Verschwindende Determinanten dritten Grades aus ternären linearen Formen.

Von

M. PASCH in Giessen.

Bei linearen Systemen von bilinearen Formen spielt bekanntlich der Fall eine besondere Rolle, wo die Determinanten aller Formen des Systems verschwinden. Die Arbeit „Ueber bilineare Formen und deren geometrische Anwendung“ diese Annalen 1891 Bd. 38 S. 24*) veranlasste mich zu näherer Beschäftigung mit dem linearen Systeme, welches aus drei bilinearen ternären Formen hervorgeht und nur Formen von verschwindender Determinante enthält, also mit der verschwindenden Determinante dritten Grades, deren Elemente lineare Formen von drei Unbestimmten sind. Dieser Fall, sowie eine Anwendung auf das System von drei quadratischen ternären Formen, bilden den Gegenstand der nachfolgenden Seiten.

I.

1. Hilfssatz: Wenn alle Determinanten zweiten Grades aus dem Systeme

$$\begin{array}{ccc} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'', \end{array}$$

dessen Elemente ganze Functionen von irgend welchen Veränderlichen sein sollen, identisch verschwinden, so kann man setzen:

$$\begin{array}{lll} a = A\alpha, & a' = A\alpha', & a'' = A\alpha'', \\ b = B\alpha, & b' = B\alpha', & b'' = B\alpha'', \\ c = C\alpha, & c' = C\alpha', & c'' = C\alpha'', \end{array}$$

wo $ABC\alpha\alpha'\alpha''$ ganze Functionen sind.

*) Am Schlusse des 38sten Bandes sind einige in dieser Arbeit zu verbessernde Stellen angegeben.

Zum Beweise werde angenommen, dass etwa a nicht identisch verschwindet, und der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen $aa'a''$ mit A bezeichnet. Setzt man $a = A\alpha$, $a' = A\alpha'$, $a'' = A\alpha''$, so wird $\alpha\beta' = b\alpha'$ und $\alpha\beta'' = b\alpha''$, b durch α theilbar, ebenso c , u. s. w.

2. Wir wenden uns nunmehr zu der Aufgabe, lineare Formen von $x_1 | x_2 | x_3$:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{array}$$

so zu bestimmen, dass ihre Determinante verschwindet.

Die Determinante verschwindet zunächst dann, wenn eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten besteht, die von jeder Colonne oder von jeder Zeile erfüllt wird.

Wenn keine solche Gleichung besteht, so verschwinden nicht alle Determinanten zweiten Grades aus dem Systeme (1); denn sonst gäbe es wegen Nr. 1 drei Constanten, die sich wie die Elemente jeder Colonne oder jeder Zeile des Systems (1) verhielten. Aber diese Determinanten bilden dann ein System von quadratischen Formen, aus dem nur verschwindende Determinanten zweiten Grades hervorgehen, das also nach Nr. 1 die Gestalt besitzt:

$$\begin{array}{lll} LP & MP & NP \\ LQ & MQ & NQ \\ LR & MR & NR; \end{array}$$

und zwar können hier die Formen $LMNPQR$ nur linear sein, weil man sonst zu dem vorigen Falle zurückgeriethe. Es besteht daher eine (und nur eine) lineare Gleichung mit linearen Coefficienten, der jede Colonne, und zugleich eine (und nur eine) ebensolche Gleichung, der jede Zeile des Systems (1) genügt.

3. Nehmen wir zuerst an, dass die Formen PQR linear abhängig sind, natürlich nur einfach, so können wir schreiben:

$$P = (x A \alpha), \quad Q = (x A \beta), \quad R = (x A \gamma),$$

wo z. B. $(x A \alpha)$ die Determinante $\Sigma \pm x_1 A_2 \alpha_3$ bedeutet. Dabei sollen $A_i \alpha_i \beta_i \gamma_i$ für $i = 1, 2, 3$ Constanten sein und die Determinante $(\alpha \beta \gamma)$ nicht verschwinden. Führt man folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} (\alpha \beta \gamma) &= v_1, & (x \gamma \alpha) &= v_2, & (x \alpha \beta) &= v_3, \\ - \frac{(A \beta \gamma)}{(\alpha \beta \gamma)} &= a_1, & - \frac{(A \gamma \alpha)}{(\alpha \beta \gamma)} &= a_2, & - \frac{(A \alpha \beta)}{(\alpha \beta \gamma)} &= a_3, \end{aligned}$$

so sind die linearen Formen $v_1 v_2 v_3$ linear unabhängig, $a_1 a_2 a_3$ nicht gleichzeitig Null, und man hat für beliebige $\xi_1 \xi_2 \xi_3$:

$$\xi_2 (\alpha \beta \gamma) = v_1 \xi_\alpha + v_2 \xi_\beta + v_3 \xi_\gamma$$

