraus folgt $\frac{y'}{x'} > \frac{dy'}{dx'}$, oder $\frac{y'}{x'} > \operatorname{tg} \alpha'$, wenn α' wieder den Winkel der in P' gezogenen Tangente mit der x -Axe bedeutet (s. Fig. 1); setzt man hier die Strecke $F'B' = x_2$, so folgt weiter $\frac{y'}{x'} > \frac{y'}{x_2}$; d. h. $x_2 > x'$ und $P'B' > A'P'$.

Man kann noch auf eine andere Weise den Verlauf der Arbeit einfach übersehen. Bekanntlich stellt die Gleichung $x.y = \text{Constante}$ eine gleichseitige Hyperbel dar, deren Asymptoten die Coordinatenachsen sind.

Bei einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten als Coordinatenachsen dienen, ist demnach die Arbeit $(x.y)$ für jeden Punkt gleich gross¹⁾; für diese Curve wird die Arbeit, als Function von x aufgetragen, durch eine zur x -Axe parallele Linie dargestellt.

Wird also eine beliebige Curve von einer solchen Hyperbel, deren Asymptoten aber mit den Coordinatenachsen jener Curve zusammenfallen müssen, berührt, so findet in dem Berührungspunkt ein momentaner Stillstand der Arbeitsänderung statt. So an allen Berührungspunkten der in Fig. 3 ausgezogenen Curven mit der gestrichelt gezeichneten

Fig. 3.

gleichseitigen Hyperbel. Die Entscheidung, wo ein Maximum oder Minimum der Arbeit vorliegt, ist nun sehr einfach. Sind die beiden Curvenzweige, wie bei C_1 und C_3 , auf derjenigen Seite der Hyperbel gelegen, auf der sich der Coordinatenanfangspunkt O befindet, d. h.

1) In Uebereinstimmung mit dem obigen ersten Satz wird bekanntlich bei dieser Curve das von den Asymptoten auf einer jeden Tangente ausgeschnittene Stück in deren jeweiligem Berührungspunkt halbt.

auf der äusseren Hyperbelseite, so liegt ein Maximum vor; denn dann wird die Arbeit nach beiden Seiten hin kleiner, als sie an der Berührungsstelle mit der Hyperbel war. Bei allen Curven wie C_1 , welche von O aus gesehen concav erscheinen, kann es sich daher stets nur um ein Maximum handeln. Bei convexen Curven findet nur dann ein solches statt, wenn die Krümmung der Curve, wie bei C_3 , an der Berührungsstelle kleiner als die der Hyperbel ist. Ist sie grösser, wie bei C_2 , so liegt ein Minimum vor. Befinden sich die beiden Zweige der Curve an der Berührungsstelle, wie bei C_4 und C_5 , auf verschiedenen Seiten der Hyperbel, so tritt weder Maximum noch Minimum ein, sondern nur ein momentaner Stillstand in der Zunahme der Arbeit, wie bei C_4 , oder in der Abnahme, wie bei C_5 .

Praktisch verwerthet man den obigen Satz, um an einer experimentell gewonnenen Curve das Arbeitsmaximum aufzusuchen, in folgender Weise. Man nehme in die eine Hand ein Lineal und in die andere einen Zirkel und verschiebe das erstere so lange an der Curve hin, bis der letztere annähernd die Gleichheit der beiden Strecken am Lineal vom Berührungspunkt bis zu den Coordinatenaxen ergibt (z. B. in Fig. 4, $AP = PB$). An dieser Stelle ziehe man die Tangente. Fällt dann die Mitte M des auf ihr durch die Coordinatenaxen ausgeschnittenen Stückes schon mit dem Berührungspunkt P zusammen, so ist $M (= P)$ der gesuchte Punkt; wenn nicht, so ziehe man bei M eine neue Tangente und verfahre wie zuvor, bis man eine solche gefunden hat, bei der M mit P zusammenfällt.

Dabei sollte man denken, dass für den Fall Tangente und Curve ein anscheinend grösseres Stück gemeinsam haben, in der constructiven Bestimmung des Berührungspunktes eine Schwierigkeit entstehen könnte. Bei der vorliegenden Aufgabe liegt indess ja auch für die Tangente im Punkt M ein Arbeitsmaximum vor, wenn $AM = MB$; so lange der Punkt M also noch dem mit der Curve gemeinsamen Stück angehört, kann er nicht weit von dem das Arbeitsmaximum der Curve bezeichnenden P entfernt sein. Bei Weitem ausreichende Genauigkeit wird daher meistens erzielt, wenn man darauf besteht, dass M in die Mitte des der Tangente und Curve gemeinsamen Stückes zu liegen kommt. Ich verzichte deshalb darauf, die bekannte Construction des Berührungspunktes der Tangente an eine verzeichnete Curve hier wiederzugeben.

Nach dem mitgetheilten Verfahren habe ich an einigen Curven, die auch eine leichte Berechnung des Arbeitsmaximums gestatteten, dieses aufgesucht und fand dasselbe mit dem berechneten innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Zeichnung in Uebereinstimmung.

Zum Schlusse verweise ich noch auf die nachstehenden Figuren, welche das Verfahren illustriren. Die in Fig. 4 verzeichnete Curve

besitzt im Punkte P ein Arbeitsmaximum; denn es ist $AP = PB$ und ausserdem berührt die Curve in P eine der besprochenen gleichseitigen Hyperbeln (in der Figur gestrichelt gezeichnet) von aussen. Die

Fig. 4.

Fig. 5.

Curve in Fig. 5 besitzt zwei Arbeitsmaxima in P_1 und P_3 ($A_1 P_1 = P_1 B_1$, und $A_3 P_3 = P_3 B_3$) und ein Minimum in P_2 ($A_2 P_2 = P_2 B_2$). In den beiden ersten Punkten berührt die Curve nämlich eine gleichseitige Hyperbel (H_1) von aussen, in P_2 aber eine solche (H_2) von innen.