

SUR UNE MÉTHODE DIRECTE DU CALCUL DES VARIATIONS ¹⁾.

Par M. Leonida Tonelli (Parma).

Adunanza del 13 dicembre 1914.

La méthode pour démontrer qu'une fonction réelle et continue $f(x)$ atteint, dans un intervalle (a, b) , sa plus petite, valeur ²⁾ consiste:

1°) dans le choix d'une suite $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ pour laquelle $f(x_n)$ tend vers la limite inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) ;

2°) dans la démonstration que, si x_∞ est un des points limites de cette suite, on a, en vertu de la continuité,

$$(I) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_\infty).$$

C. ARZELÀ ³⁾, avait essayé, en 1897, d'étendre cette méthode, de l'Analyse ordinaire au Calcul fonctionnel, tâchant précisément de l'appliquer au célèbre problème de DIRICHLET. Ses efforts n'eurent pas de succès, mais son idée était féconde et devait triompher.

M. HILBERT ⁴⁾ eut, en 1900, le grand mérite de montrer que la méthode tirée de la théorie des fonctions continues usuelles permet d'établir effectivement l'existence de la solution du problème de DIRICHLET. Mais les deux formes sous lesquelles il présente la méthode n'atteignent pas l'essence vraie et profonde de la méthode elle-même.

¹⁾ Les principaux résultats de ce Mémoire ont été énoncés dans deux Notes insérées aux Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences [t. CLVIII (1914), pp. 1776-1778, 1983-1985].

²⁾ Nous suivrons dans ce Mémoire la terminologie de l'« *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées* » [II 3, pp. 316-318; II 31, p. 1; — voir aussi CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse*, 3^e édition, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1914), pag. 129]; au lieu de *maximum*, *minimum*, *extremum*, nous dirons donc toujours *maximé*, *minimé*, *extrémé*, et nous conjuguerons les verbes *maximer*, *minimer*, *extrémer*.

³⁾ C. ARZELÀ, *Sul principio di DIRICHLET* [Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, nuova serie, vol. I (1896-97), pp. 71-84].

⁴⁾ D. HILBERT, *Ueber das DIRICHLET'sche Prinzip* [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. VIII (1900), pp. 184-188], *Über das DIRICHLET'sche Prinzip* [Festschrift zur Feier des 150 jährigen Bestehens der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Göttingen, 1901), pp. 1-27].

Il montre, d'abord, qu'une suite minimante ⁵⁾, choisie parmi les surfaces admises, a au moins une surface limite. En s'appuyant, ensuite, sur la solution connue d'avance d'un cas particulier du même problème [problème « *im Kleinen* » ⁶⁾], il prouve que la surface limite résout le problème. Dans la seconde forme de la méthode il obtient ce même résultat, en se servant de propriétés tout à fait inhérentes à la nature linéaire du problème.

Ainsi, donc, M. HILBERT ne fait jamais explicitement appel à la continuité ou à ce minimum de continuité qui, dans le cas des fonctions $f(x)$, permet de justifier l'égalité (1) et donne même la seule raison de l'existence du minimé. C'est pour cela que la véritable essence de la méthode reste cachée, de même que le champ d'application en reste, forcément limité ⁷⁾.

Une telle limitation fut remarquée aussi par M. HADAMARD ⁸⁾ qui donna, de son côté, une autre méthode directe pour la démonstration de l'existence du minimé. Ayant considéré une surface $z=f(x, y)$ et un de ses points M , il observe que, si l'on part de M en suivant toujours la ligne de la plus grande pente de la surface, dans le sens des z décroissantes, on finit par arriver à un point minimant. Il en tire un procédé d'approximations successives qui a l'avantage de donner aussi le moyen pour déterminer effectivement le minimant. Mais la méthode rencontre parfois des difficultés, même dans le cas considéré par M. HADAMARD ⁹⁾. En outre, elle ne peut s'appliquer si la fonction (ou les fonctions), d'où dépend l'intégrale à minimiser, est obligée à varier dans un champ borné. Dans ce cas, le minimant peut exister sans satisfaire entièrement à l'équation différentielle correspondante, car il peut avoir des arcs sur la frontière qui borne précisément le champ où doit se trouver l'élément variable ¹⁰⁾.

M. LEBESGUE, en reprenant, dans sa Thèse ¹¹⁾, la méthode de M. HILBERT, a

⁵⁾ C'est-à-dire une suite telle, que celle des intégrales respectives tend vers la limite inférieure que l'on doit démontrer être un minimé.

⁶⁾ C'est-à-dire problème relatif à des champs — par exemple, circulaires — suffisamment petits.

⁷⁾ Ce que nous avons dit s'applique aussi aux procédés employés par MM. B. LEVI, FUBINI, LEBESGUE pour résoudre le problème de DIRICHLET et par M. BOLZA et M. CARATHÉODORY en d'autres cas. Dans le cas des intégrales curvilignes, si l'on admet la résolubilité et l'unicité de la solution du problème « *im Kleinen* » et que l'on se borne à des champs « *extremal-convex* », le problème de minimiser se réduit à celui d'une fonction continue ordinaire. C'est à M. HADAMARD d'abord, et à M. SIGNORINI, ensuite, que l'on doit cette remarque.

⁸⁾ J. HADAMARD, a) *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées* [Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre, t. XXXIII, n° 4 (1908), pp. 1-128] et b) *Sur une méthode de calcul des variations* [Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXLIII (2^e semestre 1906), pp. 1127-1129].

⁹⁾ Cfr. le Mémoire cité ⁸⁾ a), IV^e Partie, § 4.

¹⁰⁾ Noire critique s'adresse aussi aux méthodes de M. HILBERT.

¹¹⁾ H. LEBESGUE, *Intégral, Longueur, Aire* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, tomo VII (1902), pp. 231-359].

montré que dans le cas de l'intégrale $\int_C f(x, y) ds$, avec $f(x, y) > k > 0$, elle s'applique d'une façon entièrement analogue à celle valable pour les fonctions continues. Il établit ainsi, dans ce cas, l'existence du minimé. Mais, au point de vue des propriétés du minimant et de sa détermination, il reste à démontrer que ce minimant satisfait à l'équation d'EULER, et cela sans supposer d'avance le problème résolu « *im Kleinen* ».

En réfléchissant sur les méthodes précédentes, nous nous sommes convaincus que la méthode valable pour les fonctions continues ordinaires peut effectivement sous certaines conditions (qui comprennent comme cas particulier celles de M. LEBESGUE) se transporter en entier dans le Calcul fonctionnel, et qu'elle peut se compléter de manière à donner directement les propriétés analytiques des solutions. Cette conviction nous a dirigés dès le premier travail que nous avons publié sur le Calcul des Variations ¹²⁾, bien que, alors, nous ne fussions pas encore parvenus à nous débarrasser tout à fait de la supposition que le problème était résolu « *im Kleinen* ». Il nous est possible, à présent, de vaincre cette difficulté et d'exposer la méthode sous sa forme définitive.

Il faut partir de cette remarque fondamentale, due à M. BAIRE: « Ce qui permet d'affirmer la vérité de l'égalité (1) ce n'est pas toute la continuité, mais une seule des deux parties, dans lesquelles elle peut se partager, c'est-à-dire la semi-continuité inférieure ». Or l'obstacle le plus difficile à vaincre pour atteindre notre but c'est que les intégrales du Calcul des Variations ne sont pas, généralement, des fonctions continues des éléments sur lesquels elles agissent ¹³⁾. Cet obstacle vient en partie à disparaître, si nous remplaçons la continuité par la semi-continuité inférieure. Il disparaît même tout à fait pour une classe très étendue de problèmes, en vertu du théorème suivant:

Lorsque certaines conditions de régularité sont satisfaites, l'intégrale en question est toujours une fonction semi-continue de l'élément sur lequel elle agit; et l'on a, précisément, une fonction semi-continue inférieurement ou supérieurement, suivant que le problème est régulier-positif ou régulier-négatif ¹⁴⁾.

¹²⁾ L. TONELLI, *Sui massimi e minimi assoluti del calcolo delle variazioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXII (2^o semestre 1911), pp. 297-337]; *Sul caso regolare nel Calcolo delle Variazioni* [Ibidem, t. XXXV (1^o semestre 1913), pp. 49-73]; etc.

¹³⁾ L. TONELLI, *Sulle funzioni di linee* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, 1^o semestre 1914, pp. 28-33].

¹⁴⁾ Nous nous bornons aux intégrales portant sur des courbes planes. Si la courbe en question a des coordonnées, en fonction de l'arc, toujours continues avec leurs dérivées des deux premiers ordres, nous pouvons facilement déduire notre proposition d'une autre de M. LINDBERG {J. W. LINDBERG, *Über einige Fragen der Variationsrechnung* [Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), pp. 340-354]}, dont récemment M. E. E. LEVI a donné une nouvelle démonstration {E. E. LEVI, *Sopra un teorema del Calcolo delle Variazioni del sig. LINDBERG* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVII (1^o semestre 1914), pp. 245-248]}. Dans le cas général auquel l'on est forcément amené, la proposition

Dans cette proposition se trouve la vraie raison du succès des méthodes de M. HILBERT et des autres Auteurs que nous avons rappelés dans la note ⁷⁾.

Naturellement lorsqu'on passe des fonctions $f(x)$ aux fonctions de lignes et de surfaces, il se présente une autre difficulté. Si l'intervalle (a, b) , où varie x , est fini, la suite minimante: x_1, x_2, \dots , admet au moins un point limite, tandis que l'on n'est plus sûr de l'existence de l'élément limite lorsque la suite minimante n'est plus composée de nombres, mais de lignes ou de surfaces. Il faudra, en ce cas, admettre, non seulement la régularité du problème, mais aussi d'autres conditions qui nous assurent de l'existence de l'élément limite. M. HILBERT a montré le premier que, l'intégrale du problème de DIRICHLET satisfait précisément à ces conditions supplémentaires.

Une fois démontré l'existence du minimant il reste à établir ses propriétés analytiques. Ici encore *ce sont les conditions de régularité que nous avons invoquées plus haut qui nous montrent que le minimant est une extrémale en tous ses points intérieurs au champ considéré.*

Dans le présent Mémoire nous exposons notre méthode pour le cas de l'intégrale

$$(2) \quad \int_a^b f(x, y, y') dx$$

et nous tenons à faire observer que nous ne nous servons jamais des propositions de la théorie des équations différentielles, pas même là où nous démontrons que les arcs des courbes extrémantes, intérieures au champ considéré, satisfont à l'équation différentielle d'EULER. Nous nous plaçons donc, à un point de vue tout à fait opposé à celui de M. SERGE BERNSTEIN, dont le Mémoire: *Sur les équations du calcul des variations* ¹⁵⁾ contient encore, parmi de très intéressants résultats, des cas particuliers des propositions d'existence que nous allons établir.

Le problème que nous traitons dans ce travail est celui qui a été étudié aussi par M. HADAMARD ¹⁶⁾. Cet Auteur détermine, ainsi que nous l'avons dit plus haut, la solution du problème par des approximations successives et obtient, par des hypothèses supplémentaires, une limite supérieure de l'approximation, à chaque pas du procédé. Nous, au contraire, en nous plaçant sous des hypothèses un peu plus générales, nous atteignons notre but, même dans le second des deux cas étudiés par M. HADAMARD, où sa méthode rencontre des difficultés. Quant à la plus grande extension des hypothèses, nous rappelons brièvement qu'il nous est possible de nous passer tout à fait de la condition que l'ordre d'infini de $f(x, y, y')$, pour $|y'| \rightarrow \infty$, doive être fini, et aussi

en question est démontrée dans nos Mémoires ¹²⁾ où se trouve aussi la démonstration pour le cas des courbes de l'espace.

Si l'on considère l'intégrale $\int_C f(x, y) ds$, ($f > k > 0$), la semi-continuité peut s'établir géométriquement; c'est ce qu'a montré M. LEBESGUE [l. c. ¹¹⁾].

¹⁵⁾ S. BERNSTEIN, *Sur les équations du calcul des variations* [Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure, III^e série, t. XXIX (1912), pp. 431-485].

