7. *Eine neue Form der Inductionswaage; von M. Wien.*

Die mit vielen Hoffnungen aufgenommene Inductionswaage¹⁾ hat trotz ihrer Empfindlichkeit keinen Eingang gefunden, weil es nicht gelang, ihre Einstellungen auszuwerthen.

Der Grund ist ein doppelter: der eine liegt darin, dass die Gesetze des Stromverlaufes in körperlichen Leitern im allgemeinen unbekannt sind; der andere in der Versuchsanordnung selbst, da es nicht einmal möglich war, wenn man das Metallstück durch eine geschlossene Inductionsrolle ersetzte, auf die in Betracht kommenden Grössen der Rolle (Widerstand und Selbstpotential) einen sicheren Schluss zu ziehen.²⁾

Oberbeck und Bergmann³⁾ haben beide Schwierigkeiten umgangen; leider lässt sich ihre Methode nur für Messung der Leitungsfähigkeit sehr dünner Platten (bei Kupfer 0,055 mm dick) anwenden.⁴⁾

Die Methode, welche im Folgenden beschrieben werden soll, gestattet erstens die Leitungsfähigkeit zweier Metallstücke von beliebiger, aber gleicher Form und Dimension zu *vergleichen*; ferner: bei den einfachsten Körperformen — Kugel und runde Scheibe — ohne Vergleich mit einem zweiten bekannten Metall direct aus der Wirkung auf die Inductionswaage und den Dimensionen des Metallstückes die Leitungsfähigkeit zu bestimmen, d. h. dieselbe *absolut zu messen*. Als Messinstrument wurde das optische Telephon benutzt, als Stromquelle ein Inductorium, dessen primäre Leitung durch eine electromagnetisch getriebene Saite unterbrochen wurde. Jedoch ist die Methode nicht an diese Apparate gebunden, und man kann auch, die nöthige Empfindlichkeit vorausgesetzt, Dynamometer oder Hörtelephon als Messinstrumente, Sinus-

1) Hughes, Phil. Mag. (5) 8. p. 50. 1879.

2) Vgl. Mascart-Joubert, L'electr. et Magn. 2. p. 435—436.

3) Oberbeck u. Bergmann, Wied. Ann. 31. p. 792. 1887.

4) l. c. p. 805.

inductor oder Wechselstrommaschine (jedoch hier kein Inductorium!) als Stromquelle benutzen (vgl. unten p. 323).

I. Grundlage der Methode.

Die Anordnung der Inductionswaage ist die theoretisch einfachste; eine Wheatstone'sche Brückencombination, Zweig 1 eine Rolle (*I*), Zweig 2 eine Rolle (*II*), Zweig 3 ein inductionsloser Widerstand, ebenso Zweig 4 (Fig. 1). Durch die Brücke geht ein Sinusstrom mit n Schwingungen in 2π Sec. Derselbe verschwindet im Brückenweig, wenn $p_1:p_2 = w_1:w_2 = w_3:w_4$ ist.¹⁾ p_1 und p_2 die Selbstpotentiale der Zweige 1 und 2, $w_1 w_2 w_3 w_4$ die Widerstände der Zweige 1, 2, 3, 4.

Nähert man einer dieser beiden Rollen ein Metallstück, so wird das Gleichgewicht der Brücke gestört. Im Gegensatz zu den früheren Formen der Inductionswaage, wo die *gegenseitige* Induction *zweier* Rollen durch das Metallstück gestört wurde, wird hier die *inducirende* Rolle selbst beeinflusst. Dieser Einfluss soll berechnet werden, indem vorläufig das Metallstück

Fig. 1.

durch eine Rolle (*I'* Fig. 1) ersetzt sei. Diese Rolle habe den Widerstand W und das Selbstpotential P und ihr gegenseitiger Inductionscoefficient mit der Rolle *I* sei M . Das Gleichgewicht der Brücke wird gestört, indem Widerstand und Selbstpotential der Rolle *I* modificirt erscheinen, und zwar ist der „wirksame Widerstand“ des Zweiges 1 jetzt:

$$w_1' = w_1 + \frac{n^2 M^2}{W^2 + n^2 P^2} \cdot W$$

das wirksame Selbstpotential:

$$p_1' = p_1 - \frac{n^2 M^2}{W^2 + n^2 P^2} \cdot P.^2)$$

Durch entsprechende Aenderung der Widerstände $w_2 w_3 w_4$ kann man den Sinusstrom im Brückenweig wieder zum Ver-

1) Maxwell, Electr. and Magn. 2. § 757.

2) Maxwell, Phil. Tr. 155. p. 474. 1865 (M verdrückt für M^2).

schwinden bringen.¹⁾ Durch diese neue Nulleinstellung sind die Grössen p_1' und w_1' gegeben als $p_1' = p_2 \cdot (w_3 / w_4)$ und $w_1' = w_2 \cdot (w_3 / w_4)$. In den vorstehenden Gleichungen sind demnach die Grössen w_1 , w_1' , p_1 , p_1' experimentell bekannt; bildet man daraus den Ausdruck $(p_1 - p_1') / (w_1' - w_1)$, so ist derselbe gleich $P / W = \tau$ der Relaxationszeit oder Zeitconstante der secundären Rolle (I'), d. h. der Zeit, in welcher ein Strom in derselben, sich selbst überlassen, von der Intensität 1 auf die Intensität $1/e$ sinkt. Es ist dies offenbar eine Grösse, welche unabhängig von Brücke, Strom und Lage der Rollen zu einander nur von der secundären Rolle (I') selbst abhängt.

Für zwei ganz gleiche Rollen aus zwei verschiedenen Metallen werden sich also die experimentell gefundenen Ausdrücke $(p_1 - p_1') / (w_1' - w_1)$ verhalten wie die Leitungsfähigkeiten der beiden Metalle.

Nähert man anstatt der Rolle (I') ein Metallstück der Rolle I , so tritt experimentell genau dasselbe ein: Widerstand und Selbstpotential des Zweiges I werden modificirt, man findet wieder eine neue Nulleinstellung. Es fragt sich, was bedeutet hier für ein Metallstück die Grösse $(p_1 - p_1') / (w_1' - w_1)$? Ist dieselbe, wie oben bei einer Rolle, unabhängig von Brücke und Strom, nur abhängig von Form und Leitungsfähigkeit des Metallstückes, so ist sie offenbar sehr günstig zum Vergleich und zur Bestimmung von Leitungsfähigkeiten.

Ehe ich zu dieser Frage übergehe, will ich, um nicht später dadurch unterbrochen zu werden, die Methode und Versuchsanordnung genauer besprechen, mittels welcher $(p_1 - p_1') / (w_1' - w_1)$ bestimmt wurde. Dieser Ausdruck ist also vorläufig für Metallstücke eine reine Beobachtungsgrösse. Ich werde sie im Folgenden mit τ_n bezeichnen.

II. Experimentelle Bestimmung von τ_n .

τ_n kann, wie gesagt, gefunden werden, indem man die Brücke ohne Metallstück und mit Metallstück auf Null einstellt, daraus die Werthe p_1 und p_1' , w_1 und w_1' bestimmt und daraus $\tau_n = (p_1 - p_1') / (w_1' - w_1)$ berechnet. Ich bin längere Zeit in dieser Weise verfahren: einfacher und sicherer ist jedoch folgende Methode, die später ausschliesslich angewandt wurde.

1) Vgl. M. Wien, Wied. Ann. 44. p. 709. 1891.

Methode. Die ursprüngliche Brückeneinstellung bleibt ungeändert. Die durch das Metallstück im Zweige 1 hervorgerufene Störung wird durch eine ebensolche Störung im Zweige 2 compensirt, welche durch eine der Rolle II genäherte secundäre Rolle II' hervorgerufen wird (Fig. 2).

Es ist zu berechnen, unter welchen Bedingungen die Rolle II' das Metallstück compensirte. Die Brücke ohne Metallstück und ohne Rolle II' ist im Gleichgewicht, wenn

$$p_1 : p_2 = w_1 : w_2 = w_3 : w_4$$

ist. Soll mit Metallstück und Rolle bei derselben Brückeneinstellung der Brückenstromlos sein, so müssen die „wirksamen Widerstände und Selbstpotentiale“ sich ebenso verhalten, d. h. es muss sein:

$$p_1' : p_2' = w_1' : w_2' = w_3 : w_4.$$

Es müssen also auch die beiden Proportionen bestehen:

$$(p_1 - p_1') : (p_2 - p_2') = w_3 : w_4$$

$$(w_1' - w_1) : (w_2' - w_2) = w_3 : w_4.$$

Wenn wir das Metallstück wieder durch die Rolle I' ersetzen, so lauten diese Gleichungen (vgl. p. 307):

$$\frac{n^2 M_1^2}{W_1^2 + n^2 P_1^2} P_1 : \frac{n^2 M_2^2}{W_2^2 + n^2 P_2^2} P_2 = w_3 : w_4$$

$$\frac{n^2 M_1^2}{W_1^2 + n^2 P_1^2} W_1 : \frac{n^2 M_2^2}{W_2^2 + n^2 P_2^2} W_2 = w_3 : w_4.$$

Hieraus als Bedingungsgleichungen für die Stromlosigkeit des Brückenweiges:

$$\frac{P_1}{W_1} = \frac{P_2}{W_2} \text{ (durch Division) oder } \tau_1 = \tau_2$$

und

$$\frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{w_3 \cdot W_1}{w_4 \cdot W_2}.$$

Ganz analog für ein Metallstück:

$$\frac{p_1 - p_1'}{w_1' - w_1} = \frac{P_2}{W_2} \text{ oder } \tau_n = \tau_2$$

Fig. 2.

und eine Gleichung für M_2 , den gegenseitigen Inductionscoefficienten zwischen den Rollen II und II' . Es lässt sich also die durch das Metallstück hervorgerufene Störung immer durch eine secundäre Rolle im Zweige 2 compensiren, wenn die Zeitconstante dieser Rolle gleich dem τ_n des Mittelstückes ist, und die beiden Rollen in die richtige gegenseitige Entfernung gebracht werden.

Man muss demnach, um Null zu erhalten, τ_2 und M_2 variiren können. Die Variation von M_2 geschieht durch Ineinanderschieben der beiden Rollen. Die Variation von $\tau_2 = P_2 / W_2$ geschieht, da P_2 nicht gut geändert werden kann, durch Aenderung von W_2 , d. h. es wird die Rolle II' durch einen Rheostaten geschlossen, durch welchen beliebige Widerstände eingeschaltet werden können. Es ist somit die Nulleinstellung nur durch *Näherung* möglich, indem τ_2 und M_2 abwechselnd variirt werden.¹⁾ Hat man Null erreicht, so ist das gesuchte

$$\tau_n = \tau_2 = \frac{P_2}{W_2} = \frac{P_2}{W_\alpha + W_\beta},$$

worin P_2 und W_α Selbstpotential und Widerstand der Rolle II' selbst ein- für allemal bestimmt sind, und W_β den Rheostatenwiderstand bedeutet. Man erhält also τ_n für verschiedene Metallstücke einfach durch Nulleinstellung und Ablesung des Rheostatenwiderstandes.

Versuchsanordnung.

Inducirende Rolle (I). Um eine möglichst grosse Empfindlichkeit zu erzielen, muss die Einwirkung des Metallstückes auf Selbstpotential und Widerstand der inducirenden Rolle eine möglichst grosse sein.

Das Metallstück selbst lasse ich vorläufig unberücksichtigt. Selbstverständlich muss es an die Stelle der Rolle gebracht werden, wo das magnetische Feld am stärksten ist. Ferner

1) Rayleigh (Rep. of the Br. Ass. 1880, p. 1—2) hat ähnliche Gleichungen für die Hughes'sche Inductionswaage abgeleitet und darin ausdrücklich betont, dass eine Nulleinstellung nur durch zwei Einstellungen (adjustments) möglich sei. Hughes hat immer nur eine Einstellung angewendet, er erhielt infolgedessen im allgemeinen nur ein Minimum, woraus sich keine sicheren Schlüsse ziehen lassen.

ist die Form der Rolle wichtig. Dieselbe ist so zu wählen dass $p - p'$ und $w' - w$ möglichst gross sind im Vergleich mit p und w ; d. h.; es muss Selbstpotential und Widerstand klein, die gegenseitige Induction gross sein. Als besonders günstig, was sich auch für einen einzelnen Stromkreis (statt des Metallstückes) theoretisch beweisen lässt, erwiesen sich Rollen mit wenigen Windungslagen, deren Länge etwa gleich dem Durchmesser ist, deren axialer Querschnitt also ein Quadrat bildet; ich werde solche Rollen der Kürze halber „quadratische Rollen“ nennen. Die bei den Versuchen benutzten Rollen hatten folgende Constanten:

	D	L	W	P	ν	δ (mm)
Rolle a	6,8 cm	7 cm	6,2 Ω	$1,05 \cdot 10^7$ cm	8	0,6
„ b	6,8 „	7 „	6,15 „	$1,04 \cdot 10^7$ „	8	0,6
„ A	15,0 „	14 „	4,00 „	$2,75 \cdot 10^7$ „	6	1,1
„ B	22 „	14 „	4,02 „	$2,77 \cdot 10^7$ „	4	1,1

Hierin ist D = Durchmesser¹⁾, L = Länge, W = Widerstand, P = Selbstpotential, ν = Anzahl der Windungslagen, δ = Drahtdicke.