(wo zur Abkürzung z. B. ξ_x für $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$ geschrieben ist), mithin:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta\gamma)(xA\alpha) &= v_2(A\alpha\beta) - v_3(A\gamma\alpha), \\ P &= (av)_1 \text{ d. i. } a_2v_3 - a_3v_2, \quad Q = (av)_2 \text{ d. i. } a_3v_1 - a_1v_3, \\ R &= (av)_3 \text{ d. i. } a_1v_2 - a_2v_1, \\ \begin{vmatrix} p & a_1 & v_1 \\ q & a_2 & v_2 \\ r & a_3 & v_3 \end{vmatrix} &= 0.\end{aligned}$$

Man kann demnach setzen:

$$p = a_1u_1 + b_1v_1, \quad q = a_2u_1 + b_1v_2, \quad r = a_3u_1 + b_1v_3,$$

wo b_1 und u_1 noch zu prüfen sind. Wegen

$$a_2r - a_3q = b_1P, \quad a_3p - a_1r = b_1Q, \quad a_1q - a_2p = b_1R$$

ist b_1 eine Constante, mithin ist u_1 eine lineare Form.

Die Elemente des Systems (1) haben folglich in dem betrachteten Falle die Gestalt:

$$\begin{aligned}(2) \quad p &= a_1u_1 + b_1v_1, \quad p' = a_1u_2 + b_2v_1, \quad p'' = a_1u_3 + b_3v_1, \\ q &= a_2u_1 + b_1v_2, \quad q' = a_2u_2 + b_2v_2, \quad q'' = a_2u_3 + b_3v_2, \\ r &= a_3u_1 + b_1v_3, \quad r' = a_3u_2 + b_2v_3, \quad r'' = a_3u_3 + b_3v_3,\end{aligned}$$

wo $a_1a_2a_3, b_1b_2b_3$ Constanten und $u_1u_2u_3, v_1v_2v_3$ lineare Formen sind, und entstehen durch Composition der Systeme:

$$\begin{vmatrix} a_1 & v_1 \\ a_2 & v_2 \\ a_3 & v_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} u_1 & b_1 \\ u_2 & b_2 \\ u_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Weder $a_1a_2a_3$ noch $b_1b_2b_3$ verschwinden gleichzeitig. In der Gleichung, der jede Colonne genügt, sind die Coefficienten $(av)_1, (av)_2, (av)_3$ linear abhängig; ebenso die Coefficienten $(ub)_1, (ub)_2, (ub)_3$ in der Gleichung, der jede Zeile genügt. Aber weder $(av)_1, (av)_2, (av)_3$ noch $(ub)_1, (ub)_2, (ub)_3$ dürfen mehr als einfach linear abhängig sein.

4. Das System (2) kann symmetrisch werden, so dass

$$a_iu_k + b_kv_i = a_ku_i + b_iv_k. \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

Da alsdann die $(av)_i$ sich wie die $(ub)_i$ verhalten müssen, so wird, wenn man mit c eine gewisse Constante, mit w, w_1, w_2, w_3 gewisse lineare Formen bezeichnet:

$$\begin{aligned}\Sigma b_i(av)_i &= 0, \quad b_i = ca_i, \quad a_i(u_k - cv_k) = a_k(u_i - cv_i), \\ u_i - cv_i &= 2a_iw, \quad u_i - a_iw = a_iw + cv_i = w_i, \\ a_iu_k + b_kv_i &= a_i(u_k - a_kw) + a_k(a_iw + cv_i) = a_iw_k + a_kw_i,\end{aligned}$$

d. h.: Das System (2) ist im Falle der Symmetrie aus zwei Systemen

$$\begin{vmatrix} a_1 & w_1 \\ a_2 & w_2 \\ a_3 & w_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} w_1 & a_1 \\ w_2 & a_2 \\ w_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

componirt.

5. Wir bilden nun mit weiteren Veränderlichen $y_1 y_2 y_3$ die bilinearen Formen

$$(3) \quad p y_1 + p' y_2 + p'' y_3, \quad q y_1 + q' y_2 + q'' y_3, \quad r y_1 + r' y_2 + r'' y_3$$

und prüfen, ob es in dem Falle der Nr. 3 möglich ist, dass diese Formen gleichzeitig in xy symmetrisch werden.