¹⁶⁾ l. c. ⁸⁾.

qu'il nous est donné de remplacer l'inégalité $f_{y'y'} > 0$ par $f_{y'y'} \geq 0$. En outre, nous pouvons supposer borné le champ de variabilité de y et imposer aux fonctions $y = y(x)$ des conditions déterminées, en considérant le problème de minimiser par rapport à des classes spéciales de fonctions et, en particulier, par rapport à toutes les fonctions donnant une valeur constante à une intégrale de la forme

$$(3) \quad \int_a^b M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

On a, de cette façon, la solution d'une classe importante de problèmes isopérimétriques. La méthode permet encore de résoudre l'autre problème isopérimétrique qui s'obtient, en échangeant entre elles les deux intégrales (2) et (3).

Rappelons enfin, que notre méthode échappe complètement à la critique adressée par M. CARATHÉODORY aux méthodes de M. HILBERT et à celles qui en dérivent, en tant qu'elles se fondent sur le principe de la possibilité d'effectuer une infinité dénombrable de choix arbitraires ¹⁷⁾.

CHAPITRE I.

La semi-continuité inférieure.

I. Soit $f(x, y, y')$ une fonction finie et continue avec ses dérivées partielles des deux premiers ordres dans tout le champ

$$(A) \quad \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ -\infty < y < +\infty, \\ -\infty < y' < +\infty. \end{cases}$$

Soient, en outre, vérifiées les deux hypothèses suivantes :

I) $f_{y'y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \geq 0$, pour tous les points du champ (A);

II) $f > -N$, pour tous les points du champ (A), et $f(x, y, y') > |y'|^{1+\alpha} m(y)$, pour tous les points du champ partiel

$$(A') \quad \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ -\infty < y < +\infty, \\ |y'| \geq M \end{cases}$$

¹⁷⁾ Cfr. L. TONELLI, *Sul valore di un certo ragionamento* [Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, t. XLIX (1913-1914), pp. 4-14].

étant $\alpha > 0$ et $m(y)$ une fonction continue toujours *positive* (> 0) telle que

$$|y|^{1+\alpha} m(y) \underset{|y| \rightarrow \infty}{\rightarrow} \infty \quad {}^{18)}.$$

2. Nous considérerons toujours, par la suite, des fonctions $y = y(x)$ définies dans l'intervalle (a, b) , *absolument continues* suivant la définition de M. VITALI ¹⁹⁾, telles que, pour chacune d'elles, il existe, déterminée et finie, l'intégrale (au sens de M. LEBESGUE)

$$J(y) = \int_a^b f[x, y(x), y'(x)] dx$$

en convenant de poser $f = 0$ où $y'(x)$ n'existe pas déterminée et finie.

3. Nous allons démontrer que l'intégrale $J(y)$ est une fonction *semi-continue inférieurement* de la courbe dont l'équation est $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$). C'est-à-dire, nous allons démontrer qu'étant donnée une fonction $y_0 = y_0(x)$ (n. 2) et ayant pris un nombre $\sigma > 0$ arbitraire, il est possible de déterminer un ε tel que, pour toute fonction $y = y(x)$ (n. 2) satisfaisant dans tout l'intervalle (a, b) à l'inégalité

$$|y(x) - y_0(x)| < \varepsilon$$

on ait

$$(4) \quad J(y) > J(y_0) - \sigma.$$

Nous remarquons d'abord que l'inégalité précédente est certainement satisfaite par toutes les fonctions $y = y(x)$ pour lesquelles on a $J(y) \geq J(y_0)$. Nous pouvons, donc, nous borner aux fonctions qui satisfont à l'inégalité

$$(5) \quad J(y) < J(y_0).$$

La différence entre les deux intégrales de cette inégalité peut s'écrire

$$J(y) - J(y_0) = \int_a^b [f(x, y, y') - f(x, y_0, y'_0)] dx$$

et, puisque y et y_0 sont des fonctions absolument continues, y' et y'_0 sont en même temps déterminées et finies *presque partout* [V. la note ¹⁹⁾], de sorte que nous pouvons négliger les points exceptionnels dans le calcul de la dernière intégrale.

Nous désignons par E_r l'ensemble des points de (a, b) où y'_0 est finie et satisfait à l'inégalité $|y'_0| \geq r$ (r étant un nombre entier positif). Nous disons que cet ensemble

¹⁸⁾ C'est-à-dire $\lim_{y \rightarrow \infty} |y|^{1+\alpha} m(y) = \infty$.

¹⁹⁾ G. VITALI, *Sulle funzioni integrali* [Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XL (1904-905), pp. 1021-1034]. Nous rappelons cette définition. On dit qu'une fonction $f(x)$ est *absolument continue* dans (a, b) si, étant donné un nombre positif σ , arbitraire, on peut toujours déterminer un autre nombre $\mu > 0$ tel que l'on ait $|\sum \{f(\beta_i) - f(\alpha_i)\}| < \sigma$, où la somme est étendue à un ensemble quelconque d'intervalles $(\alpha_i; \beta_i)$ de (a, b) , sans parties communes, ayant une mesure totale plus petite que μ . Nous rappelons aussi, qu'en vertu de la continuité absolue, $f(x)$ admet la dérivée $f'(x)$ finie *presque partout* [c'est-à-dire, pour tous les points de (a, b) sauf pour un ensemble de mesure nulle] et l'on a $f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx$. Réciproquement toute fonction, qui est une intégrale, est absolument continue.

a une mesure $m(E_r)$ qui tend vers zero avec $\frac{1}{r}$. En effet, dans le cas contraire, les mesures $m(E_r)$ ($r = 1, 2, \dots$) seraient toutes supérieures à un nombre $\eta > 0$ et il y aurait des points communs à tous les E_r ²⁰, ce qui est impossible, ne pouvant la y'_0 être finie pour ces points. Il s'ensuit, à cause de l'absolue continuité, que l'intégrale de $f[x, y_0(x), y'_0(x)]$ étendue à E_r tend vers zero avec $\frac{1}{r}$ et que, si nous indiquons par C_r le complémentaire de E_r par rapport à l'intervalle (a, b) , on a

$$(6) \quad \int_{C_r} f[x, y_0(x), y'_0(x)] dx \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \int_a^b f(x, y_0, y'_0) dx.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int f[x, y(x), y'(x)] dx.$$

En vertu de II), nous avons

$$\int_{E_r} f(x, y, y') dx \geq -Nm(E_r),$$

et

$$\int_a^b f(x, y, y') dx \geq \int_{C_r} f(x, y, y') dx - Nm(E_r).$$

Étant, en outre, $Nm(E_r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$, on a pour r_1 suffisamment grand

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x, y, y') dx &> \int_{C_{r_1}} f(x, y, y') dx - \frac{\sigma}{5}, \\ \int_a^b f(x, y_0, y'_0) dx &< \int_{C_{r_1}} f(x, y_0, y'_0) dx + \frac{\sigma}{5}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$J(y) - J(y_0) > \int_{C_{r_1}} \{f(x, y, y') - f(x, y_0, y'_0)\} dx - \frac{2}{5} \sigma,$$

et cela pour toute fonction $y(x)$ du n. 2.

4. D'après la formule de TAYLOR, on a *presque partout*

$$f(x, y, y') = f(x, y, y'_0) + (y' - y'_0)f_{y'}(x, y, y'_0) + \frac{1}{2}(y' - y'_0)^2 f_{y'^2}(x, y, \bar{y}')$$

où \bar{y}' indique une valeur déterminée, comprise entre y'_0 et y' . Puisque le premier membre de l'inégalité précédente est intégrable dans l'ensemble C_{r_1} , il en sera de même pour le second. Le premier terme de ce second membre est intégrable ainsi que $f_{y'}(x, y, y'_0)$; et comme cette fonction est bornée dans C_{r_1} , il s'ensuit l'intégrabilité de $(y' - y'_0)f_{y'}(x, y, y'_0)$. On conclut qu'il existe l'intégrale de $(y' - y'_0)^2 f_{y'^2}(x, y, \bar{y}')$ dans C_{r_1} . Nous pouvons

²⁰) Ces points formeraient un ensemble de mesure $\geq \eta$. [Voir CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, l. c. ²), pag. 67].

ainsi écrire

$$J(y) - J(y_0) + \frac{2}{5}\sigma > \int_{C_{r_1}} \{f(x, y, y') - f(x, y_0, y')\} dx \\ + \int_{C_{r_1}} (y' - y'_0) f_{y'}(x, y, y') dx + \frac{1}{2} \int_{C_{r_1}} (y' - y'_0)^2 f_{y'^2}(x, y, \bar{y}') dx.$$

La dernière intégrale, à cause de I), n'est certainement pas négative, de sorte qu'on peut la supprimer. Ayant ensuite

$$f(x, y, y') - f(x, y_0, y') = (y - y_0) f_y(x, \bar{y}, y')$$

où \bar{y} est une valeur comprise entre y_0 et y , si l'on suppose toujours vérifiée l'inégalité

$$(7) \quad |y(x) - y_0(x)| \leq 1,$$

on peut écrire

$$J(y) - J(y_0) + \frac{2}{5}\sigma > -\omega N_1(b-a) + \int_{C_{r_1}} (y' - y'_0) f_{y'}(x, y, y') dx$$

en désignant par ω la valeur absolue maximée de $y - y_0$ dans l'intervalle (a, b) et par N_1 celle de $f_y(x, y, y')$ dans le champ

$$(A'') \quad \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ y_0(x) - 1 \leq y \leq y_0(x) + 1, \\ |y'| \leq r_1. \end{array} \right.$$

Nous avons aussi

$$J(y) - J(y_0) + \frac{2}{5}\sigma + \omega N_1(b-a) \\ > \int_{C_{r_1}} (y' - y'_0) \{f_{y'}(x, y, y') - f_{y'}(x, y_0, y')\} dx + \int_{C_{r_1}} (y' - y'_0) f_{y'}(x, y_0, y') dx \\ = \int_{C_{r_1}} (y' - y'_0)(y - y_0) f_{y'y}(x, \bar{y}, y') dx + \int_{C_{r_1}} (y' - y'_0) f_{y'}(x, y_0, y') dx \\ > -\omega N_2 \left\{ \int_a^b |y'| dx + r_1(b-a) \right\} + \int_{C_{r_1}} (y' - y'_0) f_{y'}(x, y_0, y') dx$$

où N_2 indique la valeur absolue maximée de $f_{y'y}$ dans le champ (A'') .

Soit, maintenant, G l'ensemble des points de (a, b) , où l'on a $|y'(x)| < M$, et $C(G)$ son complémentaire, dans les points duquel on a, à cause de II),

$$|y'| < |y'|^{1+\alpha} < \frac{1}{m} f(x, y, y'),$$

où m est le minimum de $m(y)$ dans le champ $[a \leq x \leq b, y_0(x) - 1 \leq y \leq y_0(x) + 1]$.