Von den annähernd gleichen Rollen a und b wurde die eine als Rolle I , worin sich das Metallstück befand, die andere als Rolle II benutzt. Von den grösseren Rollen konnte entweder A als Rolle I , B als Rolle II dienen oder umgekehrt. Zur Aufnahme des Metalls standen also eine Rolle von 6,8, eine zweite von 15 und eine dritte von 22 cm Durchmesser zur Verfügung. Die Länge der letzten Rolle (B) war erheblich kleiner als ihr Durchmesser, also wich sie von der quadratischen Form ab.

Als *secundäre Rollen II'*, die zur Compensation des Metallstückes dienen, wurde eine Rolle c benutzt, welche in die Rollen a und b hineinpasste ($D = 5$ cm, $L = 7$ cm), und eine Rolle C ($D = 17$ cm, $L = 12$ cm), welche entweder in die Rolle B oder über die Rolle A geschoben werden konnte, je nachdem man das Metallstück in die Rolle A oder B legen wollte.

Widerstand und Selbstpotential dieser Rollen (c und C) mussten genau gemessen werden, als die einzigen Grössen der

1) Unter „Durchmesser“ der Rollen ist hier immer das Mittel zwischen innerem und äusserem Durchmesser verstanden.

Inductionswaage, welche zur Kenntniss der gesuchten Grösse $\tau_n = \tau_2 = P / W_\alpha + W_\beta$ nothwendig sind.

Der Widerstand von c wurde als $10,21 \, \Omega$, der von C als $11,90 \, \Omega$ bei 19°C . bestimmt.¹⁾

Die Selbstpotentiale der beiden Rollen wurden nach einer in einer früheren Arbeit²⁾ angegebenen Methode gleichzeitig gemessen. Es wurden drei Bestimmungen mit verschiedenen Widerständen gemacht, die auf Bruchtheile von pro Mille untereinander übereinstimmten. Ich erhielt für Rolle $c: P = 1,342 \cdot 10^7 \text{ cm}$, für $C: 3,999 \cdot 10^7 \text{ cm}$.

Variation von M_2 . Um die gegenseitige Induction der Rollen (II und II') variiren zu können, wurde die kleinere Rolle in der grösseren verschiebbar gemacht. Zu diesem Zwecke wurde die grössere Rolle auf einem Holzstück H (Fig. 3) befestigt, und daran in der Axe der Rolle ein runder Holzstab S angebracht. Die kleinere Rolle wurde auf beiden Enden durch Holzscheiben verschlossen, in welche Löcher von der Grösse des Holzstabes geschnitten waren. Mittelt dieser konnte sie auf den Holzstab gesteckt und darauf verschoben werden. Die seeinfache Anordnung genügte vollkommen, da durch Hin- und Herdrehen der Rolle auf dem Holzstab auch sehr geringe Verschiebungen bewirkt werden konnten.

Fig. 3.

Anordnung der Brücke. Damit eine möglichst schwache in einem der Zweige durch ein Metallstück hervorgerufene Störung noch merklich ist, muss die Anordnung der Brücke eine möglichst empfindliche sein. Die Bedingung dafür ist bei Wechselströmen, dass die sechs Zweige der Brückencombination scheinbare Widerstände ($\sqrt{w^2 + n^2 p^2}$) von derselben Grössenordnung haben.³⁾ Die vier parallel geschalteten Rollen des optischen Telephons sowohl, wie die secundäre Rolle des Inductoriums⁴⁾ besaßen bei der angewandten Schwingszahl von 256

1) Das Ohm ist hier immer als 1,063. Quecksilbereinheiten angenommen.

2) M. Wien, Wied. Ann. 44. p. 701. 1891.

3) Rayleigh, Proc. of the Roy. Soc. 49. p. 209. 1891.

4) Das Inductorium besass verhältnissmässig kleinen primären Widerstand ($0,2 \, \Omega$) und war ringförmig gewickelt, so dass keine Zerstreuung

in der Secunde einen scheinbaren Widerstand von ca. 50 Ohm. Zweig 3 und 4 der Brücke bestanden auch aus je 50 Ohm bifilar gewickeltem Neusilberwiderstände.

Die Zweige 1 und 2 bestanden entweder aus den Rollen a und b oder aus A und B . a und b hatten wie sich aus obigen Zahlen ergibt, einen scheinbaren Widerstand von ca. 20 Ohm A und B von ca. 50 Ohm. a und b waren also etwas zu klein, jedoch war die Empfindlichkeit auch hier eine genügende.

Strom, Brücke und optisches Telephon waren so beschaffen, dass eine Widerstandsänderung von $1/10000$ noch merklich war. Bei geringerer Empfindlichkeit sind natürlich auch die nach dieser Methode angestellten Bestimmungen der Leitungsfähigkeit dementsprechend ungenauer.

Wie sich aus obigem ergibt, war die Brücke so angeordnet, dass annähernd $w_1 = w_2$, $p_1 = p_2$, $w_3 = w_4$ war. Es ist dies nicht nothwendig und nur der Einfachheit halber geschehen.

Es muss hier noch nachträglich angegeben werden, wie überhaupt diese *erste Einstellung der Brücke* (ohne Metall) erreicht wird.

Die Rollen *I* und *II* sind von vornherein so gewickelt, dass bei beiden Widerstand und Selbstpotential von derselben Grössenordnung ist, was sich ja einigermaßen vorausberechnen lässt. Die beiden Rollen (Zweig 1 u. 2) und einen einfachen Brückendraht (Zweig 3 u. 4) setzt man zu einer Wheatstone'schen Brücke zusammen und schickt einen Strom hindurch. An einer Stelle des Brückendrahtes findet man ein Minimum des Ausschlags. Durch Hinzuwickeln zu der Rolle mit kleinerem Selbstpotential rückt man das Minimum ungetähr in die Mitte des Drahtes; durch Hinzufügung von Widerstand (Rheostat oder angelötheter Neusilberdraht) verkleinert man das Minimum. Ist annähernd der Strom Null in der Mitte des Drahts erreicht, so ersetzt man den Draht durch zwei grössere gleiche Widerstände (in unserem Fall 50 Ohm). Die

von Kraftlinien auftrat. Es lieferte bei einem primären Strom von zwei Bunsen, der 256 Mal in der Secunde durch die Saite unterbrochen wurde, einen etwa 2—3 mal so starken Strom, wie ein kleines Kohlrausch'sches Inductorium unter den gleichen Umständen. Jedoch kann natürlich auch ein solches benutzt werden.

letzte Einstellung geschieht mit Hilfe zweier ca. 10 cm. langer Platin- oder Eisendrähte zwischen den Zweigen 1 u. 2 und 3 u. 4, auf welchen Quecksilberschleifcontacte verschiebbar sind, von denen der Strom zum Telephon führt. Dadurch kann w_1/w_2 und w_3/w_4 um ein paar promille geändert und die definitive Nulleinstellung erreicht werden.

Diese Einrichtung ist überhaupt nothwendig, weil die Brücke wegen kleiner Temperaturschwankungen nicht dauernd eingestellt bleibt. Unmittelbar vor jedem Versuch wird sie daher mit Hülfe der Quecksilberschleifcontacte neu eingestellt.

Fig. 4 gibt die ganze Anordnung der Inductionswaage, zum

Fig. 4.

Versuch fertiggestellt, wieder. In der Mitte das Brett (*b*) mit den eben erwähnten beiden Drähten und den Quecksilberschleifcontacten s_1 und s_2 , von denen der Strom zu dem Umschalter *U* führt. Mittelst desselben kann entweder das optische Telephon eingeschaltet werden, oder ein Hörtelephon, mit welchem die angenäherten Einstellungen gemacht wurden, solange der Ausschlag des optischen Telephons über das Gesichtsfeld des Fernrohrs hinaus ging. Auf beiden Seiten des Bretts *b* sind die beiden Widerstände von 50 Ohm, die die Zweige 3 u. 4 der Brücke bilden (mit 3 und 4 in der Figur bezeichnet). Mit Z_1 und Z_2 sind die beiden Zuleitungsstellen des Hauptstromes angedeutet. Die Rolle *I* befindet sich rechts etwa zwei Meter entfernt, um die gegenseitige Induction mit der Rolle *II* verschwindend zu machen, und auf einem besonderen Tisch auf-

gestellt, um bequem von allen Seiten zugänglich zu sein. Die Rolle *II* ist unmittelbar vor dem Beobachter (*B*) mit der in ihr verschiebbaren Rolle *II'* und dem Rheostaten *R*. Der Beobachter muss, während er durch das Fernrohr *F* sieht, einerseits die Verschiebung der Rollen bewirken und den Rheostatenwiderstand ändern können, andererseits müssen auch die Schleifcontacte s_1 und s_2 bequem für ihn erreichbar sein. — Das Inductorium und der Saitenunterbrecher befanden sich in der gegenüberliegenden Ecke des Zimmers, um nicht direct das optische Telephon zu beeinflussen.

Gang eines Versuches. Die Brücke sei mit Hülfe der Quecksilbercontacte scharf auf Null eingestellt. Das zu untersuchende Metallstück wird in die Rolle *I* gebracht und die compensirende Rolle *II'* geschlossen. Als Stromanzeiger dient vorläufig das Hörtelephon. Durch Verschieben der Rolle *II'* wird ein Tonminimum aufgesucht, durch Aenderung des Rheostatenwiderstandes wird es verkleinert. Darauf wird das optische Telephon eingeschaltet. Der entstehende Ausschlag wird abwechselnd durch Verschieben der Rolle *II'* und durch Aenderung des Rheostatenwiderstandes vermindert, bis man annähernd Null erreicht hat. Die definitive Nulleinstellung erfolgt nun meiner Erfahrung nach am schnellsten und genauesten, indem man in oben angegebener Art annähernd auf Null einstellt und dann einen kleinen Rheostatenwiderstand ϵ , der gerade ein Unklarwerden des Spaltbildes bewirkt, hinzufügt resp. abzieht. Ist das Bild im Minimum bei $w + \epsilon$ und $w - \epsilon$ gleich unklar, so ist w der richtige Werth.

Nach der Einstellung wird das Metallstück wieder herausgenommen und die Rolle *II'* geöffnet, und nachgesehen, ob die Brücke sich während des Einstellens nicht verändert hat. Eventuell wird dann mit Hülfe der Schleifcontacte wieder auf Null eingestellt und die Messung wiederholt. Als Beispiel mag eine beliebige Bestimmung von τ_n aus meinem Beobachtungsheft dienen.

Quecksilberkugel II. Zimmertemperatur 18,0° C.; Quecksilbertemperatur 18,0° C.

Ein Vorversuch ergab für W_β (Rheostatenwiderstand) 129 Siem. Neue Nulleinstellung der Brücke. I. Spaltbild gleich undeutlich bei 129,0 und 129,4 Siem. Also $W_\beta = 129,2$ Siem.

II. Einstellung: $W_\beta = 129,3$; III. Einstellung $W_\beta = 129,2$;
Mittelwerth $\bar{W}_\beta = 129,23$ Siem. $= 121,57 \Omega$

$$\text{Hieraus } \tau_n = \frac{P}{W_\alpha + W_\beta} = \frac{3,999}{11,85 + 121,57} = 2,998 \cdot 10^{-4} \text{ Sec.}$$

Die Genauigkeit der Bestimmung von τ_n hängt sehr von Leitungsfähigkeit, Grösse und Form des Metallstückes ab. Bei geeigneter Anordnung ist τ_n immer auf ein pro Mille genau zu bestimmen. Die Einstellung selbst bietet durchaus keine experimentellen Schwierigkeiten. Bei der eben angegebenen Quecksilberkugel erreichte ein Beobachter, der nicht nur mit der Methode, sondern überhaupt zum ersten Mal mit dem optischen Telephon arbeitete, sofort eine Genauigkeit der Einstellung von ein pro Mille, während ich selbst, wie aus Obigem zu ersehen, etwa 0,3 promille Fehler hatte.

Im Folgenden komme ich endlich wieder auf die im Eingange aufgestellte Frage zurück: Was bedeutet $\tau_n = (p_1 - p_1') / (w_1' - w_1)$ für ein Metallstück?