Wären die Formen (3) symmetrisch und zugleich von den b_i nur eines von Null verschieden, etwa b_1 , so wäre auch symmetrisch:

$$a_i(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3) + b_1 y_1 v_i = a_i \delta + b_1 y_1 (v_i + \gamma a_i),$$

wo γ eine beliebige lineare Form der x und δ die bilineare Form

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 - b_1 \gamma y_1$$

bedeuten soll. Da in δ die Coefficienten von $x_2 y_3$ und $x_3 y_2$ übereinstimmen müssten, so könnte man in γ die Coefficienten von x_2 und x_3 so wählen, dass δ in xy symmetrisch wird, mithin auch

$$y_1 (v_i + \gamma a_i),$$

also

$$v_1 + \gamma a_1 = d_1 x_1, \quad v_2 + \gamma a_2 = d_2 x_1, \quad v_3 + \gamma a_3 = d_3 x_1,$$

wo $d_1 d_2 d_3$ Constanten sind. Daraus würde aber lineare Abhängigkeit zwischen $v_1 v_2 v_3$ folgen, im Widerspruch zu Nr. 3.

Wären die Formen (3) symmetrisch und zugleich mindestens zwei b_i von Null verschieden, so wäre, wenn man mit u_{ik}, v_{ik} die Coefficienten von x_k in u_i, v_i bezeichnet:

$$a_i u_{32} + b_3 v_{i2} = a_i u_{23} + b_2 v_{i3},$$

d. i.:

$$a_i(u_{32} - u_{23}) + b_3 v_{i2} - b_2 v_{i3} = 0,$$

mithin:

$$\begin{vmatrix} a_1 & v_{12} & v_{13} \\ a_2 & v_{22} & v_{23} \\ a_3 & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix} = 0$$

und ebenso:

$$\begin{vmatrix} a_1 & v_{13} & v_{11} \\ a_2 & v_{23} & v_{21} \\ a_3 & v_{33} & v_{31} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & v_{11} & v_{12} \\ a_2 & v_{21} & v_{22} \\ a_3 & v_{31} & v_{32} \end{vmatrix} = 0,$$

woraus das Verschwinden der Determinante $\Sigma \pm v_{11} v_{22} v_{33}$, also wieder lineare Abhängigkeit zwischen $v_1 v_2 v_3$ folgen würde.

Hiernach können die Formen (3) in dem betrachteten Falle nicht gleichzeitig symmetrisch werden.

6. Wie aus der Schlussbemerkung der Nr. 3 hervorgeht, zieht Abhängigkeit zwischen den Formen PQR auch solche zwischen LMN nach sich, und umgekehrt. Demnach bleibt nur noch der Fall übrig, wo weder zwischen PQR noch zwischen LMN Abhängigkeit besteht. In diesem Falle können wir schreiben:

$$P = (x b c), \quad Q = (x c a), \quad R = (x a b),$$

wo die $a_i b_i c_i$ für $i = 1, 2, 3$ Constanten sind und die Determinante $(a b c)$ nicht verschwindet. Da $p P + q Q + r R = 0$, so wird $p = 0$ für $x = a$. Setzen wir daher:

$$p + a_{12} Q + a_{13} R, \quad q = a_{23} R + a_{21} P, \quad r = a_{31} P + a_{32} Q$$

mit constanten a_{ik} , so verschwindet

$$(a_{23} + a_{32}) Q R + (a_{13} + a_{31}) R P + (a_{12} + a_{21}) P Q$$

identisch. Daraus folgt:

$$a_{ik} + a_{ki} = 0$$

und

$$p = a_{32}(x a a) + a_{13}(x a b) + a_{21}(x a c) = (x a \alpha),$$

wo

$$\alpha_i = a_{32} a_i + a_{13} b_i + a_{21} c_i,$$

ebenso

$$q = (x b \alpha), \quad r = (x c \alpha).$$

Das System (1) nimmt überhaupt jetzt die Form an:

$$(4) \quad \begin{aligned} p &= (x a \alpha), & p' &= (x a \beta), & p'' &= (x a \gamma), \\ q &= (x b \alpha), & q' &= (x b \beta), & q'' &= (x b \gamma), \\ r &= (x c \alpha), & r' &= (x c \beta), & r'' &= (x c \gamma), \end{aligned}$$

wo die $a_i b_i c_i \alpha_i \beta_i \gamma_i$ Constanten sind, $(a b c)$ und $(\alpha \beta \gamma)$ von Null verschieden.