On a alors

$$\int_a^b |y'| dx < M m(G) + \frac{1}{m} \int_{C(G)} f(x, y, y') dx < M(b-a) + \frac{1}{m} [J(y) + N(b-a)],$$

et par (5)

$$\int_a^b |y'| dx < \left(M + \frac{1}{m} N \right) (b-a) + \frac{1}{m} J(y_0).$$

On a donc

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & J(y) - J(y_0) + \frac{2}{5} \sigma + \omega \left\{ (b-a) \left(N_1 + N_2 r_1 + N_2 M + \frac{1}{m} N_2 N \right) + \frac{1}{m} N_2 J(y_0) \right\} \\ & > \int_{C_{r_1}} (y' - y'_0) f_{y'}(x, y_0, y'_0) dx. \end{aligned} \right.$$

5. Nous allons démontrer que l'intégrale qui reste tend vers zéro avec ω [valeur absolue maximée de $y(x) - y_0(x)$]. Posons

$$\begin{aligned} g(x) &= f_{y'}[x, y_0(x), y'_0(x)], \text{ dans } C_{r_1} \\ g(x) &= 0, \text{ dans le complémentaire de } C_{r_1}. \end{aligned}$$

Il vient

$$(9) \quad \int_{C_{r_1}} (y' - y'_0) f_{y'}(x, y_0, y'_0) dx = \int_a^b (y' - y'_0) g(x) dx.$$

Remarquons que notre proposition serait déjà démontrée si $g(x)$ était finie et continue en même temps que sa dérivée. En effet, on aurait, dans ce cas, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_a^b (y' - y'_0) g(x) dx &= [y(b) - y_0(b) - y(a) + y_0(a)] g(b) \\ &\quad - \int_a^b [y(x) - y_0(x) - y(a) + y_0(a)] g'(x) dx, \\ \left| \int_a^b (y' - y'_0) g(x) dx \right| &\leq 2\omega \left\{ |g(b)| + \int_a^b |g'(x)| dx \right\}. \end{aligned}$$

Mais notre fonction peut n'avoir pas de dérivée et même n'être pas continue. Ce qu'il y a de sûr c'est qu'elle est bornée en valeur absolue [$\leq N_3$, si N_3 désigne la valeur absolue maximée de $f_{y'}(x, y, y')$ dans (A'')] et quelle est intégrable.

Considérons le polynôme défini par MM. DE LA VALLÉE POUSSIN ET LANDAU

$$P_n(x) = \frac{k_n}{2} \int_0^1 g(\zeta) [1 - (\zeta - x)^2]^n d\zeta, \quad \left(\frac{1}{k_n} = \int_0^1 (1 - u^2)^n du \right)$$

en supposant que l'on ait $0 < a < b < 1$, hypothèse bien légitime, parce qu'on peut y satisfaire par un changement de variable. D'après M. F. RIESZ ²¹⁾,

$$P_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} g(x)$$

presque partout dans l'intervalle (a, b) . Il y a, en outre, $|P_n(x)| \leq N_3$, à cause de $|g(x)| \leq N_3$, quel que soit x dans (a, b) et quel que soit n .

Si nous rappelons l'inégalité de SCHWARZ généralisée ²²⁾

$$(10) \quad \left| \int_E f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \left[\int_E |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_E |\varphi(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \quad (p > 1),$$

²¹⁾ F. RIESZ, *Über die Approximation einer Funktion durch Polynome* [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XVII (1908), pp. 196-211].

²²⁾ F. RIESZ, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen* [Mathematische Annalen, Bd. LXIX (1910), pp. 449-497].

nous avons

$$\left| \int_a^b (y' - y'_0)g(x)dx - \int_a^b (y' - y'_0)P_n(x)dx \right| \leq \int_a^b |y' - y'_0| |g(x) - P_n(x)| dx \\ \leq \left[\int_a^b |y' - y'_0|^{1+\alpha} dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \cdot \left[\int_a^b |g(x) - P_n(x)|^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} dx \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Comme on a, en outre ²³⁾

$$(II) \quad \left[\int_E |f + \varphi|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_E |f|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_E |\varphi|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \quad (p > 1),$$

il vient

$$\left[\int_a^b |y' - y'_0|^{1+\alpha} dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq \left[\int_a^b |y'|^{1+\alpha} dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} + \left[\int_a^b |y'_0|^{1+\alpha} dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

et, en vertu de II),

$$\leq \left[M^{1+\alpha}(b-a) + \frac{1}{m} J(y) + \frac{1}{m} N(b-a) \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \\ + \left[M^{1+\alpha}(b-a) + \frac{1}{m} J(y_0) + \frac{1}{m} N(b-a) \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

ou, de (5),

$$\leq 2 \left[(b-a) \left(M^{1+\alpha} + \frac{1}{m} N \right) + \frac{1}{m} J(y_0) \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

On a donc

$$\left| \int_a^b (y' - y'_0)g(x)dx - \int_a^b (y' - y'_0)P_n(x)dx \right| \\ \leq 2 \left[(b-a) \left(M^{1+\alpha} + \frac{1}{m} N \right) + \frac{1}{m} J(y_0) \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \cdot \left[\int_a^b |g - P_n|^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} dx \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Puisque nous avons

$$|g - P_n| \leq |g| + |P_n| \leq 2N,$$

et étant *presque partout* $|g - P_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, il s'ensuit, d'après un théorème bien connu sur l'intégration des suites,

$$\int_a^b |g - P_n|^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Par conséquent, si n_i est suffisamment grand,

$$\left| \int_a^b (y' - y'_0)g(x)dx - \int_a^b (y' - y'_0)P_{n_i}(x)dx \right| < \frac{\sigma}{5} :$$

cela pour toutes nos fonctions $y = y(x)$ (n. 2) qui satisfont aux inégalités (5) et (7).

$P_{n_i}(x)$, étant un polynôme, a la dérivée finie et continue, de sorte que l'on a,

²³⁾ l. c. ²²⁾.

d'après ce que nous avons remarqué plus haut

$$\int_a^b (y' - y'_0) P_{n_1}(x) dx \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0.$$

Donc, pour tout ω suffisamment petit, nous avons

$$\left| \int_a^b (y' - y'_0) g(x) dx \right| < \frac{2}{5} \sigma$$

et, en vertu de (8) et (9)

$$J(y) - J(y_0) + \sigma > 0,$$

ce qui démontre la *semi-continuité inférieure* de l'intégrale J .

6. De la proposition que nous venons d'établir nous déduisons, presque immédiatement, cette autre. Soit $y(x)$ une fonction absolument continue dans (a, b) . Nous ne savons pas si elle appartient à celles du n. 2. Supposons qu'il existe une suite

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$$

de fonctions du n. 2 tendant uniformément vers $y_0(x)$ et que l'intégrale $J(y_n)$ demeure, quel que soit n , inférieure à un nombre fixe I . Nous allons démontrer que $y_0(x)$ donne une valeur déterminée et finie à l'intégrale J , c'est-à-dire que $y_0(x)$ est une des fonctions considérées au n. 2. Soit, en effet, E_r l'ensemble des points où l'on a $|y'_0(x)| \geq r$ (r entier positif). A cause de l'intégrabilité de $y'_0(x)$, il vient $m(E_r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. En outre, si $C(E_r)$ désigne le complémentaire de E_r , l'intégrale

$$J_{C_r}(y_0) = \int_{C(E_r)} f(x, y_0, y'_0) dx$$

est déterminée et finie, parce que la fonction sous le signe \int à une valeur absolue toujours inférieure à un nombre fixe. Remplaçons dans la démonstration du nombre précédent $J(y_0)$ par $J_{C_r}(y_0)$ et $J(y)$ par $J(y_n)$; il s'ensuivra que, σ étant pris arbitrairement, il nous sera possible de déterminer un entier n_1 tel que, si $n > n_1$, on aura

$$J(y_n) > J_{C_r}(y_0) - \sigma$$

d'où

$$J_{C_r}(y_0) < 2I;$$

et cette inégalité sera vraie quel que soit r . Étant $J_{C_r}(y_0)$ une fonction qui croît avec r , si $r > M$, il s'ensuit que la limite de

$$\int_{C(E_r)} f(x, y_0, y'_0) dx$$

pour $r \rightarrow \infty$, existe déterminée et finie ($< 2I$), c'est-à-dire, qu'il existe

$$\int_a^b f(x, y_0, y'_0) dx.$$

CHAPITRE II.

Existence du minimé absolu.

7. Soient P_a et P_b deux points de coordonnées respectives (a, p_a) , (b, p_b) . Considérons toutes les fonctions $y = y(x)$ du n. 2 satisfaisant aux conditions

$$(12) \quad y(a) = p_a, \quad y(b) = p_b,$$

c'est-à-dire, ayant des courbes représentatives qui passent par P_a et P_b .

Soit i la limite inférieure de l'intégrale $J(y)$ étendue à toutes les possibles fonctions $y(x)$ que nous venons de considérer. À cause de la semi-continuité inférieure de J , nous pouvons ²⁴⁾ choisir, parmi nos fonctions, une suite

$$(13) \quad y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$$

tendant vers la limite i , sans recourir au principe de la possibilité d'effectuer une infinité dénombrable de choix arbitraires. Pour cela, il suffit que nous considérions l'ensemble des $y(x)$:

1°) satisfaisant aux conditions (12);

2°) vérifiant l'inégalité $J(y) \leq i + \frac{1}{n}$;

3°) ayant, partout, leurs nombres dérivés finis;

et que nous choissions, dans cet ensemble, l'ensemble partiel des $y(x)$ pour lesquelles tous les nombres dérivés restent, en valeur absolue, toujours inférieurs ou égaux au double de la limite inférieure de la valeur absolue maximée des nombres dérivés de chaque $y(x)$. Dans cet ensemble partiel, qui est formé par des fonctions également continues, comme il résulte du critère d'égalité de continuité de C. ARZELÀ, on peut prendre, d'après les numéros 2 et 5 de ma Note, citée plus haut, une fonction déterminée $y_n(x)$.

A cause de la construction de la suite (13), on a que

$$(14) \quad J(y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} i.$$

8. Nous allons démontrer que les $y_n(x)$ ont au moins une fonction limite.

Si nous désignons par $E_M^{(n)}$ l'ensemble des points où l'on a $|y_n'| \geq M$ et par \bar{y}_n une valeur de y_n qui minimise la fonction $m[y_n(x)]$, nous pouvons écrire, d'après II,

$$J(y_n) > -N(b-a) + m(\bar{y}_n) \int_{E_M^{(n)}} |y_n'|^{1+\alpha} dx$$

et aussi

$$J(y_n) > -N(b-a) + m(\bar{y}_n) \left\{ \int_a^b |y_n'|^{1+\alpha} dx - M^{1+\alpha}(b-a) \right\}.$$

²⁴⁾ l. c. 17).

En vertu de l'inégalité de SCHWARZ généralisée (10), nous avons

$$\left[\int_a^b |y'_n| dx \right]^{1+\alpha} \leq (b-a)^\alpha \int_a^b |y'|^{1+\alpha} dx$$

et, par conséquent, puisque l'on a

$$\int_a^b |y'_n| dx \geq \bar{y}_n - p_a$$

où \bar{y}_n indique la valeur absolue maximée de y_n ,

$$J(y_n) > -N(b-a) + m(\bar{y}_n) \left\{ \frac{1}{(b-a)^\alpha} (\bar{y}_n - p_a)^{1+\alpha} - M^{1+\alpha} (b-a) \right\}$$

et

$$i + \frac{1}{n} + N(b-a) > m(\bar{y}_n) \left\{ \frac{1}{(b-a)^\alpha} (\bar{y}_n - p_a)^{1+\alpha} - M^{1+\alpha} (b-a) \right\}.$$

On voit aussi que \bar{y}_n ne peut pas tendre vers l'infini, parce que, dans le cas contraire, le produit $m(\bar{y}_n) \bar{y}_n^{1+\alpha}$ demeurant toujours inférieur à un nombre fixe, $m(\bar{y}_n)$ devrait tendre vers zéro; par conséquent \bar{y}_n et $\bar{y}_n^{1+\alpha} \cdot m(\bar{y}_n)$ devraient tendre vers l'infini [comme il résulte d'après II] ce qui ne peut pas être, puisque l'on a $\bar{y}_n^{1+\alpha} m(\bar{y}_n) \leq \bar{y}_n^{1+\alpha} m(\bar{y}_n)$.