III. Bedeutung von τ_n . (Wirkung eines Metallstückes auf eine von einem Sinusstrom durchflossene Rolle).

Wenn in der Nähe eines Leiters, in welchem ein variabler Strom fliesst, sich ein Metallstück befindet, so entstehen in dem letzteren Ströme. Wir betrachten nur die in sich geschlossenen Ströme; sie sind es sämmtlich, wenn Leiter und Metallstück Rotationskörper mit gemeinschaftlicher Axe sind.¹⁾ Durch vier benachbarte Stromlinien kann man ein ringförmiges Stück aus dem Metall herauschneiden und da die Electricität längs der Stromlinien fliesst, wird man diesen herausgeschnittenen Theil des Metallstückes, wie einen linearen Strom behandeln dürfen. Indem man alle Stromlinien zur Herstellung solcher Stromkreise verwendet, zerlegt man den ganzen Körper in lauter solche Stromkreise. Die magnetische Wirkung des Metallstückes kann durch die dieser Stromkreise ersetzt werden.²⁾

Wir haben also die, vielleicht allgemeineres Interesse bietende Aufgabe, die gegenseitige Induction zwischen einer *beliebigen Anzahl* secundärer Stromkreise und einem primären

1) Oberbeck, Wied. Ann. **31**. p. 817. 1887.

2) Maxwell, Electr. and Magn. II. § 652.

zu berechnen. In dem inducirenden Hauptkreis (oder Rolle) sei die electromotorische Kraft e_0 , die Stromintensität i_0 , der Widerstand w_0 ; das Selbstpotential p_0 und der gegenseitige Inductionscoefficient zwischen dem Hauptkreis und einem beliebigen secundären Stromkreis (a) sei m_{0a} , die Intensität in diesem Stromkreis i_a .

Dann besteht für einen beliebigen variablen Strom für den Hauptkreis die Gleichung:

$$e_0 = i_0 w_0 + p_0 \frac{d i_0}{d t} + \sum_a m_{0a} \frac{d i_a}{d t}.$$

Für den beliebigen secundären Stromkreis mit dem Index a besteht die Gleichung:

$$0 = m_{0a} \frac{d i_0}{d t} + i_a w_a + \sum_k m_{ak} \frac{d i_k}{d t}.$$

Die Summen sind über sämtliche secundären Kreise zu erstrecken, deren Anzahl ν sei. m_{ak} ist der gegenseitige Inductionscoefficient zwischen dem Stromkreis a und einem beliebigen anderen secundären Stromkreis k . Das in der Summe enthaltene m_{aa} ist der Selbstinductionscoefficient des Stromkreises a .

Der variable Strom sei ein Sinusstrom mit n Schwingungen in 2π Sekunden. Statt dessen betrachten wir, wie üblich, die mathematisch bequemere Function e^{int} . Es sei also:

$$e_0 = A \cdot e^{\text{int}}, \text{ demnach } i_0 = \alpha_0 e^{\text{int}} \text{ und } i_a = \alpha_a e^{\text{int}}.$$

Dadurch wird für den Hauptkreis:

$$\text{I} \quad A = \alpha_0 (w_0 + i n p_0) + i n \sum_a m_{0a} \alpha_a$$

und für den secundären Kreis a

$$\text{II} \quad 0 = i n m_{0a} \alpha_0 + w_a \alpha_a + i n \sum_k m_{ak} \alpha_k.$$

Setzen wir $i n = \gamma$, so ist:

$$0 = \gamma m_{0a} \alpha_0 + w_a \alpha_a + \gamma \sum_k m_{ak} \alpha_k$$

oder ausgeführt:

$$0 = \alpha_0 \gamma m_{0a} + \alpha_1 \gamma m_{1a} + \dots + \alpha_a (w_a + \gamma m_{aa}) \dots \alpha_\nu \gamma m_{\nu a}.$$

Solcher Gleichungen giebt es für jeden der ν Stromkreise

eine; sie stellen zusammen ein System linearer Gleichungen für die Grössen $\alpha_1 \dots \alpha_\nu$ dar. Ihre Lösung ist:

$$\alpha_a = -\frac{\Delta_a}{\Delta} \alpha_0.$$

Hierin ist Δ die Determinante sämtlicher Coefficienten der $\alpha_1 \dots \alpha_\nu$ und Δ_a diejenige Determinante, welche entsteht, wenn man die Verticalreihe mit dem Index a durch die entsprechende mit dem Index o vertauscht¹⁾. Der Uebersicht halber sei die Determinante Δ ausgeführt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} w_1 + \gamma m_{11} & \gamma m_{12} \dots & \gamma m_{1a} \dots & \gamma m_{1\nu} \\ \gamma m_{21} & w_2 + \gamma m_{22} \dots & \gamma m_{2a} \dots & \gamma m_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma m_{a1} & \gamma m_{a2} \dots & w_a + \gamma m_{aa} \dots & \gamma m_{a\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma m_{\nu 1} & \gamma m_{\nu 2} \dots & \gamma m_{\nu a} \dots & w_\nu + \gamma m_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

In Δ_a sind, wie gesagt, die Glieder der Verticalreihe mit dem Index a durch $\gamma m_{10}, \gamma m_{20} \dots \gamma m_{a0} \dots \gamma m_{\nu 0}$ ersetzt.

Es lässt sich sowohl Δ wie Δ_a nach Potenzen von γ entwickeln. Mit Hilfe einiger Determinantensätze²⁾ folgt unmittelbar:

$$\Delta = (w_1 w_2 \dots w_\nu) \left\{ 1 + \gamma \sum_b \frac{m_{bb}}{w_b} + \frac{\gamma^2}{2!} \sum_b \sum_c \frac{\begin{vmatrix} m_{bb} & m_{bc} \\ m_{cb} & m_{cc} \end{vmatrix}}{w_b w_c} \right. \\ \left. + \frac{\gamma^3}{3!} \sum_b \sum_c \sum_d \frac{\begin{vmatrix} m_{bb} & m_{bc} & m_{bd} \\ m_{cb} & m_{cc} & m_{cd} \\ m_{db} & m_{dc} & m_{dd} \end{vmatrix}}{w_b w_c w_d} + \frac{\gamma^4}{4!} \dots \right\}$$

Aus der Bildungsweise von Δ_a aus Δ ergibt sich

$$\Delta_a = \gamma \sum_q m_{0q} D_{qa},$$

worin D_{qa} die Unterdeterminante von γm_{qa} ist. D_{qa} ist, da

1) Helmholtz giebt in „Telephon und Klangfarbe“ (Wissenschaftliche Abhdl. I. p. 469) ein sehr ähnliches Gleichungssystem, bespricht jedoch nur den Fall, dass n gross.

2) Baltzer, Theor. u. Anw. d. Det. § 5. p. 35–37, Leipzig 1875.

das Glied $m_{q a}$ (nicht $m_{a q}$!) nur einmal in der Determinante Δ vorkommt $= \partial \Delta / \partial m_{q a}$. Also:

$$\Delta_a = \gamma \sum_q m_{o q} (w_1 w_2 \dots w_r) \frac{\partial}{\partial m_{q a}} \left\{ 1 + \gamma \sum_b \frac{m_{b b}}{w_b} + \frac{\gamma^2}{2!} \sum_b \sum_c \dots \right\}$$

Die Differentiation erfolgt Glied für Glied, indem man zuerst $q = a$ und dann $q \leq a$ setzt. Dann wird:

$$\begin{aligned} \Delta_a = & w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \dots w_r \left\{ \gamma \frac{m_{0 a}}{w_a} + \gamma^2 \sum_b \frac{m_{0 a}}{w_a} \frac{m_{b b} - m_{0 b}}{w_b} \frac{m_{a b}}{w_b} \right. \\ & + \frac{\gamma^3}{2!} \sum_b \sum_c \frac{m_{0 a}}{w_a} \frac{\begin{vmatrix} m_{b b} & m_{b c} \\ m_{c b} & m_{c c} \end{vmatrix}}{w_b w_c} - 2 m_{0 b} \frac{\begin{vmatrix} m_{a b} & m_{a c} \\ m_{c b} & m_{c c} \end{vmatrix}}{w_c} \\ & + \frac{\gamma^4}{3!} \sum_b \sum_c \sum_d \frac{m_{0 a}}{w_a} \frac{\begin{vmatrix} m_{b b} & m_{b c} & m_{b d} \\ m_{c b} & m_{c c} & m_{c d} \\ m_{a b} & m_{a c} & m_{a d} \end{vmatrix}}{w_b w_c w_d} - 3 m_{0 b} \frac{\begin{vmatrix} m_{a b} & m_{a c} & m_{a d} \\ m_{c b} & m_{c c} & m_{c d} \\ m_{d b} & m_{d c} & m_{d d} \end{vmatrix}}{w_d} \\ & \left. + \frac{\gamma^5}{4!} \dots \dots \dots \right\} \end{aligned}$$

Wenn man $\alpha_a = -(\Delta_a / \Delta) \alpha_0$ nach Taylor in Potenzen von γ entwickelt¹⁾, so folgt für den Stromkreis a von ν secundären Stromkreisen, welche von einem primären inducirt werden, die Stromamplitude α_a , verhältnissmässig einfach, als ($\gamma = i n$)

$$\begin{aligned} \alpha_a = \alpha_0 \left[- \frac{i n m_{0 a}}{w_a} - n^2 \sum_b \frac{m_{0 b}}{w_a} \frac{m_{a b}}{w_b} - i n^3 \sum_b \sum_c \frac{m_{0 b}}{w_a} \frac{m_{a c}}{w_b} \frac{m_{b c}}{w_c} \right. \\ + n^4 \sum_b \sum_c \sum_d \frac{m_{0 b}}{w_a} \frac{m_{a d}}{w_b} \frac{m_{b c}}{w_c} \frac{m_{c d}}{w_d} \\ \left. \pm \dots (-i n)^{\nu+1} \sum_b \sum_c \dots \sum_\nu \frac{m_{0 b}}{w_a} \frac{m_{a \nu}}{w_b} \frac{m_{b c}}{w_c} \dots \frac{m_{\mu \nu}}{w_\mu} \dots \right] \end{aligned}$$

α_a hat die Form $A + i B$; wir erhalten Amplitude und Phase des analogen Sinusstroms als $\sqrt{A^2 + B^2}$ und $-B/A$.

Die Rückwirkung aller secundären Kreise auf den inducierenden erhalten wir nach Gleichung (I) (p. 317), indem wir in $\sum m_{0 a} \alpha_a$ bilden. Dieser Ausdruck ist wieder complex, der

1) Hierbei ist stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass Δ_a und Δ convergiren, was natürlich besonders von dem Werth von n abhängt. In unserem Fall ist dies auch experimentell nothwendig (vgl. weiter unten).

reelle Theil modificirt den Widerstand des Hauptkreises, der imaginäre Theil das Selbstpotential. Demnach:

$$w_0' = w_0 + n^2 \sum_a \frac{m_{0a}^2}{w_a} - n^4 \sum_a \sum_b \sum_c \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ac} m_{bc}}{w_a w_b w_c} + n^6 \dots$$

$$p_0' = p_0 - n^2 \sum_a \sum_b \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{w_a w_b}$$

$$+ n^4 \sum_a \sum_b \sum_c \sum_d \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ad} m_{bc} m_{cd}}{w_a w_b w_c w_d} - n^6 \dots$$

Wenn wir zu dem speciellen Falle eines Metallstückes zurückkehren, das als homogen vorausgesetzt sei, so verlaufen sämtliche secundären Ströme in ein und demselben Metall und man kann die Leitungsfähigkeit λ dieses Metalles herausziehen, indem man setzt $w_a = g_a / \lambda$, $w_b = g_b / \lambda$ etc., worin die g einfache geometrische Functionen sind, die von der Gestalt des Stromfadens abhängen.

Wenn wir dieses einführen, so folgt unser gesuchtes $\tau_n = (p_0 - p_0') / (w_0' - w_0)$ als:

$$\tau_n = \lambda \left\{ \frac{\sum_a \sum_b \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{g_a g_b} - (n\lambda)^2 \sum_a \sum_b \sum_c \sum_d \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ad} m_{bc} m_{cd}}{g_a g_b g_c g_d} + \dots}{\sum_a \frac{m_{0a}^2}{g_a} - (n\lambda)^2 \sum_a \sum_b \sum_c \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ac} m_{bc}}{g_a g_b g_c} + (n\lambda)^4 \dots} \right\}$$

Hieraus, wenn wir wieder nach Taylor in Potenzen von $(n\lambda)^2$ entwickeln:

$$\tau_n = \lambda \left\{ \frac{\sum_a \sum_b \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{g_a g_b}}{\sum_a \frac{m_{0a}^2}{g_a}} - (n\lambda)^2 \frac{\sum_a \sum_b \sum_c \sum_d \frac{m_{0a} m_{0b} m_{0c} m_{be} (m_{0c} m_{bd} m_{de} - m_{0d} m_{ae} m_{cd})}{g_a g_b g_c g_d g_e}}{\left(\sum_a \frac{m_{0a}^2}{g_a} \right)^2} + (n\lambda)^4 \dots \right\}$$

Für Metallstücke bestimmter Form verwandeln sich die Summen in Integrale, die über das ganze Metallstück auszu-

dehnen sind. Dieselben lassen sich nur in den einfachsten Fällen auswerthen; einer derselben — dünne runde Scheibe — soll im Folgenden durchgeführt werden.

Discussion der Formeln.