Nous concluons que toutes les fonctions y_n sont également bornées, c'est-à-dire, que l'on peut déterminer un nombre positif Y tel que, quel que soit n et quel que soit x de l'intervalle (a, b) , on a

$$|y_n(x)| < Y.$$

9. Soit m_i le minimum de $m(y)$ pour tous les y en valeur absolue $\leq Y$.

Il résulte de II):

$$\int_a^b |y'_n|^{1+\alpha} dx < M^{1+\alpha} (b-a) + \frac{1}{m_i} \{J(y_n) + N(b-a)\},$$

et de (14):

$$(15) \quad \int_a^b |y'_n|^{1+\alpha} dx < (b-a) \left(M^{1+\alpha} + \frac{1}{m_i} N \right) + C,$$

où C est un nombre positif convenablement choisi et indépendant de n . Nous aurons, si x_1 et x_2 sont deux abscisses quelconques comprises entre a et b (extrêmes inclus)

$$|y_n(x_2) - y_n(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} y'_n dx \right|,$$

et en vertu de (10) (où l'on posera $f = 1$, $\varphi = y'_n$, $p = 1 + \frac{1}{\alpha}$)

$$\begin{aligned} |y_n(x_2) - y_n(x_1)| &\leq |x_2 - x_1|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left[\int_{x_1}^{x_2} |y'_n|^{1+\alpha} dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \\ &< |x_2 - x_1|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left[(b-a) \left(M^{1+\alpha} + \frac{1}{m_i} N \right) + C \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \\ &< A |x_2 - x_1|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \end{aligned}$$

où A est un nombre positif indépendant de n et de x_1 et x_2 . Cette inégalité montre que toutes les fonctions $y_n(x)$ sont également continues dans l'intervalle (a, b) et qu'elles ont, par conséquent, au moins une fonction limite $y_\infty(x)$ à laquelle tend uniformément une suite tirée, d'une façon particulière, de (13). Nous pouvons, pour simplifier, supposer que toutes les fonctions de la suite (13) tendent uniformément vers $y_\infty(x)$.

10. La fonction $y_\infty(x)$ satisfait évidemment aux conditions (12). Nous nous proposons de démontrer qu'elle est absolument continue, c'est-à-dire que, ayant choisi d'avance un nombre positif ε quelconque, il est possible de déterminer δ de façon que, si $(x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22}), \dots, (x_{s1}, x_{s2})$, sont des intervalles de (a, b) (sans parties communes) dont les longueurs ont une somme moindre que δ , on ait

$$\left| \sum_1^s \{y_\infty(x_{r2}) - y_\infty(x_{r1})\} \right| \leq \varepsilon,$$

cela quel que soit s .

Posons $(b - a) \left(M^{1+\alpha} + \frac{1}{m_1} N \right) + C = B$ et désignons par e_n un ensemble mesurable quelconque de points tels que l'on ait pour eux

$$|y'_n| > \left(\frac{2B}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha}};$$

nous aurons, d'un côté, d'après (15),

$$\int_{e_n} |y'_n|^{1+\alpha} dx < \int_a^b |y'_n|^{1+\alpha} dx < B,$$

de l'autre

$$\int_{e_n} |y'_n|^{1+\alpha} dx = \int_{e_n} |y'| |y'|^\alpha dx > \frac{2B}{\varepsilon} \int_{e_n} |y'_n| dx,$$

d'où

$$(16) \quad \int_{e_n} |y'_n| dx < \frac{\varepsilon}{2} :$$

cela est vrai quel que soit n et pour tous les ensembles e_n . En outre, si e'_n désigne un ensemble mesurable quelconque tel que, pour tous ses points,

$$|y'_n| \leq \left(\frac{2B}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

on aura

$$(17) \quad \int_{e'_n} |y'_n| dx < \left(\frac{2B}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha}} m(e'_n).$$

Soit $\delta < \left(\frac{\varepsilon}{2B} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$. Nous aurons

$$\left| \sum_1^s \{y_n(x_{r2}) - y_n(x_{r1})\} \right| \leq \sum_1^s |y_n(x_{r2}) - y_n(x_{r1})| \leq \sum_1^s \int_{x_{r1}}^{x_{r2}} |y'_n| dx = \int_{e_n} |y'_n| dx + \int_{e'_n} |y'_n| dx$$

en désignant maintenant par e_n et e'_n ceux des ensembles précédents dans lesquels se

décompose l'ensemble des points de tous les intervalles (x_{r_1}, x_{r_2}) . Des inégalités (16) et (17), en remarquant aussi que $m(e'_n) < \delta$, nous tirons

$$\left| \sum_{r=1}^s \{y_n(x_{r_2}) - y_n(x_{r_1})\} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{2B}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Puisque cette inégalité subsiste quelque soit n , on aura pour $n \rightarrow \infty$

$$\left| \sum_{r=1}^s \{y_\infty(x_{r_2}) - y_\infty(x_{r_1})\} \right| \leq \varepsilon,$$

vraie pour tout $\delta < \left(\frac{\varepsilon}{2B} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ et pour tout s .

L'absolue continuité de $y_\infty(x)$ est, ainsi, tout à fait établie ²⁵). Nous pouvons donc affirmer que la dérivée $y'_\infty(x)$ existe déterminée et finie presque partout et que l'on a

$$y_\infty(x) = y_\infty(a) + \int_a^x y'_\infty(x) dx.$$

11. Comme l'intégrale $J(y_n)$ demeure, d'après (14), toujours inférieure à un nombre fixe, il s'ensuit, en vertu de la proposition du n. 6 qu'il existe aussi l'intégrale $J(y_\infty)$ déterminée et finie. La fonction $y_\infty(x)$ est donc une de nos fonctions (n. 2).

12. Si nous nous appuyons à la semi-continuité inférieure démontrée au Chapitre I, nous pouvons affirmer que, puisque

$$J(y_\infty) < J(y_n) + \sigma$$

pour tout σ positif arbitraire et pour tout n plus grand qu'un indice n , qui dépend de σ , on doit avoir

$$J(y_\infty) < \lim_{n \rightarrow \infty} J(y_n) + \sigma = i + \sigma$$

$$J(y_\infty) \leq i.$$

Or i est la limite inférieure de l'intégrale correspondant aux fonctions $y(x)$ du n. 2 qui satisfont aux conditions (12), donc

$$J(y_\infty) = i,$$

c'est-à-dire la fonction $y = y_\infty(x)$ donne le minimé absolu pour l'intégrale J par rapport à toutes les fonctions que nous considérons dans ce chapitre. Nous pouvons, ainsi, énoncer la proposition suivante.

Les conditions I) et II) (n. 1) étant vérifiées, il existe au moins une fonction $y = y(x)$ minimant l'intégrale

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

parmi toutes les fonctions absolument continues qui satisfont aux conditions

$$y(a) = p_a, \quad y(b) = p_b.$$

²⁵) L'existence d'une fonction limite $y_\infty(x)$ pour la suite (13) et la continuité absolue de cette y_∞ pouvaient se déduire aussi d'un théorème général démontré par M. RIESZ [l. c. ²²), § 7].

CHAPITRE III.

L'équation d'Euler.

13. Nous nous proposons maintenant d'établir que la fonction $y = y_\infty(x)$ est une extrémale, c'est-à-dire qu'elle satisfait à l'équation d'EULER relative à l'intégrale J . Nous supposons dans les n^{os} suivants, que la condition I) soit vérifiée de la façon suivante: pour chaque point (\bar{x}, \bar{y}) du champ considéré, il n'existe pas d'intervalles de valeurs de y' où la $f_{y',2}(\bar{x}, \bar{y}, y')$ soit toujours nulle. Nous appellerons I') la condition I) ainsi précisée.

Nous allons démontrer, à l'appui des hypothèses I'), II), que s'il existe les intégrales

$$\int_a^b f_y(x, y_\infty, y'_\infty) dx, \quad \int_a^b f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty) dx$$

et si l'on a toujours

$$(18) \quad \int_a^b \{ \omega f_y(x, y_\infty, y'_\infty) + \omega' f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty) \} dx = 0 \quad ^{26})$$

où ω est une fonction quelconque ayant une dérivée ω' finie et continue dans tout l'intervalle (a, b) et satisfaisant à la condition $\omega(a) = \omega(b) = 0$, la fonction $y = y_\infty(x)$ a partout la dérivée finie et continue et satisfait à l'équation d'EULER

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0.$$

Intégrons par parties le premier terme de l'intégrale (18). Nous avons

$$(19) \quad \int_a^b \omega' \left\{ f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty) - \int_a^x f_y(x, y_\infty, y'_\infty) dx \right\} dx = 0$$

et, appliquant le lemme de DU BOIS REYMOND, nous avons presque partout

$$(20) \quad f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty) - \int_a^x f_y(x, y_\infty, y'_\infty) dx = C,$$

où C est une constante.

On peut justifier ainsi l'application du lemme de DU BOIS REYMOND, démontré presque toujours sous des conditions bien plus restrictives que celles où nous nous sommes placés. Nous remarquons d'abord que toute intégrale admet, presque partout, la fonction à intégrer comme dérivée. Nous choisissons, ensuite, deux points arbitraires,

²⁶⁾ On verra dans la suite (n^o 30) que, si l'on a toujours $f_{y',2} > 0$ et si $f_y(x, y_\infty, y'_\infty)$ est intégrable, sera intégrable $f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty)$ aussi et la condition (18) sera satisfaite. Dans le cas des intégrales sous forme paramétrique $\int F ds$ avec $F > 0$, $F_1 > 0$, les conditions du théorème que nous allons démontrer sont aussitôt vérifiées.

d'abscisses $\alpha_1, \alpha_2 (\alpha_1 < \alpha_2)$, dans lesquels la dérivée de l'intégrale

$$\int_a^x \omega' \left\{ f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty) - \int_a^x f_y(x, y_\infty, y'_\infty) dx \right\} dx$$

est précisément la fonction sous le signe \int . Soit δ un nombre arbitraire $< \alpha_2 - \alpha_1$ et aussi $< b - \alpha_2$.

Définissons la fonction ω de la manière suivante

$$\begin{aligned} \omega &= 0 && \text{dans } (a, \alpha_1) \text{ et } (\alpha_2 + \delta, b), \\ \omega &= \delta && \text{» } (\alpha_1 + \delta, \alpha_2), \\ \omega &= x - \alpha_1 && \text{» } (\alpha_1, \alpha_1 + \delta), \\ \omega &= \delta - x + \alpha_2 && \text{» } (\alpha_2, \alpha_2 + \delta). \end{aligned}$$

On a alors, d'après (19)

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \delta} \left(f_{y'} - \int_a^x f_y dx \right) dx = \int_{\alpha_2}^{\alpha_2 + \delta} \left(f_{y'} - \int_a^x f_y dx \right) dx$$

et, en divisant tout par δ , on a à la limite ($\delta \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} f_{y'}[\alpha_1, y_\infty(\alpha_1), y'_\infty(\alpha_1)] - \int_a^{\alpha_1} f_y(x, y_\infty, y'_\infty) dx \\ = f_{y'}[\alpha_2, y_\infty(\alpha_2), y'_\infty(\alpha_2)] - \int_a^{\alpha_2} f_y(x, y_\infty, y'_\infty) dx. \end{aligned}$$

14. De l'absolue continuité de $y_\infty(x)$ et de l'égalité (20), vérifiée *presque partout*, nous déduisons que, sauf tout au plus un ensemble Ω de mesure nulle, la dérivée y'_∞ est déterminée et finie de sorte que dans $C(\Omega)$ [ensemble complémentaire de Ω] la (20) est vérifiée partout. Soit \bar{x} un point quelconque de Ω . Nous disons que, si un point quelconque x de $C(\Omega)$ tend vers \bar{x} , $y'_\infty(x)$ tend vers une limite unique et finie. Écrivons (20) sous cette forme

$$(21) \quad f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty) = C + \int_a^x f_y(x, y_\infty, y'_\infty) dx.$$

Lorsque x tend vers \bar{x} en demeurant toujours dans $C(\Omega)$, le second membre de cette égalité tend vers une limite déterminée et finie. Il doit, alors, en être de même pour le premier membre. Nous disons que les limites d'indétermination de y'_∞ pour $x \rightarrow \bar{x}$ sont finies [x demeurant toujours dans $C(\Omega)$].