Die eben abgeleitete Schlussformel für τ_n hat die Form

$$\tau_n = \lambda \cdot (A - (n\lambda)^2 B + (n\lambda)^4 C \pm \dots)$$

Für *einen* secundären Stromkreis (Ring oder Rolle) reducirt sie sich auf $\tau_n = \tau = \lambda m_{11} / g_1 = P / W$, welchen Fall wir am Eingang besprochen haben.

Für mehrere secundäre Stromkreise, also jedenfalls für ein Metallstück hat τ_n die obige Form.

Der principielle Unterschied zwischen einer Rolle und einem Metallstück ist also der, dass im ersten Fall $\tau_n = P / W$ nur abhängig ist von Widerstand und Selbstpotential der zu untersuchenden Rolle, im zweiten Falle jedoch τ_n ausser von der Leitungsfähigkeit und der Form des Metallstückes noch abhängig ist:

1. von der Schwingungszahl n des inducirenden Stromes,
2. von der inducirenden Rolle d. i. von der Form des magnetischen Feldes, in welches das Metallstück gebracht ist, da die Grössen A , B , C , Coefficienten mit dem Index 0 enthalten (m_{0a} etc.).

Jedes einzelne würde eine genauere Bestimmung von λ unmöglich machen, wenn nicht beide Einflüsse secundärer Natur wären. Der Einfluss der Schwingungszahl lässt sich durch Aenderung derselben eliminiren. Der Einfluss des Feldes ist so gering, dass z. B. die Aenderung des Feldes innerhalb einer quadratischen Rolle zu vernachlässigen ist. Beides muss bewiesen werden.

Abhängigkeit von n . A hat die Dimension L^2 , B L^6 , C L^{10} etc. Es wird die Reihe τ_n demnach schnell convergiren
 1. mit den linearen Dimensionen des Metallstücks, 2. mit n ,
 3. mit λ . Man kann daher für jedes λ entweder die Grösse des Metallstücks oder n so wählen, dass τ_n sich merklich entweder nur auf das erste Glied $\tau_0 = \lambda A$ oder höchstens auf die beiden ersten $\lambda(A - (n\lambda)^2 B) = \lambda A(1 - q)$ reducirt, wobei das zweite Glied nur als Correction des ersten Gliedes hinzu-

gefügt wird und nicht mehr als 3 bis 4 Proc. des ersten betragen darf, damit das 3. Glied unter 1 pro Mille bleibt und vernachlässigt werden kann (vgl. p. 332).

Es hat dann keine Schwierigkeit, die Grösse dieses zweiten Gliedes festzustellen, wenn man τ_n für zwei Perioden n_1 und n_2 bestimmt.¹⁾ Ich wählte die Schwingszahlen 315 und 256 pro Sec., wobei die bequeme Relation besteht

$$\tau_{n_2} - \tau_{n_1} = 4\pi^2 (B\lambda^3 (315^2 - 256^2) = 4\pi^2 B\lambda^3 256^2 / 2,$$

sodass die Differenz der beiden Werthe τ_{n_2} und τ_{n_1} gerade die Hälfte des gesuchten zweiten Gliedes bei 256 Schwingungen beträgt. Da nur ein Corretionsglied hiermit bestimmt werden soll, sind kleinere Fehler vor allem auch in der Bestimmung von n_1 und n_2 belanglos. Sind mehrere Metallstücke derselben Form aber verschiedener Leitungsfähigkeit zu vergleichen, so genügt es für eines derselben q zu bestimmen, denn es ist q' für ein zweites Metallstück:

$$q' = q \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 = q \left(\frac{\tau'_n}{\tau_n} \right)^2$$

in erster Annäherung

$$= q \left(\frac{\tau'_n}{\tau_n} \right)^2 \left\{ 1 - q \left(\frac{\tau_n'^2}{\tau_n^2} - 1 \right) \right\}^2$$

in zweiter Annäherung. In den meisten Fällen wird die erste Formel völlig ausreichen.

Es wäre jedoch auch sonst sehr unbequem, jedesmal für eine andere Form des Metallstückes q besonders mit zwei Schwingungsdauern zu bestimmen. Für die wichtigsten Körper-

1) Eine Eigenschaft des optischen Telephons macht dies sehr bequem, nämlich mit ungefähr derselben Empfindlichkeit auf zwei Töne zu reagieren, die etwa eine Terz auseinander liegen. Ich habe dies bisher für eine Folge ungenauer Einstimmung gehalten und daher nicht erwähnt. Da es mir jedoch trotz sorgfältigster Einstimmung bisher nicht gelungen ist, nur einen Ton zu erhalten, so scheint die Sache doch tiefer begründet zu sein. Da der Apparat auf jeden der Töne so reagirt, als ob der andere gar nicht vorhanden wäre, die übrigen Eigenschaften also davon unberührt bleiben, so kann hierin nur ein Vorzug des optischen Telephons erblickt werden. Jeder der Eigentöne lässt sich durch Nähern der constanten Magnete (vgl. M. Wien, Wied. Ann. 44. p. 685. 1891) etwas ändern, sodass man ohne Schwierigkeiten ein bestimmtes Intervall, wie oben, festhalten kann.

formen (Kugel und runde Scheibe) lassen sich nun ein für allemal Formeln aufstellen, mit Hülfe deren man τ_0 aus dem experimentell gefundenen τ_n in ähnlicher Weise berechnen kann, wie etwa die Reduction der bei einer beliebigen Temperatur gemessenen Leitungsfähigkeit auf 0° C. erfolgt. Ich komme weiter unten bei den Specialfällen hierauf zurück.

Die Abhängigkeit von τ_n von der Schwingungsdauer des Stromes ist ferner entscheidend für die Versuchsanordnung insofern, als bei einigen Messmethoden dadurch Fehlerquellen entstehen können. Der Strom eines Inductoriums enthält ausser dem Sinusstrom von der Periode der Unterbrechung noch eine Reihe von Strömen höherer Periode. Für jeden dieser Ströme wird τ_n einen anderen Werth haben. Infolgedessen erhält man im Hörtelephon nicht Null, sondern nur ein Minimum, das durch die Obertöne mehr oder weniger verdeckt und verschoben wird. Auch das Dynamometer wird falsche und zwar zu kleine Werthe für τ_n ergeben. Nur bei sehr schlechter Leitungsfähigkeit oder sehr kleinen Metallstücken wo die höheren Glieder von τ_n an und für sich klein sind, wird man einigermaßen richtige Werthe erhalten. Das optische Telephon hingegen reagirt merklich nur auf den Grundstrom, auf den es eingestimmt ist, man erhält immer Null und zwar an der richtigen Stelle.

Will man bei der Methode das Dynamometer oder Hörtelephon anwenden, so muss man eine Stromquelle benutzen, die reine oder annähernd reine Sinusströme liefert, wie der Sinusinductor oder eine Wechselstrommaschine. Sehr bequem ist dabei, dass die Periode nicht genau bekannt und constant zu sein braucht, weil sie nur in einem Correctionsgliede vorkommt.

In der oben angegebenen Weise ist es also immer möglich τ_n auf das erste Glied $\tau_0 = \lambda A$ zu reduciren. In A befinden sich noch Grössen mit dem Index Null; wir kommen damit zu der Abhängigkeit von τ_n von dem magnetischen Felde. Es würde sehr schwierig sein, die Metallstücke immer genau an dieselbe Stelle der Rolle zu bringen. Glücklicherweise stellte sich experimentell sogleich heraus, dass die Aenderungen des Feldes, wenigstens soweit sie innerhalb einer quadratischen Rolle vorhanden sind, keinen merklichen Ein-

fluss auf τ_n haben.¹⁾ Folgende Versuche mögen als Beweis dienen.

Es wurde τ_n für eine Aluminiumscheibe an verschiedenen Stellen einer Rolle bestimmt, in welcher die Scheibe durch Unterlegen von Holzstückchen axial fortbewegt wurde. Die Rolle war ca. 7 cm hoch; die Scheibe befand sich zuerst in der Mitte also 3,5 cm vom oberen Rande entfernt; unter h ist die Entfernung vom obern Rande zu verstehen, unter W der Widerstand der secundären Rolle II' ($\tau_n = \tau_2 = P / W$).

h	W	h	W
3,5 cm	36,55	0,3 cm	36,65
2,2 „	36,55	— 0,4 „	36,40
1,4 „	36,60		

Erst der letzte Werth, wo die Scheibe schon ausserhalb der Rolle sich befand, weicht erheblich ab. Das allmähliche Ansteigen der anderen erklärt sich durch Ansteigen der Zimmertemperatur und folglich auch der des Metalls, welche anfangs 20,7° C. am Schlusse 21,3° betrug.

Der analoge Versuch wurde mit einer Quecksilberkugel in der Rolle A (14 cm hoch) gemacht. Es ergab sich: h Mitte der Kugel bis oberer Rand der Rolle.

1) Diese Thatsache dürfte auffallend erscheinen; sie erklärt sich daraus, dass der grösste Theil der Wirkung von den am *Rande* des Metallstücks fliessenden Strömen herrührt. Denn es ist

$$\tau_0 = \lambda A = \lambda \cdot \sum \sum \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{\sum \frac{m_{0a}^2}{g_a}}.$$

Der Voraussetzung nach ist nun das Metallstück ein Rotationskörper, die Elementarströme, Kreisströme. Für das annähernd homogene Feld quadratischer Rollen (vgl. hierüber auch p. 336) ist m_{0a} und m_{0b} proportional dem Quadrate des Radius, m_{ab} , g_a , g_b proportional dem Radius selbst. Zähler und Nenner von τ_0 bestehen mithin aus Reihen, deren Glieder den Radius in der dritten Potenz enthalten, und schnell mit dem Radius convergiren; der grösste Theil der Wirkung geht von dem äusseren Rande des Metallstückes aus. Betrachten wir diesen äusseren Rand allein, so bildet er einen Ring, bei dem $\tau_n = P / W$, also ganz unabhängig von dem Felde ist. Eine Aenderung des Feldes kann daher nur den kleinen Theil von τ_n beeinflussen, der von den mittleren, inneren Strömen des Metallstückes herrührt. Eine kleine Aenderung des Feldes kann also nur eine sehr kleine Aenderung von τ_n zur Folge haben.

<i>h</i>	<i>W</i>	<i>h</i>	<i>W</i>	<i>h</i>	<i>W</i>
7 cm	133,5	5 cm	133,6	3 cm	134,3
6 „	133,4	4 „	133,8	2 „	136,4

Beim vierten Werth, wo die Kugel schon 1 cm aus der Rolle herausragte, beginnt die Einwirkung des Feldes eben merklich zu werden.

Aus den Versuchen ergibt sich mithin, dass, solange das Metall innerhalb der Rolle bleibt, die Einwirkung der Aenderung des Feldes zu vernachlässigen ist. Es ist deshalb durchaus nicht nothwendig, das Metall genau an dieselbe Stelle der Rolle zu bringen.

Hiermit ist die Aufgabe, welche Hughes anstrebte, gelöst, nämlich mit Hülfe von Inductionsströmen die Leitungsfähigkeit zweier Metallstücke von beliebiger aber gleicher Form und Grösse mit einander zu vergleichen.

Man bringt also die beiden Metallstücke am besten in einem Gefäss mit Wasser — um die Temperatur bestimmen zu können — in die Rolle *I* und stellt die Inductionswaage auf Null. Die Leitungsfähigkeiten verhalten sich dann wie $P/W_1 : P/W_2$ oder die specifischen Widerstände der Metalle, wie die Widerstände der secundären Rolle *II'*. Zum Vergleich der Leitungsfähigkeiten braucht man also von der ganzen Inductionswaage nur die Widerstände W_1 und W_2 zu kennen.

Ehe ich zu einigen Anwendungen übergehe, bleibt zu untersuchen, was uns die Formeln darüber sagen, wie die Intensität der Wirkung der Metallstücke auf die Rolle *I* d. i. die *Empfindlichkeit* der Waage von den Dimensionen und der Leitungsfähigkeit des Metalles und von der Schwingungszahl *n* abhängt. Entscheidend hierfür ist das Verhältniss der Aenderung des Selbstpotentials zum Selbstpotential der primären Rolle *I* selbst, also $(p_0 - p_0')/p_0$ und analog $(w_0' - w_0)/w_0$. Da die anderen Glieder nur Correctionsglieder sein sollen, so folgt $(p_0 - p_0')/p_0$ aus der Gleichung für p_0' auf p. 320 als:

$$\frac{n^2 \sum_a \sum_b \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{w_a w_b}}{p_0} = \frac{n^2 \lambda^2 \sum_a \sum_b \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{g_a g_b}}{p_0}$$

also proportional $n^2 \lambda^2 \cdot [L^4]$.

$$\frac{w_0' - w_0}{w_0} = \frac{n^2 \sum \frac{m_{0a}^2}{w_a}}{w_0} = \frac{n^2 \lambda_k \lambda \sum \frac{m_{0a}^2}{g_a}}{g_0}$$

worin λ_k die Leitungsfähigkeit des Kupfers der Rolle bezeichnen soll; also schliesslich $(w'_0 - w_0/w_0)$ prop. $n^2 \cdot \lambda \cdot [L^4]$, indem λ_k naturgemäss gleich bleibt.

Es folgt hieraus, dass, wenn man Metall schlechter Leitungsfähigkeit mit derselben Genauigkeit messen will, wie solches guter, man entweder die Schwingungszahl erhöhen oder die Dimensionen von Rolle und Metallstück vergrössern muss.

Der naheliegende Gedanke die Leitungsfähigkeit von Electrolyten auf diesem Wege zu messen, erscheint vorläufig leider unausführbar, da die am besten leitenden Flüssigkeiten noch immer mehr als 10 000 mal schlechter leiten, wie Quecksilber.

Man müsste also entweder eine 10 000 mal grössere Schwingungszahl anwenden oder die Dimensionen auf das 100 fache steigern.

IV. Vergleich von Leitungsfähigkeiten.

Eine Anzahl runder Metallscheiben von ca. 2,8 cm Radius und ca. 2 mm Dicke wurden untersucht. Die Metalle waren als „rein“ von Sy und Wagner in Berlin bezogen. Die Scheiben wurden nach einander in die Rolle a (7 cm Durchmesser) gebracht und mit der Rolle c im Zweige 2 compensirt. Die folgende Tabelle gibt die Resultate:

	I	II	III	W_{256}	W_0	σ
Kupfer. . .	23,63	23,64	23,65	23,64 Ω	22,30	1550
Aluminium .	35,91	35,86	35,93	35,90 „	35,01	2940
Zink . . .	75,2	75,55	75,40	75,38 „	74,93	5380
Zinn . . .	141,0	142,2	142,8	142,0 „	141,8	12500
Blei . . .	237,0	239,2	235,0	237,1 „	237,1	18800

Hierin bedeutet I, II, III 3 Einstellungen bei $n = 256 \cdot 2\pi$ wobei die Empfindlichkeit, wie aus Obigem folgt, mit λ abnimmt. W_{256} bedeutet den Mittelwerth dieser drei Einstellungen. W_0 ist der hieraus berechnete Wert von W für 0 Schwingungen, entsprechend τ_0 . Derselbe wurde in der oben angegebenen Weise mit Hülfe von $n_2 = 315 \cdot 2\pi$ für die Aluminiumscheibe bestimmt und für die übrigen nach der Formel $q' = q(\tau_n'/\tau_n)^2 = q(W_n/W_n')^2$ (p. 322) berechnet. σ ist der spezifische Widerstand wie er sich aus früheren Beobachtungen ergibt. W_0 und σ sind einander annähernd proportional. Die

Abweichungen erklären sich theils aus kleinen Differenzen in den Dimensionen, theils daraus, dass die Metalle nicht ganz rein waren. Ich komme auf diese Metallscheiben weiter unten noch einmal zurück.

Besonders bequem ist die Methode natürlich, wenn man Aenderungen der Leitungsfähigkeit ein und desselben Metallstückes z. B. mit der Temperatur bestimmen will, da man dabei sicher ist, immer gleiche Dimensionen zu haben. Die kleine Correction, welche für die Ausdehnung durch die Wärme anzubringen wäre, ist zu vernachlässigen.

Es wurde der Temperaturcoefficient zwischen 10 und 30° C. einer Kupfersorte bestimmt, welcher für weiter unten zu besprechende Versuche wichtig ist.

Eine Kupferscheibe von 7 cm Radius und ca. 0.5 mm Dicke wurde auf kleine Holzklötze in ein Glasgefäß mit Wasser gelegt und in die Rolle *B* gebracht. Das Glasgefäß war mit einer Filzhülle umgeben, um die Rolle vor allzu-schnellen Temperatureinflüssen zu schützen und um das Wasser möglichst lange auf constanter Temperatur zu erhalten. Da es auf die Form des Metalles nicht ankam, wurde in die Mitte der Kupferscheibe ein Loch von 3,5 cm Radius geschnitten, um dem Wasser beim Umrühren freieren Durchgang zu gewähren. Die Temperatur wurde in der Weise hergestellt, dass wärmeres Wasser zugegossen wurde. Darauf wurde das Gefäß in die Rolle gestellt, umgerührt, die Temperatur abgelesen, wobei sich die Thermometerkugel unmittelbar an dem Kupfer befand, dann die Nulleinstellung gemacht und wieder die Temperatur abgelesen. Da die Einstellung nur Bruchtheile einer Minute dauerte, betrug die Differenz der beiden Ablesungen immer weniger als 0,1° C. Der Temperaturcoefficient gilt für die Umgebung von 19° C. und ist nach der Formel berechnet

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_{19^0}} \frac{\lambda - \lambda_{19^0}}{\Theta - 19^0} = \frac{1 - W / W_{19^0}}{\Theta - 19^0}$$

worin W der auf $n = 0$ reducirte Widerstand der compensirenden Rolle *II'* ist. Diese Reduction von W_{266} auf W_0 geschah, wie oben, indem für eine Leitungsfähigkeit auch W_{315} gemessen, daraus die Correction für diese und auch für die übrigen Leitungsfähigkeiten berechnet wurde. Eine erste Versuchsreihe gab

Θ	W_{256}	W_0	α
9,06°	97,35	94,91	
18,80°	101,10	98,74	+ 0,00 396
28,82°	104,85	102,58	- 0,00 388

Eine zweite Versuchsreihe gab:

Θ	W_{256}	W_0	α
9,28°	97,60	95,16	
19,97°	101,70	99,33	+ 0,00 393
29,59°	105,15	102,88	- 0,00 372

Als Mittelwerth des Ganzen ergibt sich um 19° herum $\alpha = 0,00387$. Da derselbe für die tieferen Temperaturen etwas zuzunehmen scheint, so habe unten ich als Temperaturcoefficient für die Reduction auf 0° einfach 0,004 angenommen.

V. Messung von Leitungsfähigkeiten.

Bisher gestattet die Methode nur die Leitungsfähigkeit von zwei Metallstücken gleicher Dimension und Form mit einander zu vergleichen. Will man irgend genauere Werthe für die Leitungsfähigkeit erhalten, so kann man zum Vergleich nur Quecksilber nehmen, da die Leitungsfähigkeiten aller anderen Metalle, abgesehen von den schwer zu vermeidenden kleinen Verunreinigungen, durch Differenzen in der Structur Veränderungen bis zu mehreren Procenten erleidet.

Es ist nun erstens schwierig Quecksilbermengen und feste Metalle genau in dieselbe Form zu bringen. Ferner würde die Empfindlichkeit der Methode nicht ausreichen, um zwei Metallmassen so verschiedener Leitungsfähigkeit, wie Quecksilber und die meisten anderen Metalle sie haben, mit einiger Genauigkeit zu vergleichen. Denn nach obigen Formeln p. 325 ist die Einwirkung auf das Selbstpotential der Rolle proportional λ^2 . Man muss deshalb schon ziemlich grosse Quecksilbermengen anwenden, um eine genügend starke Einwirkung zu erhalten. Allzugross darf man hingegen die gut leitenden Metallstücke auch nicht nehmen, weil man dann die von n abhängigen Glieder von τ_n zu gross erhält.

Man könnte nun die Einwirkung der Aenderung einer Dimension des Metallstückes z. B. der Dicke bei runden Scheiben, auf τ_n experimentell bestimmen, und dann dicke Quecksilberscheiben mit dünnen Kupferscheiben von demselben Radius vergleichen, ähnlich wie es Oberbeck und Bergmann¹⁾ gethan haben.

1) l. c. p. 801.

Bei weitem vorzuziehen wäre es jedoch, wenn man ohne Vergleich mit einem anderen Stück direct aus Form und Dimensionen und aus dem beobachteten Werthe von τ_0 auf die Leitungsfähigkeit schliessen könnte.

Dazu muss man

$$\tau_0 = \lambda \cdot \frac{\sum \sum \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{g_a g_b}}{\sum \frac{m_{0a}^2}{g_a}}$$

berechnen. Es gelingt dies für die einfachsten Körperformen, Kugel und dünne runde Scheibe, in einem *homogenen Feld*.

Einfluss der Inhomogenität des Feldes.

Das Feld der „quadratischen Rollen“, welche benutzt wurden, ist sowohl axial wie radial inhomogen. Es würde nur in dem Falle einen Zweck haben, τ_0 für ein homogenes Feld zu berechnen, wenn diese Inhomogenität des Feldes ohne wesentlichen Einfluss auf τ_0 ist. Dieses soll im Folgenden experimentell nachgewiesen werden.

Dass die axiale Abweichung des Feldes keinen merklichen Einfluss hat, folgt direct aus den obigen Versuchen mit der Quecksilberkugel (p. 325). Die axiale Aenderung des Feldes ist an den Enden der Rolle viel grösser als in der Mitte, wo es sich in einem ziemlich grossen Bereiche nur wenig ändert, d. h. annähernd axial homogen ist. Der Werth von τ_n war auch, als die Kugel 1 cm aus der Rolle herausragte, noch kaum merklich (0,2 Proc.) von dem, als die Kugel sich in der Mitte befand, verschieden. Noch viel weniger merklich kann die Einwirkung der viel geringeren Abweichung des mittleren Feldes von dem homogenen sein.

Nicht so sicher folgt aus den obigen Versuchen mit der Aluminiumscheibe, dass die radiale Inhomogenität ohne Einfluss ist, weil die radiale Aenderung des Feldes nach den Enden der Rolle zu nur sehr gering ist. Da jedoch dieser Beweis eine nothwendige Vorbedingung für das Folgende ist, so muss er noch speciell experimentell geführt werden. Zu diesem Zwecke wurde zuerst untersucht, wie gross der Einfluss sehr starker radialer Abweichungen des Feldes auf τ_n sei.

Als extreme Fälle wurde eine Kupferscheibe einmal in eine ringförmige Rolle, das andere mal auf eine Rolle gelegt, welche nur den halben Durchmesser der Scheibe hatte. Das Feld eines Kreisstromes vom Radius r ist in einem Punkte in der Kreisebene, der um ϱ vom Mittelpunkte entfernt ist, proportional

$$\left(1 + \frac{3}{4} \frac{\varrho^2}{r^2}\right),$$

also laufen bei weitem mehr Kraftlinien durch den Rand der Scheibe, wie durch die Mitte. In dem anderen Falle laufen alle Kraftlinien durch den mittleren Theil der Scheibe. Es ergab sich eine Differenz von 6,3 Proc für τ_n . Wenn wir das τ_n für ein homogenes Feld als etwa in der Mitte liegend annehmen, so ist die Abweichung für den Ring ca. 3 Proc. Das Feld der quadratischen Rollen nähert sich ganz erheblich mehr einem homogenen, als das eines Ringes, besonders wenn, wie stets im Folgenden, nur der mittlere Theil dieses Feldes bis zu ca. $\frac{4}{5}$ des Radius benutzt wird. Somit kann man schon hieraus den Schluss ziehen, dass die Abweichung von τ_n nur Bruchtheile eines Procents betragen kann. Zum exacten Beweis wurde noch folgendes Experiment angestellt:

Helmholtz hat ein annähernd homogenes Feld dadurch erzielt, dass er zwei ringförmige Rollen vom Radius r in die Entfernung r voneinander brachte; dann fallen die quadratischen Glieder in dem Ausdrucke für das magnetische Feld fort und es wird proportional

$$\left(1 - \frac{54}{125} \cdot \frac{\varrho^4}{r^4}\right).$$

Das übrig bleibende Glied vierter Ordnung ist negativ, also ist die übrigbleibende Abweichung vom homogenen Felde der unserer Rollen entgegengesetzt. Man kann nun erstens τ_n für eine Scheibe einmal in dem Helmholtz'schen Felde, das andere mal in einer quadratischen Rolle bestimmen; ist hier die Differenz gering, so ist die gesuchte noch geringer. Ferner kann man die Aenderung von τ_n mit der Aenderung des Feldes direct beobachten, indem man die Rollen einander näher und näher bringt, bis sie einander berühren, also von dem Helmholtz'schen Felde allmählich zu dem einer kurzen annähernd ringförmigen Rolle übergeht.

Das Helmholtz'sche Feld wurde durch zwei sehr kurze Rollen eines Wiedemann'schen Galvanometers hergestellt, deren Radius ca. 6,5 cm betrug. Dazwischen wurde eine Kupferscheibe von 6 cm Radius gebracht, welche knapp in die Rollen hineinpasste. Die erhaltenen Abweichungen sind also erheblich grössere, als bei den späteren Versuchen, wo nur der homogenere mittlere Theil des Feldes benutzt wurde. Ich erhielt $W = 26,63$, während ich in einer quadratischen Rolle 26,79 fand. Demnach eine Differenz von ca. $\frac{1}{2}$ Proc.