En effet, puisque l'on a

$$f(x, y_\infty, y'_\infty) = f(x, y_\infty, 0) + y'_\infty f_{y'}(x, y_\infty, \bar{y}'),$$

où \bar{y}' est une valeur déterminée comprise entre 0 et y'_∞ , il vient, d'après II), pour tous les points où $|y'_\infty| \geq M$

$$y'_\infty f_{y'}(x, y_\infty, \bar{y}') = f(x, y_\infty, y'_\infty) - f(x, y_\infty, 0) > m_1 |y'_\infty|^{1+\alpha} - N_4$$

où m_1 est le nombre défini au n. 9 et N_4 désigne le maximé de $f[x, y_\infty(x), 0]$. A

cause de I'), on a $y'_\infty f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty) > y'_\infty f_{y'}(x, y_\infty, \bar{y}'_\infty)$ et par conséquent

$$y'_\infty f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty) > m_1 |y'_\infty|^{1+\alpha} - N_4.$$

Cette inégalité montre que, si $y'_\infty \rightarrow \pm \infty$, on a aussi $f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty) \rightarrow \pm \infty$. Donc les limites d'indétermination l, L de y'_∞ sont finies. Ce point établi, il s'ensuit, d'après I'), que les limites l, L doivent être égales. En effet, comme nous devons avoir

$$f_{y'}[\bar{x}, y_\infty(\bar{x}), l] = f_{y'}[\bar{x}, y_\infty(\bar{x}), L]$$

nous devons avoir aussi pour tous les ε compris entre 0 et 1,

$$f_{y',2}[\bar{x}, y_\infty(\bar{x}), l + \varepsilon(L - l)] = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse I').

Posons, maintenant, pour tout \bar{x} de l'ensemble Ω ,

$$y'_\infty(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} \widehat{y}'_\infty(\bar{x})$$

où x fait toujours partie de l'ensemble $C(\Omega)$, et posons pour tous les x de $C(\Omega)$

$$y'_\infty(x) = \widehat{y}'_\infty(x).$$

Le raisonnement que nous avons fait tout à l'heure prouve qu'on a, pour tous les points de (a, b) , l'égalité

$$f_{y'}(x, y'_\infty, \widehat{y}'_\infty) = C + \int_a^x f_y(x, y'_\infty, \widehat{y}'_\infty) dx$$

et que la $\widehat{y}'_\infty(x)$ est finie et continue dans tout l'intervalle. Or puisque y'_∞ e \widehat{y}'_∞ ne diffèrent que dans un ensemble (Ω) de mesure nulle et que l'on a

$$y_\infty(x) = y_\infty(a) + \int_a^x y'_\infty(x) dx,$$

on aura aussi

$$y_\infty(x) = y_\infty(a) + \int_a^x \widehat{y}'_\infty(x) dx.$$

Cela prouve que $\widehat{y}'_\infty(x)$ est vraiment la dérivée de $y_\infty(x)$ dans tous les points de (a, b) . Donc nous pouvons conclure que $y_\infty(x)$ a une dérivée finie et continue dans tout l'intervalle (a, b) et que sur cet intervalle se vérifie l'égalité (21). En dérivant (21), on a

$$\frac{d}{dx} f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty) = f_y(x, y_\infty, y'_\infty).$$

Par conséquent notre proposition du n. 13 est tout à fait démontrée.

15. À l'aide du raisonnement bien connu de M. HILBERT on prouve que, dans les points où $f_{y',2} > 0$, existe aussi, finie et continue, la dérivée seconde $y''_\infty(x)$, de sorte que l'équation d'EULER peut s'écrire

$$y'' f_{y',2} + y' f_{y',y} + f_{y',x} - f_y = 0.$$

16. Nous avons un cas, où sont satisfaites les conditions du théorème du n. 13 si les deux hypothèses suivantes sont en même temps, vérifiées:

1°) que la I') soit satisfaite;

2°) 27) que l'on ait toujours $f > -N$ et que la partie principale de f , pour $|y'| \rightarrow \infty$, soit — tant au point de vue du calcul de la fonction elle-même qu'à celui de ses dérivées — $P(x, y) \cdot |y'|^{1+\alpha}$ 28) où l'on a $\alpha > 0$ et P est une fonction finie et continue avec ses dérivées partielles des deux premiers ordres. En outre, soit toujours $P > 0$ et

$$m_y |y'|^{1+\alpha} \rightarrow \infty,$$

où m_y désigne le minimum de P pour toutes les abscisses de l'intervalle (a, b) et pour toutes les ordonnées en valeur absolue $\leq |y|$.

Nous désignerons par II') cette condition, qui remplace II).

Nous remarquons, d'abord, que les fonctions $f_y[x, y_\infty(x), y'_\infty(x)]$, $f_{y'}[x, y_\infty(x), y'_\infty(x)]$ sont intégrables. En effet, leurs parties principales, pour $|y'| \rightarrow \infty$, sont respectivement,

$$P_y(x, y_\infty) |y'_\infty|^{1+\alpha}, \quad \pm P(x, y_\infty) |y'_\infty|^\alpha,$$

et l'on a, pour toute la courbe $y = y_\infty(x)$ et pour un certain nombre positif H ,

$$|P_y(x, y_\infty)| |y'_\infty|^{1+\alpha} < H \cdot P(x, y_\infty) |y'_\infty|^{1+\alpha},$$

$$P(x, y_\infty) |y'_\infty|^\alpha < P(x, y_\infty) \{ |y'_\infty|^{1+\alpha} + 1 \}.$$

De l'intégrabilité de f il découle donc celle de $f_y, f_{y'}$.

17. Passons maintenant à l'égalité (18) et considérons une variation $\omega(x)$ telle qu'elle-même et sa dérivée ω' soient dans l'intervalle (a, b) finies et continues et que l'on ait, en outre, $\omega(a) = \omega(b) = 0$.

Si nous posons

$$y_i(x) = y_\infty(x) + t\omega(x),$$

cette fonction $y_i(x)$ résulte absolument continue. Nous démontrerons que pour $y = y_i(x)$ l'intégrale J est finie. Nous savons que l'intégrale

$$\int_a^b P(x, y_\infty) |y'_\infty|^{1+\alpha} dx$$

est finie et qu'elle est plus grande que $p \int_a^b |y'|^{1+\alpha} dx$, où p désigne le minimum de $P(x, y)$ dans un voisinage de la courbe $y = y_\infty(x)$ lequel contienne $y = y_i(x)$. Si, maintenant, nous désignons par Π le maximum de la fonction $P(x, y)$ dans le même voisinage, nous aurons

$$P(x, y_i) |y'_\infty|^{1+\alpha} < \Pi |y'_\infty|^{1+\alpha}$$

27) Cfr. HADAMARD, l. c. 8) a), pag. 90.

28) Précisément, ayant fixé un nombre positif Y , on doit pouvoir déterminer deux nombres positifs M, M_1 , de sorte que, pour toutes les $|y'| \geq M$ et pour toutes les x de l'intervalle (a, b) et les y de $-\infty$ à $+\infty$, on ait

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x, y, y')}{P(x, y) |y'|^{1+\alpha}} < M_1$$

ainsi que, pour les mêmes valeurs de y' et de x , et pour les $|y| \leq Y$, l'on ait

$$|f_y(x, y, y')| < M_1 |P_y(x, y)| |y'|^{1+\alpha}, \quad |f_{y'}(x, y, y')| < M_1 \cdot P(x, y) |y'|^\alpha.$$

et nous en déduisons qu'il existe l'intégrale

$$\int_a^b P(x y_i) |y'_i|^{1+\alpha} dx$$

[laquelle résulte

$$< \frac{\Pi}{p} \int_a^b P(x y_\infty) |y'_\infty|^{1+\alpha} dx].$$

Appliquons l'inégalité (11), en désignant toujours par E_r l'ensemble des points où $|y'_\infty| \geq r$:

$$\begin{aligned} \int_{C(E_r)} P(x y_i) |y'_i|^{1+\alpha} dx &= \int_{C(E_r)} |P^{1+\alpha} y'_\infty + P^{1+\alpha} t \omega'|^{1+\alpha} dx \\ &\leq \left[\int_{C(E_r)} P |y'_\infty|^{1+\alpha} dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} + t \left[\int_{C(E_r)} P |\omega'|^{1+\alpha} dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \\ &\leq \left[\int_a^b P |y'_\infty|^{1+\alpha} dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} + t \left[\int_a^b P |\omega'|^{1+\alpha} dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Donc, l'intégrale

$$\int_a^b P(x y_i) |y'_i|^{1+\alpha} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C(E_r)} P(x y_i) |y'_i|^{1+\alpha} dx$$

est finie et, par conséquent, il en est de même de

$$J(y_i) = \int_a^b f(x, y_i, y'_i) dx.$$

18. Cela posé, remarquons que, puisque pour $t = 0$ il doit y avoir le minimum de $J(y_i)$, on doit avoir aussi

$$(22) \quad \left[\frac{d}{dt} J(y_i) \right]_{t=0} = 0.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} J(y_i) - J(y_0) &= \int_a^b \{f(x, y_i, y'_i) - f(x, y_\infty, y'_\infty)\} dx \\ &= t \int_a^b \{\omega f_y(x, y_\infty + t\theta_x \omega, y'_\infty + t\theta_x \omega') + \omega' f_{y'}(\dots)\} dx \end{aligned}$$

que nous pouvons écrire

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{J(y_i) - J(y_0)}{t} &= \int_a^b \{\omega f_y(x, y_\infty, y'_\infty) + \omega' f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty)\} dx \\ &+ \int_a^b [\omega \{f_y(x, y_\infty + t\theta_x \omega, y'_\infty + t\theta_x \omega') - f_y(x, y_\infty, y'_\infty)\} \\ &+ \omega' \{f_{y'}(x, y_\infty + t\theta_x \omega, y'_\infty + t\theta_x \omega') - f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty)\}] dx. \end{aligned} \right.$$

Considérons la seconde intégrale de cette égalité: nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{E_r} [\omega \{f_y(x, y_\infty + t\theta_x \omega, y'_\infty + t\theta_x \omega') - f_y(x, y_\infty, y'_\infty)\} + \omega' \{ \dots \}] dx \\ &= \int_{E_r} [\omega f_y(x, y_\infty + t\theta_x \omega, y'_\infty + t\theta_x \omega') + \omega' f_{y'}(x, y_\infty + t\theta_x \omega, y'_\infty + t\theta_x \omega')] dx \\ & \quad - \int_{E_r} [\omega f_y(x, y_\infty, y'_\infty) + \omega' f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty)] dx. \end{aligned}$$

Choisissons le nombre r_1 tel que pour $r > r_1$ la dernière intégrale de cette égalité soit en valeur absolue $< \frac{\varepsilon}{2}$, ε étant arbitrairement petit. Pour $r > r_1$, la seconde intégrale de la même égalité résulte en valeur absolue inférieure à $\int_{E_r} Q \{ |y'_\infty| + |\omega'| \}^{1+\alpha} dx$, où Q est un nombre positif convenablement choisi, et cela pour tous les t tels que $|t| < 1$. [C'est une conséquence de l'inégalité $|y'_\infty + t\theta_x \omega'| < |y'_\infty| + |\omega'|$ et de l'hypothèse II'). Or, puisque l'on a, en vertu de l'inégalité (II)

$$\int_{E_r} \{ |y'_\infty| + |\omega'| \}^{1+\alpha} dx \leq \left[\int_{E_r} |y'_\infty|^{1+\alpha} dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} + \left[\int_{E_r} |\omega'|^{1+\alpha} dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

on aura, pour tous les $r > r_1$,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{E_r} [\omega f_y(x, y_\infty + t\theta_x \omega, y'_\infty + t\theta_x \omega') + \omega' f_{y'}(x, y_\infty + t\theta_x \omega, y'_\infty + t\theta_x \omega')] dx \right| \\ & \leq Q \left[\left\{ \int_{E_r} |y'_\infty|^{1+\alpha} dx \right\}^{\frac{1}{1+\alpha}} + \left\{ \int_{E_r} |\omega'|^{1+\alpha} dx \right\}^{\frac{1}{1+\alpha}} \right]^{1+\alpha}; \end{aligned}$$

le second membre tendant vers zero avec $\frac{1}{r}$, nous aurons, pour une certaine valeur r_2 (et pour toutes les successives) et pour tous les t tel que $|t| < 1$,

$$\left| \int_{E_{r_2}} [\omega \{f_y(x, y_\infty + t\theta_x \omega, y'_\infty + t\theta_x \omega') - f_y(x, y_\infty, y'_\infty)\} + \omega' \{ \dots \}] dx \right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Considérons la même intégrale étendue à l'ensemble $C(E_{r_2})$. Puisque, dans l'ensemble $C(E_{r_2})$ on a $|y'_\infty| < r_2$, l'intégrale en question, pour t suffisamment petit, résulte en valeur absolue $< \frac{\varepsilon}{3}$. On a donc, pour tous les t tel que $|t| < t_1$,

$$\left| \int_a^b [\omega \{f_y(x, y_\infty + t\theta_x \omega, y'_\infty + t\theta_x \omega') - f_y(x, y_\infty, y'_\infty)\} + \omega' \{ \dots \}] dx \right| < \varepsilon;$$

ε étant arbitraire, l'égalité (23) montre qu'il existe la dérivée $\left[\frac{d}{dt} J(y, t) \right]_{t=0}$, laquelle nous est donnée précisément par l'intégrale

$$\int_a^b \{ \omega f_y(x, y_\infty, y'_\infty) + \omega' f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty) \} dx.$$

En vertu de l'égalité (22) cette intégrale est nulle. Par le théorème du n. 13, nous pouvons donc conclure que:

Les hypothèses I'), II') étant vérifiées, chaque fonction $y(x)$ (n. 2) minimant l'intégrale J , a partout la dérivée finie et continue et satisfait à l'équation différentielle d'EULER.

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0.$$

19. La condition II') entraîne nécessairement l'exclusion des fonctions $f(x, y, y')$ d'ordre infini (pour $|y'| \rightarrow \infty$). Revenons maintenant à la condition II) pour étudier, en général, la marche des fonctions $y = y(x)$, qui miniment J par rapport à l'équation d'EULER. Pour éviter, dans la suite, des discussions trop longues, nous supposerons qu'au lieu de la I), se trouve vérifiée la condition

$$I'') \quad f_{y'^2} > 0.$$

En nous servant du résultat du nombre précédent, nous montrerons d'abord que la courbe minimante satisfait à l'équation différentielle d'EULER, si ses limites sont suffisamment voisines et si, en outre, le rapport entre la différence des ordonnées de ces limites et celle des abscisses correspondantes reste bornée; de là nous passerons ensuite au cas général.

20. Soient R un nombre positif $> M$ et Y un autre nombre positif quelconque. Considérons la fonction $F(x, y, y')$ définie de la façon suivante: pour tout système de valeurs x, y, y' satisfaisant aux conditions

$$a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad |y'| \leq R$$

ou à ces autres

$$a \leq x \leq b, \quad |y| \geq 2Y, \quad -\infty < y' < +\infty$$

on a

$$F(x, y, y') = f(x, y, y').$$

En outre, on donne, pour toutes les valeurs précédentes de x et pour toutes les valeurs de y et de y' satisfaisant aux inégalités $|y| < 2Y, |y'| > R$, une définition de la fonction F qui répond aux conditions suivantes:

1) les dérivées partielles $F_x, F_y, F_{y'}, F_{xy'}, F_{y'y}, F_{y'^2}$, existent toujours finies et continues (aussi pour $|y| = 2Y$ et $|y'| = R$);

2) on a $F < f$;

3) on a $F_{y'^2} > 0$;

4) F , est toujours $> \frac{1}{2} |y'|^{1+\alpha} m_{2Y}^{29}$ [m_{2Y} étant le minimum de $m(y)$ pour $|y| \leq 2Y$], et l'on peut déterminer un nombre $R_1 > R$ tel que l'inégalité $|y'| \geq R_1$, entraîne

$$F = |y'|^{1+\alpha} m_{2Y}, \text{ pour tout } x \text{ de } (a, b) \text{ et pour tout } y \text{ de } \left(-\frac{3Y}{2}, \frac{3Y}{2}\right).$$

Cela est possible d'une infinité de manières.

²⁹⁾ Rappelons qu'en vertu de II), on a pour les points $(x, y, \pm R)$, $f > |y'|^{1+\alpha} m(y)$.

21. Considérons l'équation des extrémales

$$y'' = \frac{F_y - F_{y'x} - y' F_{y'y}}{F_{y'^2}}$$

et la fonction de x, y, y' , qui apparaît dans le second membre de cette même équation. Soit D la valeur absolue maximée d'une telle fonction par rapport à tous les points du rectangle $\Delta (a \leq x \leq b, |y| \leq \frac{3}{2} Y)$ et à tous les y' tels que $|y'| \leq R_1$. Comme dans le même rectangle et pour $|y'| \geq R_1$ subsiste l'égalité $F = |y'|^{1+\alpha} m_{2Y}$ et, par conséquent, l'autre égalité

$$\frac{F_y - F_{y'x} - y' F_{y'y}}{F_{y'^2}} = 0,$$

on conclut que toute extrémale demeurant complètement dans Δ satisfait à l'inégalité $|y''| \leq D$ et aussi à l'autre

$$(24) \quad |y'(x_1) - y'(x_2)| \leq D|x_1 - x_2|$$

avec $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

22. Choisissons dans Δ deux points: $P_0(x_0, y_0)$, tel que l'on ait $a \leq x_0 < b, |y_0| \leq Y$, et $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$, tel que $x_0 < \bar{x}$ et

$$\frac{\bar{y} - y_0}{\bar{x} - x_0} > R + D(\bar{x} - x_0).$$

En vertu de la définition de la fonction F et de ce que nous avons établi au n. 12, il existe au moins une courbe $[y = y(x)]$ qui joint les points P_0, \bar{P} , et qui minimise l'intégrale $\int_{x_0}^{\bar{x}} F(x, y, y') dx$. En outre, d'après les conditions 1) et 4) et d'après le résultat du n. 18, tous les arcs de cette courbe intérieurs à Δ sont des arcs d'extrémales et ils ont, en tout leurs points, les dérivées y' et y'' finies et continues. Considérons une des courbes minimantes, dont nous venons de parler. Sa partie, qui commence en P_0 et qui reste toute dans Δ , aboutira à un point $\bar{P}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ (qui peut coïncider avec \bar{P}) pour lequel on aura

$$\frac{\bar{y}_0 - y_0}{\bar{x}_0 - x_0} > R + D(\bar{x}_0 - x_0).$$

Dans cet arc (arc d'extrémale) il y a, alors, un point d'abscisse x' où l'on a

$$y'(x') > R + D(\bar{x}_0 - x_0).$$

Mais comme l'on a, d'après (24),

$$y'(x_0) > y'(x') - D(x' - x_0) > y'(x') - D(\bar{x}_0 - x_0)$$

on a aussi

$$y'(x_0) > R.$$

Si nous prenons dans l'arc d'extrémale considéré un point P_1 suffisamment voisin de P_0 , nous aurons que tout l'arc $\widehat{P_0 P_1}$ (qui demeure toujours dans Δ) reste en dehors

et au-dessus de l'angle qui a pour sommet P_0 et pour côtés les droites $y - y_0 = \pm R(x - x_0)$. De même, l'on trouve un arc d'extrémale $\widehat{P_0 P_2}$, qui minimise $\int_{x_0}^{x_2} F dx$ et qui, en demeurant toujours dans Δ , reste tout en dehors et au-dessous du même angle. Nous pourrions supposer égales les abscisses de P_1 et P_2 et les désigner par $x_0 + d$, supposant $d > 0$ et $< \frac{R}{2D}$.

23. Prenons maintenant, un point quelconque $P(xy)$ intérieur à l'angle de sommet P_0 et de côtés $y - y_0 = \pm \frac{R}{2}(x - x_0)$ (en entendant par partie intérieure celle qui contient la parallèle à l'axe des x), c'est-à-dire prenons un point P tel que l'on ait

$$\left| \frac{y - y_0}{x - x_0} \right| \leq \frac{R}{2},$$

et, en outre, $x_0 < x \leq x_0 + d$. Soit $C[y = y(x)]$ une courbe minimant $\int F dx$ qui joint P_0 et P . Si elle n'était pas toute entière comprise entre les deux arcs d'extrémale $\widehat{P_0 P_1}$, $\widehat{P_0 P_2}$, dont nous venons de parler, on pourrait considérer la courbe C_1 , composée des deux arcs $\widehat{P_0 P'}$, $\widehat{P' P}$, dont le premier appartient à l'extrémale $\widehat{P_0 P_1}$ ou à $\widehat{P_0 P_2}$ et le second à C , P' étant le dernier des points de C qui appartiennent à l'une ou l'autre des deux extrémales $\widehat{P_0 P_1}$, $\widehat{P_0 P_2}$. Les deux courbes C et C_1 donneraient la même valeur à l'intégrale de F et la C_1 , comme courbe minimante intérieure à Δ serait une extrémale et aurait une ordonnée y_1 avec les dérivées première et seconde finies et continues. En désignant alors par x' une abscisse (qui existerait certainement) telle que $y_1'(x') = \frac{R}{2}$, C_1 étant intérieure à Δ , on aurait d'après (24)

$$|y_1'(x) - y_1'(x')| < D \cdot d < \frac{R}{2},$$

$$|y_1'(x)| < R.$$

Cette inégalité prouverait que C_1 ne pourrait avoir réellement des points communs avec $\widehat{P_0 P_1}$ ou $\widehat{P_0 P_2}$, parce que, sur ces extrémales la dérivée, pour $x = x_0$, est en valeur absolue $\geq R$. On en conclut, par conséquent, que la courbe C est comprise entre $\widehat{P_0 P_1}$ et $\widehat{P_0 P_2}$ et qu'elle aussi est une extrémale et satisfait à l'inégalité $|y'(x)| < R$. Il s'ensuit encore, en vertu de la définition même de F , que C est aussi une extrémale pour $\int f dx$ et que l'on a

$$\int_C F dx = \int_C f dx.$$

Voyons, maintenant si elle minimise l'intégrale de f . Considérons une autre courbe possible C_2 , qui joint P_0 et P ; nous avons

$$\int_C F dx \leq \int_{C_2} F dx$$

et, à cause de la condition 2) du n. 20,

$$\int_{C_2} F dx \leq \int_{C_2} f dx;$$

donc

$$\int_C f dx \leq \int_{C_2} f dx.$$

Mais nous pouvons aller plus loin. Si les points de (x_0, x) pour lesquels la dérivée de l'ordonnée y_2 de C_2 est plus grande en valeur absolue que R forment un ensemble de mesure non nulle, on a

$$\int_{C_2} F dx < \int_{C_2} f dx$$

et par conséquent

$$\int_C f dx < \int_{C_2} f dx.$$

Si donc, il existe l'égalité $\int_C f dx = \int_{C_2} f dx$, l'ensemble, dont nous venons de parler, est de mesure nulle. Mais comme nous pouvons le négliger, les conditions du théorème du n. 13 sont satisfaites et C_2 est une extrémale. Ce n'est pas tout. Puisque la dérivée y'_2 est toujours, en valeur absolue, $\leq R$, C_2 est comprise toute entière entre les deux arcs $\widehat{P_0 P_1}$ et $\widehat{P_0 P_2}$ et, par conséquent, elle aussi est intérieure à Δ . Désignons par y l'ordonnée de C et posons $\Delta y = y_2(x) - y(x)$, $\Delta y' = y'_2(x) - y'(x)$. Nous aurons

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_2, y'_2) dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx = \int_{x_0}^{x_1} \{ \Delta y \cdot f_{y_2}(x, y, y') + \Delta y' \cdot f_{y'_2}(x, y, y') \} dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \{ \overline{\Delta y}^2 f_{y_2^2}(x, y + \theta \Delta y, y' + \theta \Delta y') + 2 \Delta y \cdot \Delta y' f_{y_2 y'_2}(\dots) + \overline{\Delta y}^2 f_{y_2'^2}(\dots) \} dx,$$

et puisque $y = y(x)$ est une extrémale, la première intégrale du second membre disparaît et il reste

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_2, y'_2) dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \{ \overline{\Delta y}^2 f_{y_2^2}(\dots) + 2 \Delta y \Delta y' f_{y_2 y'_2}(\dots) + \overline{\Delta y}^2 f_{y_2'^2}(\dots) \} dx.$$

Désignons par Φ un nombre positif plus grand que les maximales des valeurs absolues de f_{y_2} et $f_{y'_2}$ pour tous les points (x, y) de Δ et pour tout y' tel que $|y'| \leq R$; indiquons, ensuite, par φ le minimum (> 0) de $f_{y_2^2}$ pour les mêmes valeurs de x, y, y' .