Bei der allmählichen Näherung der beiden Rollen erhielt ich folgende Werthe für W :

Abstand = 4 cm	3,5 cm	3,00 cm	2,5 cm	2,0 cm
$W = 26,51$	26,62	26,75	26,89	27,03

Aus beidem folgt, dass die geringe Abweichung des Feldes quadratischer Rollen von dem homogenen nur einen sehr kleinen Einfluss auf den Werth von τ_n hat, welcher 0,3 Proc. kaum überschreiten dürfte.

Im Folgenden werden wir in den speciellen Fällen durch Vergleich der für ein homogenes Feld berechneten und für das Feld quadratischer Rollen experimentell gefundenen Werthe von τ_n die Möglichkeit erhalten, diesen Einfluss direct festzustellen und gleichzeitig die kleine Correction in den Zahlenconstanten der berechneten Formeln für τ_n vorzunehmen, damit sie statt für ein homogenes Feld für das quadratischer Rollen gelten.

Kugel.

Die Theorie einer leitenden Kugel in einem homogenen periodischen Felde ist vollständig von Oberbeck¹⁾ gegeben, und zwar findet derselbe, dass „durch die Anwesenheit der Kugel das Magnetfeld so verändert wird, als ob im Centrum derselben ein kleiner Magnet sich befände, dessen Axe mit den Kraftlinien zusammenfällt, dessen Moment periodisch veränderlich ist. Doch ist die Phase desselben verschieden von der Phase der Aenderungen des ursprünglichen Feldes“. Das magnetische Potential der Kugel auf einen Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte r mit der Richtung der Kraftlinien den Winkel ϑ einschliesst, findet Oberbeck als:

1) Oberbeck, Wied. Ann. **31**. p. 824. 1887.

$$P = - \frac{\cos \vartheta}{r^2} (g_1 \cos n t + h_1 \sin n t),$$

worin g_1 und h_1 Functionen von λ , n und R , dem Radius der Kugel, sind.

Unsere Grösse τ_n folgt unmittelbar daraus als $\tau_n = g_1 / n h_1$, und berechnet sich aus den von Oberbeck angegebenen Reihenentwickelungen als:

$$\tau_n = 1,197 \lambda \cdot R^2 \{ 1 - (4 \pi \lambda n R^2)^2 5,764 \cdot 10^{-4} \\ + (4 \pi \lambda n R^2)^4 7,21 \cdot 10^{-7} - \dots \},$$

oder indem $\tau_0 = 1,197 \cdot \lambda \cdot R^2$ eingeführt wird:

$$\tau_n = \tau_0 \{ 1 - (n \tau_0)^2 \cdot 0,0635 + (n \tau_0)^4 \cdot 0,0094 - \dots \}.$$

Es gilt, diese Formel experimentell zu verificiren. Zu diesem Zwecke kann allein Quecksilber genommen werden, weil bei allen übrigen Metallen die Leitungsfähigkeit unsicher ist.

Nach obiger Formel darf $\tau_0 n$ nicht viel grösser als $1/2$ sein, da sonst das Glied vierter Ordnung über unsere Fehlergrenze $1 \text{ } ^0_{00}$ steigt. Daraus berechnet sich R für $n = 256 \cdot 2 \pi$ und $\lambda = 1,046 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}$ (Quecksilber bei 18° C.).

$$R = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 1608 \cdot 1,197 \cdot 1,046 \cdot 10^{-5}}} = 4,99 \text{ cm.}$$

Ich füllte daher zwei Glaskugeln, eine von ca. 4 cm, die andere von ca. 5 cm Radius, die möglichst kugelförmig geblasen waren, mit gewaschenem und im Vacuum destillirtem Quecksilber. Kleine Abweichungen von der Kugelform haben hier einen ebenso geringen Einfluss, wie etwa kleine Abweichungen einer Capillare von der genau cylindrischen Form: es kommt hauptsächlich auf den richtigen Mittelwerth an.

Von diesen Quecksilberkugeln musste nun der Radius, τ_0 und das quadratische Glied von τ_n experimentell bestimmt werden, um die obige Formel zu prüfen.

Die Bestimmung des Radius geschah nach drei Methoden:

I. Durch Wägung des Quecksilbers. Diese Methode hat den Vorzug, dass sie einen Mittelwerth liefert, den Nachtheil, dass man wegen des Ansatzrohres der Kugel nicht wissen kann, wann die Kugel ganz gefüllt ist.

II. Durch Messung des Umfanges mit Papierstreifen, die an einer Stelle mit einer feinen Nadel durchbohrt wurden; es

musste hierbei die Dicke des Papierstreifens (0,075 mm) von dem gefundenen Radius abgezogen werden.¹⁾

III. Indem die Kugeln zwischen zwei Spitzen gebracht wurden, deren Entfernung mit dem Comparator gemessen wurde.

Bei II. und III. misst man den äusseren Umfang der Kugel; es muss daher die mittlere Dicke der Glaswand von dem Radius abgezogen werden. Die Dicke der Glaswand erwies sich als ziemlich verschieden und die Werthe schwankten

bei der kleineren Kugel zwischen 0,30 und 0,65 mm, Mittel 0,47 mm
 „ „ grösseren „ „ 0,45 „ 0,65 „ „ 0,55 „

Hierin dürfte der grösste Fehler der beiden letzten Bestimmungsweisen liegen. Die Gefässe waren übrigens ziemlich genau kugelförmig, da die einzelnen Messungen nach II. und III. keine Differenzen über $\frac{1}{2}$ Proc. ergaben.

Ich erhielt folgende Mittelwerthe:

	Wägung	Papierstreifen	Spitzen	Mittel
Kugel 1	3,841	3,839	3,852	3,844 cm
Kugel 2	4,950	4,938	4,944	4,944 „

Zur Bestimmung von τ_n wurden die Kugeln in die Rolle *A* gebracht (ca. 14 cm Durchmesser). Der Einfluss der unsicheren Füllung der Kugeln, welcher oben bei der Bestimmung des Radius durch Wägung störte, war hier zu vernachlässigen, weil die Oeffnung der Kugel naturgemäss nach oben gerichtet war. In dem Quecksilber, was dort zu viel, resp. zu wenig ist, laufen nur schwache Ströme von kleinem Radius, die nur eine sehr geringe Wirkung haben können. Eine Hinzufügung von 1 Proc. Quecksilber gab eine Aenderung von τ_n von kaum 1 $\frac{0}{100}$.

Für die kleinere Kugel 1 erhielt ich bei drei verschiedenen Versuchen als einzuschaltenden Rheostatenwiderstand:

219,2 Siem. 218,2 Siem. 218,5 Siem. Mittel 218,63 = 205,7 Ω .

Dazu der Widerstand der compensirenden Rolle *II'* selbst:
 + 10,90 Ω = 216,6 Ω . Hieraus $\tau_n = \tau_2 = P / W$

$$\tau_n = \frac{3,999 \cdot 10^{+7} \text{ cm}}{216,6 \cdot 10^9 \text{ cm sec}^{-1}} = 1,8385 \cdot 10^{-4} \text{ sec.}$$

1) Heydweiller, Absol. Strommessung. p. 17. Inauguraldissert. Würzburg 1886.

Nach der obigen Formel mit Hülfe des gefundenen Werthes von $R = 3,844$ cm und der Leitungsfähigkeit des Quecksilbers, welches $19,5^{\circ}$ C. besessen hatte, berechnet:

$$\tau_n = 1,8378 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$$

in sehr guter Uebereinstimmung.

Für die grössere Kugel 2 wurde gleichzeitig das quadratische Glied q bestimmt, indem abwechselnd mit $n = 256 \cdot 2\pi$ und $n = 315 \cdot 2\pi$ Einstellungen gemacht wurden. Es war hier die einzelne Nulleinstellung erheblich sicherer, wie bei der kleineren Kugel und es konnte daher hier q mit einiger Sicherheit ermittelt werden.

Ich erhielt der Reihe nach folgende Werthe für den Rheostatenwiderstand:

$n/2\pi = 256$	315	256	315	256
129,2 Siemens	130,35	129,3	130,4	129,2

Die Lufttemperatur war ebenso wie die des Quecksilbers bei diesem Versuche 18° C. Demnach der Widerstand der Rolle II' selbst $= 11,85 \Omega$. Also $W_{256} = 133,42 \Omega$, $W_{315} = 134,46 \Omega$. Hieraus

$$q = \frac{2 \cdot (W_{256} - W_{315})}{W_0} = \frac{2 \cdot 1,04}{131,34} = 0,0154.$$

Es folgt also $\tau_n = 2,998 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$, $\tau_0 = 3,045 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$. Die Berechnung nach obiger Formel gibt

$$\tau_n = 3,008 \quad \tau_0 = 3,055 \quad q = 0.0156.$$

Die Differenz von etwa 0,3 Proc. zwischen Rechnung und Versuch übersteigt die hier sehr kleinen Fehlergrenzen und rührt von der Inhomogenität des Feldes her, welche wie die obigen Versuche ergeben, τ_n etwas verkleinert. Bei der kleineren Kugel fand sich diese Differenz nicht; erstens weil das Feld dort verhältnissmässig homogener ist und dann weil die Einstellungsfehler dort grösser waren ca. 0,3 – 0,4 Proc., so dass dieselben die Differenz verdecken können.

Aus den Resultaten mit Kugel 2 ergibt sich für τ_n statt des berechneten Ausdruckes:

$$\tau_n = 1,197 \cdot R^2 \lambda (1 - (4\pi \lambda_n R^2)^2 5,76 \cdot 10^{-4})$$

die Form:

$$\tau_n = 1,194 R^2 \lambda (1 - (4\pi \lambda_n R^2)^2 5,6 \cdot 10^{-4}).$$

Die letztere ist offenbar für das Feld unserer quadratischen Rollen die richtigere und eventuell zu benutzen.

Ich habe es bisher vermieden für τ_0 nach Analogie mit einer Rolle oder einem Ring den Ausdruck „Relaxationszeit“ oder „Zeitconstante“ zu gebrauchen aus folgendem Grunde:

Wir haben oben gesehen, dass der Werth von τ_0 von dem Feld abhängig ist d. h. abhängig davon, wie die Stromintensität in dem Metallstück vertheilt ist. Je mehr die Kraftlinien und damit die Intensität nach dem Rande zunehmen, desto kleiner wird τ_0 .

Nun haben Niven¹⁾ und Lamb²⁾ die Zeitconstante einer Kugel berechnet und sie definirt als die längste Zeit, in welcher ein Strom von der Intensität 1 auf die Intensität $1/e$ herabsinkt.

Im homogenen Feld ist, wie aus den Versuchen mit dem Hemholtz'schen Feld (p. 331) sich ergibt, τ_0 nicht ein Maximum, sondern es nimmt noch zu, wenn die Kraftlinien in der Mitte des Metallstückes enger verlaufen, wie an dem Rande.

Demnach muss die von Niven und Lamb berechnete Zeitconstante grösser sein, wie unser τ_0 . Sie fanden $\tau = (4/\pi) R^2 \lambda = 1,273 R^2 \lambda$ also um über 6 Proc. grösser als τ_0 . Es sind dies daher verschiedene Grössen, die nicht mit demselben Namen bezeichnet werden dürfen.

Die Form der Kugel hat den Vorzug, dass die Theorie vollständig klar liegt und dass man den Radius — wenigstens bei festen Metallen — ohne Längenmessung durch Gewicht und specifisches Gewicht feststellen kann; sie hat den grossen Nachtheil, dass Kugeln technisch schwer herzustellen sind. Ich habe deshalb auch nur mit zwei Quecksilberkugeln Versuche angestellt, was zur genauen experimentellen Feststellung der Constanten nicht genügen würde.

Viel leichter auf jeder Drehbank herzustellen, wenn auch die Theorie sich bei ihnen nicht so weit durchführen lässt, sind *runde Scheiben*.

1) Niven, Phil. Tr. 172. p. 307. 1882.

2) Lamb, Proc. Roy. Soc. 35. p. 130—32. 1883.

Runde Scheiben.

$$\tau_0 = \lambda \cdot \frac{\sum_a \sum_b \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{g_a g_b}}{\sum_a \frac{m_{0a}^2}{g_a}}$$

lässt sich für *dünne* runde Scheiben in folgender Weise berechnen. Die Dicke der Scheibe D sei so klein, dass die Intensität innerhalb derselben als constant angesehen werden kann. Dann brauche ich mir nur die Scheibe durch concentrische Kreise in unendlich dünne Ringe zerschnitten zu denken und

für diese τ_0 zu berechnen. Ueber alle diese Ringe ist zu summiren d. h. von 0 — R zu integriren, wenn R der Radius der Scheibe ist.