Il vient, alors,

$$\int_{x_0}^{x_1} \{ \overline{\Delta y}^2 f_{y_2^2}(\dots) + 2 \Delta y \Delta y' f_{y_2 y'_2}(\dots) + \overline{\Delta y}^2 f_{y_2'^2}(\dots) \} dx > \int_{x_0}^{x_1} \{ - \Phi \cdot \overline{\Delta y}^2 - 2 \Phi |\Delta y \cdot \Delta y'| + \varphi \overline{\Delta y}^2 \} dx.$$

Comme nous avons $\Delta y = \int_{x_0}^x \Delta y' dx$, en nous appuyant sur l'inégalité de SCHWARZ, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \overline{\Delta y}^2 &= \left(\int_{x_0}^x \Delta y' dx \right)^2 \leq (x - x_0) \int_{x_0}^x \overline{\Delta y'^2} dx, \\ \int_{x_0}^x \overline{\Delta y^2} dx &< \frac{(x - x_0)^2}{2} \int_{x_0}^x \overline{\Delta y'^2} dx < d^2 \int_{x_0}^x \overline{\Delta y'^2} dx \end{aligned}$$

étant $x - x_0 \leq d$. De même, toujours par suite de l'inégalité de SCHWARZ,

$$\int_{x_0}^x |\Delta y \cdot \Delta y'| dx \leq \sqrt{\int_{x_0}^x \overline{\Delta y^2} dx} \cdot \sqrt{\int_{x_0}^x \overline{\Delta y'^2} dx} < d \int_{x_0}^x \overline{\Delta y'^2} dx.$$

Donc

$$\int_{x_0}^x \{ \overline{\Delta y^2} f_{y_2}(\dots) + 2 \Delta y \Delta y' f_{yy'}(\dots) + \overline{\Delta y'^2} f_{y_2}(\dots) \} dx > (\varphi - 2d\Phi - \Phi d^2) \int_{x_0}^x \overline{\Delta y'^2} dx.$$

Ainsi, si nous choisissons le nombre $d < -1 + \sqrt{1 + \frac{\Phi}{\varphi}}$, nous avons

$$\int_{x_0}^x f(x, y_2, y_2') dx > \int_{x_0}^x f(x, y, y') dx.$$

Il reste, par conséquent, démontré que tout point intérieur à l'angle de sommet P_0 et de côtés $y - y_0 = \pm \frac{R}{2}(x - x_0)$, dont l'abscisse est comprise entre x_0 et $x_0 + d$, peut être joint avec P_0 par une extrémale, qui minimise l'intégrale de f et, plus précisément, qui la rend plus petite que toute autre courbe [$y = y(x)$] joignant les mêmes points.

Rappelons que R est un nombre positif que nous avons fixé, à notre choix, plus grand que M , tandis que d dépend de R .

24. Ayant fixé R , existe-t-il un même d pour tous les points P_0 possibles, tels que $|y_0| \leq Y$? Considérons le rectangle $a \leq x \leq b' < b$, $|y| \leq Y$, et un de ses points $P(x, y)$. Soit d le plus grand nombre positif tel que chaque point intérieur au triangle borné par les droites $\bar{y} - y = \pm \frac{R}{2}(\bar{x} - x)$, $\bar{x} = x + d$ (x et y , coordonnées de P) puisse être joint avec P par une extrémale qui minimise l'intégrale de f et qui est le seul minimé. Désignons par $i(d)$ la limite inférieure de d par rapport à tous les points P du rectangle défini plus haut. Soit $P_0(x_0, y_0)$ un point tel que, dans tous ses voisinages arbitrairement petits, la limite inférieure de d soit $i(d)$. En indiquant par η un nombre positif plus petit que $b - x_0$, considérons les points $P_1(x_0 - \eta, y_0 + \frac{1}{4}Y)$, $P_2(x_0 + \eta, y_0 + \frac{1}{4}Y)$, en convenant de remplacer ici l'abscisse a , à l'abscisse $x_0 - \eta$, si l'on a $x_0 - \eta < a$. Il existe une courbe $C_1[y = y(x)]$, minimant l'intégrale $\int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} F dx$,

qui joint P_1 avec P_2 . En vertu du raisonnement du n. 8, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F dx &> -2\eta N + \frac{1}{2} m_{2Y} \left\{ \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |y'|^{1+\alpha} dx - M^{1+\alpha} 2\eta \right\} \\ &> -\eta(2N + m_{2Y} M^{1+\alpha}) + \frac{1}{2} m_{2Y} \cdot \frac{1}{(2\eta)^\alpha} \delta^{1+\alpha}, \end{aligned}$$

δ étant la différence entre le maximé et le minimé de l'ordonnée y de C_1 . Et comme

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x, y, y') dx \leq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F\left(x, y_0 + \frac{1}{4} Y, 0\right) dx,$$

C_1 étant une minimante pour l'intégrale de F , on a aussi [si nous désignons par \bar{F} le maximé de $F(x, y_0 + \frac{1}{4} Y, 0)$ dans (a, b)]

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x, y, y') dx \leq 2\eta \cdot \bar{F}$$

et, par conséquent,

$$\eta(2\bar{F} + 2N + m_{2Y} M^{1+\alpha}) > \frac{1}{2} m_{2Y} \frac{1}{(2\eta)^\alpha} \delta^{1+\alpha}.$$

Il s'ensuit que δ tend vers zéro avec η .

Nous convenons de choisir η tel que l'on ait $\delta < \frac{1}{8} Y$. La courbe C_1 est, alors, comprise tout entière dans Δ et, en vertu du n. 18, elle est une extrémale. En outre, elle a toutes ses ordonnées $> y_0 + \frac{1}{8} Y$.

De même, on aura une extrémale C_2 qui minimise l'intégrale de F , qui joint les deux points $P'_1(x_0 - \eta, y_0 - \frac{1}{4} Y)$ et $P'_2(x_0 + \eta, y_0 - \frac{1}{4} Y)$, et qui, enfin, demeure tout entière dans Δ et a toutes ses ordonnées $< y_0 - \frac{1}{8} Y$.

Nous supposons (ce qui nous est toujours permis), que l'on ait

$$\eta < \frac{R}{D}, \quad \eta < -1 + \sqrt{1 + \frac{\Phi}{\Phi}}, \quad \eta < \frac{Y}{4(2 + R)}.$$

Soient $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ un point quelconque du cercle $(P_0, \frac{1}{2}\eta)$, $P'(x', y')$ un autre point quelconque intérieur au triangle dont les côtés sont les droites $y - \bar{y} = \pm \frac{R}{2}(x - \bar{x})$, $x = \bar{x} + \frac{\eta}{2}$. Ce triangle est tout entier compris entre les courbes C_1 et C_2 . Il existe certainement une courbe C , joignant les points \bar{P} , P' , comprise entre C_1 et C_2 et qui minimise l'intégrale de F . Cette courbe C , étant ainsi à l'intérieur du rectangle Δ , est une extrémale et satisfait à l'inégalité (24) et, par conséquent, à $|y'(x)| < \frac{R}{2} + \frac{1}{2} D\eta < R$.

De même qu'au n. précédent, nous concluons que l'extrémale C minimise aussi $\int_{\bar{x}}^{x'} f dx$ et donne le seul minimé.

Il est donc prouvé que

$$i(d) \geq \frac{1}{2} \eta > 0.$$

25. Ce que nous venons d'établir quant au triangle considéré de sommet P , nous pouvons l'établir aussi pour le triangle symétrique par rapport au même sommet P , de sorte que nous pouvons en tirer, comme conclusion, la proposition :

Soient vérifiées les hypothèses I'') et II).

Si Y et R sont deux nombres positifs, pris d'avance arbitrairement, on peut déterminer un nombre $d > 0$ tel que, si $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ sont deux points quelconques du rectangle $a \leq x \leq b, |y| \leq Y$ qui satisfont aux conditions

$$|x_2 - x_1| < d, \quad \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| < R,$$

on peut toujours joindre P_1 avec P_2 par une extrémale, et une seule, donnant à l'intégrale de $f(x, y, y')$ une valeur plus petite que toute autre courbe $[y = y(x), \text{ du n. } 2]$ joignant les mêmes points.

26. Cela posé, soit x_0 une abscisse de l'intervalle (a, b) pour laquelle la dérivée $y'_x(x_0)$ soit déterminée et finie. Choisissons le nombre R de l'énoncé précédent égal à $2|y'_x(x_0)|$. Il existe un arc de la courbe $y = y_\infty(x)$, qui comprend comme point intérieur $[x_0, y_\infty(x_0)]$ et qui demeure: 1° dans l'angle complet dont les côtés sont les droites de coefficients de direction $\pm R$ qui passent par $[x_0, y_\infty(x_0)]$; 2° dans le cercle de centre $[x_0, y_\infty(x_0)]$ et de rayon égal au nombre d du théorème du n. précédent. Soient x'_0, x''_0 deux abscisses de cet arc telles que $x'_0 < x_0 < x''_0$. En vertu du théorème rappelé ci-dessus la $y = y_\infty(x)$, dans l'intervalle (x_0, x''_0) , doit être une extrémale, parce que, dans le cas contraire, elle ne pourrait minimiser l'intégrale J . De même, la partie de $y = y_\infty(x)$ correspondante à (x'_0, x_0) doit être aussi un arc d'extrémale. En outre, les deux arcs en question doivent appartenir à la même extrémale, parce que l'arc de $y = y_\infty(x)$ qui correspond à (x'_0, x''_0) , satisfait aux conditions du théorème du n. 13, ayant en tous ses points, la dérivée finie et continue, sauf, tout au plus, au point x_0 , où les dérivées à droite et à gauche sont finies et respectivement continues à droite et à gauche. Nous en concluons que chaque point de (a, b) , pour lequel $y = y_\infty(x)$ a la dérivée finie, est intérieur (dans le sens strict) à un intervalle où la fonction susdite est une extrémale.

Soit (x'_0, x''_0) le maximé d'intervalles pareils qui entourent x_0 . Les intervalles tels que (x'_0, x''_0) constituent, tout au plus, une infinité dénombrable, et les points de (a, b) qui ne sont intérieurs à aucun de ses intervalles, forment un ensemble fermé.

Un tel ensemble est de mesure nulle, parce que ses points son seulement ceux où la dérivée y'_x n'existe pas ou, si elle existe, n'est pas finie. Il s'ensuit que la courbe $y = y_\infty(x)$ est composée, tout au plus, d'une infinité dénombrable d'arcs d'extrémales, dont la somme des longueurs nous donne toujours la longueur totale de la courbe.

Nous nous proposons de voir si dans les points exceptionnels (points de Ω) il existe la dérivée y'_x .

27. Soit $P(\bar{x}, y_\infty(\bar{x}))$ un point de Ω : démontrons que pour ce point $y_\infty(x)$ a la dérivée à droite (finie ou non). Dans l'hypothèse contraire, les deux dérivées à droite, l'une supérieure, l'autre inférieure, résultent distinctes, et nous pouvons choisir une droite

δ passant par P et de coefficient de direction fini et compris entre les deux dérivées dont nous venons de parler. Sur δ , à droite de P , il y a une infinité de points de $y = y_\infty(x)$, qui ont comme point limite le même point P . Choisissons pour le nombre R du théorème du n. 25, le double du coefficient de direction de δ et prenons, sur cette droite, un point P' appartenant à $y = y_\infty(x)$ et assez proche de P , pour que la différence entre son abscisse et \bar{x} soit plus petite que d (voir théorème rappelé). L'arc $\widehat{PP'}$ de $y = y_\infty(x)$ est, alors, une extrémale. $y = y_\infty(x)$ aurait donc pour $x = \bar{x}$ sa dérivée à droite finie, ce qui est contraire à notre hypothèse. Nous en concluons que pour $x = \bar{x}$ il existe effectivement la dérivée à droite de $y_\infty(x)$, finie ou non, et qu'il en est de même pour celle à gauche.