Für einen beliebigen Ring mit dem Radius ϱ_a und der Breite $d\varrho_a$ (vgl. Fig. 5) ist:

$$g_a = \lambda w_a = \frac{2\pi \varrho_a}{D \cdot d\varrho_a}$$

m_{0a} ist für ein homogenes Feld proportional ϱ_a^2 also:

$$m_{0a} = C \cdot \varrho_a^2.$$

Für einen beliebigen anderen Ring ϱ_b ist ebenso:

$$g_b = \frac{2\pi \varrho_b}{D \cdot d\varrho_b} \quad m_{0b} = C \cdot \varrho_b^2$$

m_{ab} , der gegenseitige Inductioncoefficient von zwei Kreisströmen ist nach Maxwell:¹⁾

1) Maxwell, Electr. and Magn. II. § 704. Diese Formel gilt streng für die gegenseitige Induction von zwei Kreisströmen, deren Abstand klein ist gegen den Radius. Für grössere Abstände treten Correctionsglieder hinzu. Bei den Scheiben geht, wie oben auseinandergesetzt, die bei weitem grösste Wirkung von den dem Rande benachbarten Strömen aus. Bei diesen ist die Bedingung: Abstand klein gegen Radius gewahrt. Der mittlere Theil der Scheibe hat nur eine geringe Wirkung. — Die Correctionsglieder, welche hier eigentlich hinzugefügt werden müssten,

Fig. 5.

$$m_{ab} = 4\pi\varrho_a \left(\ln \frac{8\varrho_a}{\varrho_a - \varrho_b} - 2 \right) = 4\pi\varrho_a \left(\ln \frac{\varrho_a}{\varrho_a - \varrho_b} + 0,083 \right)$$

Es ist also:

$$\tau_0 = \lambda \cdot \frac{\sum \sum \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{g_a g_b}}{\sum \frac{m_{0a}^2}{g_a}} = \lambda \cdot \frac{\int_0^R \int_0^R \frac{C \varrho_a^2 \cdot C \varrho_b^2 \cdot 4\pi\varrho_a \left(\ln \frac{\varrho_a}{\varrho_a - \varrho_b} + 0,083 \right)}{\frac{2\varrho_a\pi}{D \cdot d\varrho_a} \cdot \frac{2\varrho_b\pi}{D \cdot d\varrho_b}}}{\int_0^R \frac{C^2 \varrho_a^4}{\frac{2\pi\varrho_a}{D \cdot d\varrho_a}}} \\ \tau_0 = \frac{2 \cdot D \cdot \lambda \int_0^R d\varrho_a \varrho_a^2 \int_0^R d\varrho_b \cdot \varrho_b \ln \frac{\varrho_a}{\varrho_a - \varrho_b} + 0,166 D \lambda \int_0^R d\varrho_a \cdot \varrho_a^2 \int_0^R d\varrho_b \cdot \varrho_b}{\int_0^R \varrho_a^3 d\varrho_a}$$

Der Nenner und das zweite Glied des Zählers lassen sich ohne weiteres integrieren und es wird:

$$\tau_0 = \frac{8 \cdot D \cdot \lambda}{R^4} \int_0^R d\varrho_a \cdot \varrho_a^2 \int_0^R \varrho_b \ln \frac{\varrho_a}{\varrho_a - \varrho_b} d\varrho_b + 0,111 \cdot D \cdot R \cdot \lambda.$$

Auch das erste Glied ist infolge der einfachen Grenzen integrierbar und gibt:

$$\int_0^R \varrho_a^2 d\varrho_a \int_0^R \varrho_b \ln \frac{\varrho_a}{\varrho_a - \varrho_b} d\varrho_b = \frac{1}{2} \int_0^R d\varrho_a \left\{ \varrho_a^2 (R^2 - \varrho_a^2) \ln \frac{\varrho_a}{\varrho_a - R} + \varrho_a^2 R \left(\varrho_a + \frac{R}{2} \right) \right\} \\ = \frac{R^5}{4}$$

Hieraus

$$\tau_0 = 2 R D \lambda + 0,111 \cdot R \cdot D \cdot \lambda = 2,111 \cdot R \cdot D \cdot \lambda.$$

Lamb¹⁾ hat auch für dünne runde Scheiben die „Zeitconstante“

sind als kleine Aenderungen kleiner Grössen sehr klein. Dieselben vergrößern den Werth der gegenseitigen Induction, demnach ist das ohne sie berechnete, τ_0 etwas zu klein.

1) Lamb, Proc. Roy. Soc. 42. p. 289—96. 1887.

berechnet, wieder mit derselben Definition wie bei der Kugel. Er behandelt die Scheiben als Specialfall eines Rotationsellipsoids, dessen eine Axe sehr klein wird, und erhält:

$$\tau = 2,26 \cdot R \cdot D \cdot \lambda.$$

Wenn wir hier den Zahlenwerth wieder, wie bei der Kugel, als um 6,3 Proc. zu gross annehmen, so erhalten wir $\tau_0 = 2,118 \cdot R \cdot D \cdot \lambda$ in guter Uebereinstimmung mit dem oben berechneten Wert, der, wie gesagt, in Folge Vernachlässigung von Correctionsgliedern etwas zu klein sein kann. Jedoch sind natürlich beide Werthe unsicher. Sicherheit kann nur das Experiment geben.

Lamb berechnet ferner den Einfluss der Dicke der Scheibe in erster Annäherung als $\tau = 2,26 \cdot R \cdot D \cdot \lambda (1 - (D/R))$. Bei kleinerer Dicke habe ich dies mit dem Versuch in Uebereinstimmung gefunden; bei grösserer Dicke reicht die Formel nicht aus; ich fand jedoch vollständige Uebereinstimmung des Experimentes mit der sehr ähnlichen Formel:

$$\tau_0 \text{ prop. } \frac{\lambda \cdot D \cdot R}{1 + 0,94 D/R}.$$

Der Einfluss der Dicke ist hier offenbar von der grössten Wichtigkeit, weil man besonders bei schlecht leitenden Metallen nicht immer ganz dünne Scheiben nehmen kann.

Ehe ich zu den Versuchen zur Prüfung der Formel überging, wurde vorweg der Einfluss des quadratischen Gliedes von τ_n für runde Scheiben bestimmt. τ_n sei, wie bei der Kugel, in der Form dargestellt:

$$\tau_n = \tau_0 (1 - (n \tau_0)^2 a_1 + (n \tau_0)^4 a_2 \dots).$$

Hierin sind $a_1, a_2 \dots$ reine Zahlen und können demnach nur von der Form des Metallstückes abhängig sein. Im Falle einer runden Scheibe wäre also eine Abhängigkeit von D/R möglich. Eine solche habe ich nicht entdecken können, obgleich ich dies Verhältniss sehr variirt habe. Als dünne Scheiben wurden Kupferscheiben, als dicke Quecksilberscheiben benutzt, die, da es hier auf die genaue cylindrische Form noch nicht ankam, einfach dadurch hergestellt wurden, dass Quecksilber in runde Glasgefässe gegossen wurde. Zur Bestimmung von a_1 wurde wieder τ_n für $n = 256 \cdot 2\pi$ und $315 \cdot 2\pi$ gemessen. Einige Zahlen seien hier angeführt.

	<i>R.</i>	<i>D.</i>	<i>R/D</i>	α_1
Cu-Scheibe	5,5	0,2	27,5	0,072
Hg „	9	1,9	4,7	0,079
„	6	3,5	1,7	0,076
„	6	5,0	1,2	0,073
			Mittel	0,075

Die Abweichungen vom Mittelwerth sind durchaus innerhalb der Fehlergrenzen und nicht eine Richtung vorherrschend. Ein Fehler von 5 Proc. bei q , bewirkt einen Fehler von höchstens 1 $\frac{0}{00}$ bei τ_n (je nach dem Werth von $\tau_0 n$). Demnach kann für alle runden Scheiben, unabhängig von D/R , die Formel gelten:

$$\tau_n = \tau_0 \{1 - 0,075 (\tau_0 n)^2\}$$

oder, da man τ_n beobachtet und τ_0 sucht:

$$\tau_0 = \tau_n \{1 + 0,075 (\tau_n n)^2 + 0,017 (\tau_n n)^4\}.$$

Im Folgenden sind alle Beobachtungen nur für eine Schwingungsdauer (256) gemacht und τ_0 nach obiger Formel berechnet.

Zur Prüfung der Formeln konnte auch hier nur Quecksilber benutzt werden, wie bei den Kugeln.

Das Quecksilber wurde in aus Holz gedrehte Hohlräume gegossen; deren Durchmesser wurde mit dem Comparator gemessen, und bei dem einen Gefäß zu 8,84 cm, bei dem anderen zu 6,07 cm bestimmt. Die Dicke der Scheiben wurde durch das Gewicht festgestellt.

Die Capillarität konnte insofern eine Fehlerquelle bilden, als infolgedessen der Rand der Scheibe zu dünn, die Mitte zu dick ist. Die beiden Wirkungen hiervon heben sich nicht auf, da die mittleren Theile einen viel geringeren Einfluss haben als der Rand. Es musste also noch der Einfluss der Capillarität bestimmt werden. Es geschah dies, indem eine Sublimatlösung auf die Quecksilberscheibe gegossen wurde; dadurch wird nach Bunsen¹⁾ die Capillarität grösstentheils aufgehoben. Die Differenz von τ_0 mit und ohne Sublimat gemessen, gibt daher den grössten Theil des Fehlers. Ich erhielt bei einer dünnen Scheibe (2 der folgenden Tabelle) mit Sublimat: $W = 337,3 \Omega$, ohne: $W = 338,1$, also 2,2 $\frac{0}{00}$ Differenz. Ein

1) Bunsen, Gasometrische Methoden. p. 36. Braunschweig 1857.

anderer Versuch gab $1,8^0_{00}$. Die entstehende dünne Haut von Quecksilberchlorür erwies sich durch Wägung als belanglos. Da nicht die ganze Wirkung der Capillarität durch die Sublimatlösung aufgehoben wird, nahm ich dieselbe bei dieser Scheibe als 0,3 Proc. an, und gleichzeitig, dass dieselbe proportional Radius und Dicke abnimmt. Bei dickeren Scheiben fällt demnach die Correction für die Capillarität durchaus in die Fehlergrenzen.

In der folgenden Tabelle bedeutet R den Radius der Scheiben, D die durch Wägung bestimmte Dicke, W_n den beobachteten Widerstand der compensirenden Rolle II' , τ_0 aus $\tau_n = P / W_n$ nach obiger Formel berechnet, wobei die kleine Correction für Capillarität hinzugefügt ist, Θ die Temperatur des Quecksilbers und x den Zahlencoefficienten, welcher oben als 2,111 resp. 2,118 berechnet ist. Hier ist derselbe aus den Versuchen nach der Formel:

$$\tau_0 = \frac{x \cdot \lambda \cdot R \cdot D}{1 + 0,94 D / R}$$

oder

$$x = \frac{\tau_0 (1 + 0,94 D / R)}{\lambda \cdot R \cdot D}$$

berechnet. λ ist die Leitungsfähigkeit von Quecksilber bei der Temperatur Θ nach der Formel

$$\lambda_\Theta = 10^{-5} \cdot 1,0461 \{ 1 - 0,0099 (\Theta - 18^0) \}$$

berechnet, wobei $\lambda_{00} = 1,063$ angenommen wurde und λ_{18} zu $1,0461 \cdot 10^{-5}$ nach den von Kreichgauer und Jäger¹⁾ gegebenen Zahlen berechnet wurde.

$$R = 8,84 \text{ cm.}$$

	D	D / R	W_n	τ_0	Θ	x
1.	0,512 cm	0,058	425,0 Ω	$0,9457 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$	18^0	2,105
2.	0,653 "	0,074	338,1 "	1,190	18^0	2,108
3.	0,805 "	0,091	279,3 "	1,442	$18,5^0$	2,102
4.	1,022 "	0,115	224,8 "	1,794	18^0	2,103
5.	1,248 "	0,141	187,9 "	2,151	18^0	2,109

Mittel von $x = 2,1054 \pm 0,0016$.

1) Kreichgauer u. Jäger, Wied. Ann. **47**. p. 513. 1892.

$$R = 6,07 \text{ cm.}$$

	D	D/R	W_n	τ_0	Θ	x
6.	1,011 cm	0,167	341,5 Ω	$1,1773 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$	$16,5^\circ$	2,118
7.	1,981 „	0,326	198,4 „	2,035	$17,5^\circ$	2,113
8.	2,954 „	0,487	149,1 „	2,722	$17,5^\circ$	2,115
9.	3,879 „	0,639	125,4 „	3,259	18°	2,118
10.	4,893 „	0,806	110,0 „	3,738	18°	2,117

$$\text{Mittel von } x = 2,1162 \pm 0,0012.$$

Die beiden Versuchsreihen stimmen in sich gut, haben jedoch eine Differenz der Mittelwerthe von ca. 0,5 Proc. Dieselbe rührt daher, dass die grosse Rolle B nicht quadratisch war, sondern die Länge nur ca. 14 cm betrug, während der Durchmesser 22 cm war. Das Feld näherte sich daher mehr dem eines Ringes und musste einen zu kleinen Werth für τ_0 geben (vgl. p. 331). Uebrigens ist die verhältnissmässig kleine Differenz ein neuer Beweis für den geringen Einfluss des Feldes.