Nous disons que ces deux dérivées sont égales. En effet, supposons-les distinctes et considérons d'abord le cas où l'une d'elles par exemple celle à gauche, est finie. Étant λ la dérivée à gauche, posons $R = 2\lambda$ dans le théorème du n. 25. Choisissons, ensuite, sur $y = y_\infty(x)$ deux points P_1, P_2 d'abscisses $\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon$, avec $\varepsilon < \frac{d}{2}$, de sorte que leurs ordonnées satisfassent à l'inégalité

$$\left| \frac{y_\infty(\bar{x} + \varepsilon) - y_\infty(\bar{x} - \varepsilon)}{(\bar{x} + \varepsilon) - (\bar{x} - \varepsilon)} \right| < R.$$

D'après le théorème que nous avons déjà rappelé, il résulte alors que l'arc $\widehat{P_1P_2}$ de $y = y_\infty(x)$ est une extrémale, ce qui ne peut pas arriver, P appartenant à Ω . Reste, à présent, le cas où les deux dérivées, à droite et à gauche, sont, l'une et l'autre, infinies et nécessairement de signe contraire. Il est possible, dans ce cas, de choisir deux points P_1, P_2 de la courbe $y = y_\infty(x)$ qui ont les ordonnées égales et les abscisses l'une plus petite, l'autre plus grande que \bar{x} et aussi près de \bar{x} que l'on veut. Le théorème que nous avons souvent rappelé, nous dit que l'arc $\widehat{P_1P_2}$ de $y = y_\infty(x)$ est une extrémale, ce qui est contraire à l'hypothèse d'après laquelle P appartient à Ω . Nous concluons qu'en P la dérivée y'_∞ existe bien déterminée (et infinie); et nous pouvons, enfin, énoncer la proposition suivante:

Les hypothèses I'), II) étant vérifiées, toute fonction absolument continue qui minimise J , admet partout une dérivée bien déterminée, finie ou non. Sauf, tout au plus, un ensemble fermé Ω , de mesure nulle, cette dérivée est finie et continue, l'équation d'EULER est satisfaite et il existe la dérivée seconde finie et continue.

28. Nous ne savons pas si l'ensemble exceptionnel de l'énoncé précédent peut réellement exister. Ce qui est dit au n. 3 du Mémoire de M. S. BERNSTEIN, que nous avons déjà cité ³⁰⁾ le ferait supposer. Quoi qu'il en soit, nous établirons des cas importants où un tel ensemble ne peut pas exister.

Supposons que la dérivée partielle f , soit intégrable sur toute la courbe $y = y_\infty(x)$,

³⁰⁾ l. c. 15).

c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_a^x f_y(x, y_\infty, y'_\infty) dx$$

soit finie, quel que soit l'intervalle (a, x) . Cette condition, que nous désignerons par III_a), est sûrement satisfaite, si f est indépendante de y ou bien si, comme fonction de y , f a une dérivée toujours bornée en valeur absolue, ou, encore, si l'ordre d'infini de f_y n'est pas plus grand que celui de f .

Soit x_0 un point de (a, b) n'appartenant pas à l'ensemble Ω du nombre précédent, et soit (x'_0, x''_0) le plus grand intervalle contenant x_0 , où $y = y_\infty(x)$ est une extrémale. Nous disons que $x'_0 = a$ et $x''_0 = b$. En effet, si l'on a $x'_0 < x_1 < x_2 < x''_0$, la dérivée y'_∞ existe finie et continue dans tout (x_1, x_2) , extrêmes compris, et l'équation d'EULER est satisfaite :

$$f_y = \frac{d}{dx} f_{y'}.$$

En l'intégrant, on a

$$\int_{x_1}^{x_2} f_y(x, y_\infty, y'_\infty) dx = f_{y'}[x_2, y_\infty(x_2), y'_\infty(x_2)] - f_{y'}[x_1, y_\infty(x_1), y'_\infty(x_1)],$$

et comme, en vertu de III_a),

$$\int_{x_1}^{x_2} f_y dx \rightsquigarrow_{x_1 \rightarrow x'_0} \int_{x'_0}^{x_2} f_y dx,$$

lorsque x_1 tend vers x'_0 , le dérivée $f_{y'}[x_1, y_\infty(x_1), y'_\infty(x_1)]$, tend vers une limite déterminée et finie.

Ainsi qu'au n° 14 nous prouvons, à présent, que la limite de $y'_\infty(x_1)$, existe et est finie pour $x_1 \rightarrow x'_0$, c'est-à-dire que la dérivée $y'_\infty(x'_0)$ est finie. Nous prouvons, de cette façon, que $x'_0 = a$, parce que, dans le cas contraire, pour x'_0 la dérivée devrait être infinie. De même, nous prouvons que $x''_0 = b$.

29. Un autre cas, où l'ensemble Ω ne peut pas exister, c'est celui où est vérifiée la condition :

III_b) pour tout champ borné du plan (xy) on peut déterminer deux constantes positives Q_1, Q_2 , telles que pour tous les points du champ l'on ait

$$\left| \frac{f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y}}{f_{y'^2}} \right| < Q_1 y'^2 + Q_2.$$

Pour démontrer que la dérivée $y'_\infty(x'_0)$ est finie et que l'on a, par conséquent, $x'_0 = a$, il suffit d'appliquer le lemme suivant :

« Si, pour tout x satisfaisant aux conditions $a \leq x < b$, la fonction $y = y(x)$:

1°) est finie et continue avec ses deux premières dérivées $y'(x), y''(x)$;

2°) vérifie l'inégalité $|y''| < Q_1 y'^2 + Q_2$, Q_1 et Q_2 étant deux constantes positives;

3°) est bornée en valeur absolue;

alors sa dérivée $y'(x)$ reste aussi bornée en valeur absolue » ³¹⁾.

³¹⁾ P. PAINLEVÉ, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm* (Paris, A. Hermann, 1897), pag. 560, et S. BERNSTEIN, l. c. ¹⁵⁾, pag. 433.

Cette proposition peut se démontrer de cette manière. De l'inégalité $|y''| < Q_1 y'^2 + Q_2$, on déduit $|y''| < Q_1 (y'^2 + C^2) \left(0 \leq C = \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} \right)$.

a) Soit x un point intérieur à (a, b) où l'on a $y'(x) > 0$. Il vient

$$|y''(x)| < Q_1 [y'(x) + C]^2, \quad y'' < Q_1 (y' + C)^2, \\ \frac{y''}{y' + C} < Q_1 (y' + C),$$

$$\log \frac{y'(x) + C}{y'(x_1) + C} < Q_1 [y(x) - y(x_1) + C(x - x_1)],$$

étant x_1 la dernière racine de y' qui précède x ou bien a , s'il n'y a pas de ces racines. De la dernière inégalité on tire

$$y'(x) + C < [y'(x_1) + C] e^{Q_1 [y(x) - y(x_1) + C(x - x_1)]} \\ y'(x) < -C + [y'(a) + C] e^{Q_1 [y(x) - y(x_1) + C(b-a)]} < \Psi$$

avec Ψ indépendant de x .

b) Si pour x on a $y'(x) < 0$, on aura $y''(x) > -Q_1 [\overline{y'^2}(x) + C^2] > -Q_1 [y'(x) - C]^2$,

$$\log \frac{y'(x) - C}{y'(x_1) - C} < Q_1 [y(x) - y(x_1) - C(x - x_1)]$$

$$y'(x) > C - [y'(a) + C] e^{-Q_1 [y(x) - y(x_1) - C(b-a)]} > -\Psi.$$

Donc il y aura toujours

$$|y'(x)| < \Psi.$$

30. De ce qui précède nous pouvons conclure :

Les hypothèses I'') et II) étant vérifiées et étant vérifiée, en outre, l'une ou l'autre des deux III_a) (n. 28), III_b) (n. 29), toute fonction qui minimise J admet les dérivées première et seconde finies et continues dans tout (a, b) et satisfait partout à l'équation différentielle d'EULER ^{3a)}.

31. Nous avons aussi cette autre proposition :

Dans les hypothèses du théorème du n. 18 ou bien dans celles du théorème précédent, il existe toujours, au moins, une extrémale qui joint les deux points P_a, P_b .

^{3a)} En s'appuyant d'un côté sur une proposition de M. DARBOUX [G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal*, III^e Partie (Paris, Gauthier-Villars, 1894), pag. 83, et O. BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung* (Leipzig, G. B. Teubner, 1909), p. 438] sur les maximisés absolus, et de l'autre sur un théorème de M. CANTOR relatif aux ensembles d'intervalles distincts d'une droite, on peut dans les conditions que nous venons d'énoncer, établir facilement que, ayant fixé le point P_a , par chaque point de la droite $x = b$, sauf tout au plus par ceux d'un ensemble dénombrable, il passe toujours une seule courbe $y = y(x)$ (n^o 2) qui le joint avec P_a et qui minimise J . Dans le cas que la variation seconde de J , débarrassée des termes en $\delta^2 y$ et $\delta^2 y'$, soit toujours positive, non nulle [Cfr. HADAMARD, l. c. ⁸⁾ a), IV^e Partie, § 3] l'ensemble exceptionnel disparaît et l'on a toujours l'unicité du minimant.

CHAPITRE IV.

Généralisations.

32. Ce qui précède a été établi dans l'hypothèse que le champ, où se trouvent les $y = y(x)$ soit celui qui est défini par les inégalités (A) (n. 1). Supposons maintenant que les $y(x)$ ne puissent pas varier de $-\infty$ à $+\infty$, mais qu'elles doivent se trouver dans un champ fermé (tel qu'il contienne tous ses points limites se trouvant à distance finie). On voit, tout de suite, que ce que nous avons dit dans les Chapitres I et II peut se répéter également dans les conditions actuelles, de sorte que, dans ce cas aussi, nous pouvons établir l'existence du minimum pour J , par rapport aux courbes $y = y(x)$ (du n. 2) qui joignent deux points donnés. Quant aux résultats du Chapitre III, ils subsistent ici, pourvu qu'ils soient appliqués non pas à toute la courbe minimante, mais seulement à celles de ses parties qui sont *intérieures* (dans le sens strict) au champ considéré.

33. En passant du cas des limites fixes à celui des limites mobiles on peut obtenir une autre généralisation. En effet, la méthode que nous avons suivie nous permet d'affirmer l'existence du minimum de J , même si les courbes en question ont les limites P_0, P_1 , variables sur deux lignes données (ou sur deux ensembles fermés) telles que l'une d'elles soit toute renfermée dans un champ borné. Plus généralement encore, l'existence du minimum résulte établie aussi dans le cas où les $y = y(x)$ (du n. 2) appartiennent à une classe déterminée telle que:

1°) chaque courbe ait, au moins, une ordonnée inférieure en valeur absolue à un nombre fixe;

2°) chaque courbe du n. 2 qui est limite des courbes de la classe, appartienne à la classe elle-même.

Une application immédiate de cette proposition peut se faire au problème isopérimétrique dont nous avons parlé à la fin de l'introduction, et cela d'une façon analogue à ce que nous avons déjà fait dans notre Note: « *Sul problema degli isoperimetri* »³³).

Bologna, ottobre 1914.

LEONIDA TONELLI.

³³) L. TONELLI, *Sul problema degli isoperimetri* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, 1^o semestre 1913, pp. 424-430]. Au sujet de ce problème isopérimétrique voir aussi: J. HADAMARD, *Sur quelques questions de calcul des variations* [Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, III^e Série, t. XXIV (1907), pp. 203-231], et J. HADAMARD, *La construction de WEIERSTRASS et l'existence de l'extremum dans le problème isopérimétrique* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, t. XXI (1913), pp. 251-287].