Zur Feststellung von x für ein quadratisches Feld wurde daher nur die zweite Versuchsreihe benutzt, welche ausserdem die Vorzüge hat, dass 1. wegen der grösseren Dicke der Scheiben die Capillarität keinen merklichen Einfluss mehr hat und 2. aus demselben Grunde eventuelle Messungsfehler oder Abweichungen im Radius nur einen viel kleineren Fehler bei der Bestimmung von τ_n verursachen, wie bei dünneren Scheiben, was sogleich weiter unten bewiesen werden soll.

Wir erhalten demnach als Schlussformel für die absolute Messung der Leitungsfähigkeit von Metallscheiben mit Hülfe quadratischer Rollen:

$$\lambda = \frac{\tau_0 (1 + 0,94 D/R)}{2,116 \cdot R \cdot D}.$$

Die Formel stimmt für dünnere Scheiben genügend mit den theoretischen Werthen überein, und ist für dicke Scheiben bis $R = D$ durch die obigen Versuche bewiesen.

Bei den Anwendungen ist die nothwendige Längenmessung im allgemeinen die grösste Fehlerquelle. Durch Gewicht und specifisches Gewicht erhält man nur das Volumen, eine der Dimensionen muss daher durch directe Messung festgestellt werden. Dies ist bis auf 1 Proc. sehr leicht, schwierig jedoch

bis auf unsere Fehlergrenze von $1\frac{0}{100}$, da es wegen der auch bei sorgfältigster Bearbeitung unvermeidlichen kleinen Abweichungen im Radius schwer hält, den richtigen Mittelwerth zu bekommen. Viel günstiger wäre es, λ allein aus electrischer Messung und Wägung zu erhalten.

Es gilt also einen solchen Werth von D/R zu finden, wo bei gegebenem Volumen τ_0 möglichst wenig abhängig von D/R oder, da das Volumen gegeben, von R ist. Man hat dafür die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial \left(\frac{R \cdot D}{1 + 0,94 D/R} \right)}{\partial R} = 0 \quad \text{und} \quad R^2 D = \text{const.}$$

Wenn man $D = C/R^2$ in die erste Gleichung einsetzt, erhält man: $R^3 = 1,88 C$. Dies in $R^2 D = C$ eingesetzt, gibt:

$$D = \frac{R}{1,88} = 0,532 R.$$

Wenn wir diesen Werth in unsere Formel für λ einführen, so wird:

$$\lambda = \frac{1,877 \cdot \tau_0}{V^{2/3}} = 1,877 \cdot \tau_0 \left(\frac{s}{G} \right)^{2/3} \text{ sec. cm}^{-2},$$

worin V das Volumen, s das specifische und G das Gewicht der Metallscheibe bedeuten.

Um den Werth $D/R = 0,532$ herum ist τ_0 in weiten Grenzen merklich unabhängig von D/R . Eine Aenderung in diesem Verhältniss von 10 Proc. ändert τ_0 nur um 0,1 Proc., sodass hier eine ganz rohe Annäherung genügt. Bei den folgenden Beispielen ist meist nicht diese Form der Scheiben angewendet, theils um die Versuchsbedingungen möglichst zu variiren, theils auch, weil die Messungen ausgeführt wurden, ehe die Vorzüge dieser speciellen Form erkannt waren.

Indem ich zuerst auf die schon oben beim Vergleich von Leitungsfähigkeiten erwähnten Scheiben aus verschiedenen Metallen zurückgreife, wurde jetzt hier λ direct gemessen, indem τ_0 aus dem beobachteten τ_n berechnet wurde und aus τ_0 , R und D , welche vorher gemessen waren, λ bestimmt wurde. Die Temperatur war während der obigen 3 Versuchsreihen (p. 326) langsam von $15,9^\circ$ auf $16,2^\circ$ gestiegen; λ_0 wurde aus λ_{16} berechnet, indem als Temperaturcoefficient 0,004 angenommen wurde. In der folgenden Tabelle sind in der letzten Columne

die von Matthiessen gefundenen Werthe angegeben. Die vorhandenen Abweichungen rühren von Structurdifferenzen und Unreinheiten der Metalle her. Auffallend ist der hohe Werth für die Leitungsfähigkeit von Aluminium.

	R (cm)	D (mm)	W_{256}	τ_{256}	τ_0	λ_{160}	λ_0	M
Kupfer	2,752	2,01	23,642	$5,665 \cdot 10^{-4}$ sec.	6,078	55,50	58,82	62,0
Aluminium	2,773	2,02	35,90 „	3,740	3,852	34,72	36,80	34,8
Zink	2,770	2,02	75,38 „	1,780	1,787	16,13	17,10	18,01
Zinn	2,770	2,05	142,0 „	0,946	0,9472	8,23	8,734	7,66
Blei	2,780	2,04	237,1 „	0,566	0,5664	5,046	5,351	5,15

Die folgende Tabelle giebt die Resultate von Messungen der Leitungsfähigkeit einer Anzahl von *Kupfersorten*. Die meisten derselben, bis auf Nr. 7, waren *electrolytisches Kupfer*, welches mir von der Firma Hesse & Söhne in Heddemheim freundlichst zur Verfügung gestellt wurde. Nr. 1—4 war gewalztes Kupferblech, 2, 3 und 4 waren aus ein und demselben Stück herausgeschnitten. 4 hatte einen viel kleineren Radius, wie 2 und 3 und wurde in einer anderen Rolle und mit einer anderen compensirenden Rolle *II'* untersucht. Nr. 5 und 6 waren dickere Scheiben, welche aus der gegossenen Kupfermasse herausgedreht waren. Nr. 7 war ein Stück reinen, sehr dünnen Kupferblechs, welches sich hier im Institut vorfand. Der Radius der Scheiben wurde mit dem Comparator gemessen, die Dicke durch Gewicht und specifisches Gewicht bestimmt. Letzteres ist auch unter *S* in der folgenden Tabelle angegeben.

Nr.	R (m)	D (mm)	s	τ_{256}	τ_0	Θ	λ_Θ	λ_0
1	9,06	0,0911	8,89	0,9770	0,979	20°	56,09	$60,54 \cdot 10^{-5}$ sec. cm ⁻²
2	6,255	0,484	8,87	3,562	3,658	19°	57,52	61,89
3	6,20	0,478	8,90	3,489	3,579	19°	57,49	61,85
4	2,95	0,521	8,91	1,834	1,846	17,5°	57,74	61,75
5	2,902	1,64	8,93	5,378	5,701	16,5°	59,62	63,43
6	2,900	1,62	8,92	5,316	5,630	16,5°	59,60	63,41
7	9,05	0,0427	8,90	0,4534	0,4535	20°	55,46	59,87

Die hohen Werthe für λ_0 sind ein Beweis für die Reinheit des Kupfers. Die Leitungsfähigkeit ist die grösste bei den Scheiben 5 und 6, die direct aus der gegossenen Kupfermasse herausgedreht waren. Es stimmt dies mit anderen Be-

obachtungen überein; so findet Matthiessen für ausgezogenes Kupfer 62,0, für geglühtes Kupfer 63,5, ähnlich andere.

Die Uebereinstimmung von 2 und 3 mit 4, wo, wie gesagt, ein ganz anderes Rollensystem benutzt wurde, ist ein Beweis für die Exactheit der Methode.

Um schliesslich noch ein Beispiel für die Formel:

$$\lambda = 1,877 \cdot \tau_0 \cdot \left(\frac{s}{G}\right)^{2/3}$$

zu bringen wurde die Leitungsfähigkeit von $\frac{1}{2}$ und 1 Proc. Zink-amalgam in der Weise festgestellt, dass so viel Quecksilber in das Holzgefäss 2 (pag. 339) gegossen wurde, dass annähernd $D/R = 0,532$ war; hierzu waren etwa 5000 gr nothwendig. Dann wurden die abgewogenen Zinkmengen in kleinen Stücken hinzugefügt. Die hierdurch entstehende Aenderung von D/R war, wie oben auseinandergesetzt, belanglos. Die specifischen Gewichte wurden durch Pyknometerwägungen bestimmt. In der folgenden Tabelle giebt die erste Columnne das Gewicht des Zinks an, die zweite das des Quecksilbers, die dritte das Gesamtgewicht, die vierte das specifische Gewicht, die vorletzte das Verhältniss der Leitungsfähigkeit des Amalgams zu der von Quecksilber derselben Temperatur, die letzte die von Matthiessen¹⁾ für dieselbe Grösse gefundenen Werthe an:

G_{Zn}	G_{Hg}	$G_{\text{Hg} + \text{Zn}}$	s	W_n	λ_0	Θ	$\frac{\lambda_{\text{Am}}}{\lambda_{\text{Hg}}}$	M
0	5000,3	5000,3	13,56	141,9	1,0454 ²⁾	18,5°	1	1
25,0	5000,3	5025,3	13,52	131,6	1,1246	18,7°	1,075	1,072
50,0	4994,0	5044,0	13,49	123,6	1,1955	19,0°	1,143	1,141

Schluss. Es seien noch einmal die Principien der Methode zusammengestellt.

Ein Wechselstrom durchfliesst eine Wheatstone'sche Brückencombination, deren Zweige 1 und 2 aus Inductions-

1) Matthiessen, Pogg. Ann. 116. p. 369. 1862.

2) Hieraus berechnet sich λ_0 für Quecksilber zu 1,0628. Die genaue Uebereinstimmung dieses Werthes mit dem oben angenommenen 1,063 darf nicht auffallen, da mit letzterem Werthe bei derselben Versuchsanordnung die Zahlenconstanten gewonnen wurden, mit welchen jetzt der erste Werth berechnet wurde. Es liegt also gewissermaassen ein Zirkelschluss vor.

rollen bestehen. Die Brücke ist im Gleichgewicht ($p_1 : p_2 = w_1 : w_2 = w_3 : w_4$). Die durch Näherung eines Metallstückes hervorgerufene Störung der Inductionsrolle I wird dadurch compensirt, dass der Rolle II eine dritte Rolle II' genähert wird, die durch einen Rheostat geschlossen ist. Verschwindet der Strom im Brückenzeige, so ist $\tau_n = \tau_2$ der Zeitconstante der compensirenden Rolle II' . Da Selbstpotential und Widerstand der Rolle II' ein für allemal gemessen sind, erhält man $\tau_n = \tau_2$ einfach durch Ablesung des Rheostatenwiderstandes.

Theoretisch lässt sich ableiten, dass $\tau_n = \lambda (A + n^2 \lambda^2 B)$ sein muss. Durch Aenderung von n erhält man $\tau_0 = \lambda A$, also eine Grösse, die der Leitungsfähigkeit des Metallstückes proportional ist.

Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die Leitungsfähigkeit zweier gleicher Metallstücke zu vergleichen. Sie brauchen nicht immer genau an dieselbe Stelle der Rolle gebracht zu werden, da sich τ_n innerhalb der Rolle nicht merklich ändert.

Für Kugeln und runde Scheiben in dem annähernd homogenen Felde quadratischer Rollen lässt sich λ direct aus τ_n berechnen, d. h. absolut messen; und zwar ist bei guter Uebereinstimmung von Theorie und Experiment:

Für eine Kugel:

$$\tau_0 = \tau_n \{1 + 0,0635 (n \tau_n)^2 + 0,0017 (n \tau_n)^4\}$$

$$\lambda = \frac{\tau_0}{1,194 R^2} = \frac{2,176 \tau_0}{V^{2/3}} = 2,176 \cdot \tau_0 \left(\frac{s}{G} \right)^{2/3},$$

für eine runde Scheibe:

$$\tau_0 = \tau_n \{1 + 0,075 (n \tau_n)^2 + 0,017 (n \tau_n)^4\}$$

$$\lambda = \frac{\tau_0 (1 + 0,94 D/R)}{2,116 \cdot R \cdot D}.$$

Hat die runde Scheibe annähernd (bis auf 10 Proc.) die Form: $D/R = 0,532$ so gilt für λ die Formel $\lambda = 1,877 \cdot \tau_0 / V^{2/3}$. Damit ist auch bei Scheiben die Längenmessung vermieden und die Bestimmung von λ allein durch Wägung und electriche Messung ermöglicht. Bei geeigneter Anordnung lässt sich λ in dieser Weise bis auf $1/100$ genau messen.

Gegenüber der gewöhnlichen Methode der Messung der Leitungsfähigkeit durch Vergleich der Widerstände von Me-

talldrähten scheint mir die neue Methode folgende *Nachtheile* zu haben:

1. Die Theorie ist nicht vollständig durchführbar;

2. die erste Anordnung ist umständlich;

und folgende *Vorzüge*:

1. Man ist unabhängig von Contactfehlern und thermischen Einflüssen;

2. man misst die Leitungsfähigkeit des Metall, wie es ist, ohne zu einer Structuränderung durch Drahtziehen gezwungen zu sein;

3. man hat die Möglichkeit ohne Längenmessung λ zu bestimmen.

Besonders bei gut leitenden Metallen dürfte die Inductions-
waage überlegen sein.

Würzburg, Physik. Institut d. Univ., Februar 1893.