Das System (4) ist componirt aus den Systemen

$$\begin{vmatrix} (x a)_1 & (x a)_2 & (x a)_3 \\ (x b)_1 & (x b)_2 & (x b)_3 \\ (x c)_1 & (x c)_2 & (x c)_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Da

$$\begin{vmatrix} (x b)_2 & (x b)_3 \\ (x c)_2 & (x c)_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (c x)_2 & (c x)_3 \\ (x b)_2 & (x b)_3 \end{vmatrix} = x_1 (x b c) \text{ u. s. w.,}$$

mithin

$$\begin{vmatrix} (x b)_1 & (x b)_2 & (x b)_3 \\ (x c)_1 & (x c)_2 & (x c)_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = (x b c) (x \beta \gamma),$$

so wird $L = (x \beta \gamma)$, ebenso $M = (x \gamma \alpha)$, $N = (x \alpha \beta)$.

7. Das System (4) kann nicht symmetrisch werden. Denn im Falle der Symmetrie ergäbe sich:

$$(x b c) : (x c a) : (x a b) = (x \beta \gamma) : (x \gamma \alpha) : (x \alpha \beta),$$

und man könnte daher Constanten ABC so bestimmen, dass

$$\alpha_i = A\alpha_i, \quad \beta_i = B\beta_i, \quad \gamma_i = C\gamma_i$$

für $i = 1, 2, 3$; daraus würde folgen:

$$-A(xab) = q = p' = B(xab), \quad -A = B,$$

$$-A(xac) = r = p'' = C(xac), \quad -A = C,$$

$$-B(xbc) = r' = q'' = C(xbc), \quad -B = C,$$

$$A = -A, \quad A = 0.$$

8. Dass die bilinearen Formen (3) gleichzeitig in xy symmetrisch werden, ist jetzt ebensowenig möglich, wie in dem Falle der Nr. 3. Denn sonst bestände die Gleichung

$$y_1(xz\alpha) + y_2(xz\beta) + y_3(xz\gamma) = x_1(yz\alpha) + x_2(yz\beta) + x_3(yz\gamma)$$

bei allen x, y für $z = a$, für $z = b$, für $z = c$, mithin bei allen x, y, z ; es wäre also:

$$(z\beta)_3 = (z\gamma)_2, \text{ d. i. } z_1\beta_2 - z_2\beta_1 = z_3\gamma_1 - z_1\gamma_3,$$

mithin

$$\beta_2 + \gamma_3 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0,$$

ebenso

$$\gamma_3 + \alpha_1 = \gamma_2 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 + \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = 0,$$

schliesslich

$$2\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = 0, \quad \alpha_1 = 0,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad (\alpha\beta\gamma) = 0.$$

Wenn also die Determinante des Systems (1) identisch verschwindet und die Formen (3) symmetrisch sind, so besteht eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten, die von jeder Colonnen- oder von jeder Zeile erfüllt wird.

II.

9. Die Elemente des Systems (1) sind die nach den y genommenen Ableitungen der in x und y bilinearen Formen (3).

Wir legen jetzt bilineare Formen $f(xy)$, $g(xy)$, $h(xy)$ zu Grunde, die in xy symmetrisch sind, und schreiben:

$$f(xy) = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) \text{ u. s. w.},$$

so dass $f(xx)$, $g(xx)$, $h(xx)$ quadratische Formen der x werden, $f_1(x)$ die halbe Ableitung von $f(xx)$ nach x_1 u. s. w. Dann ist

$$J = \Sigma \pm f_1 g_2 h_3$$

die Jacobi'sche Determinante der drei quadratischen Formen f , g , h .

Die mit weiteren Veränderlichen $z_1 | z_2 | z_3$ gebildete Form $z_1 f + z_2 g + z_3 h$ besitzt als quadratische Form der x eine Determinante Z , die symmetrisch ist, und deren neun Elemente von den z linear abhängen. Endlich führen wir noch die Hermite'sche Form von f, g, h ein:

$$H = \Sigma \pm f(xy) g(xy) h(yz),$$

welche die xy nur in den Verbindungen $(xy)_1, (xy)_2, (xy)_3$ enthält (Rosanes, diese Annalen 1873 Bd. 6 S. 273).

Besteht zwischen den quadratischen Formen f, g, h eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten, so verschwinden J und H . Sind f, g, h singuläre Formen mit einer gemeinschaftlichen singulären Nullstelle, so verschwinden J und Z . Haben f, g, h einen linearen Factor gemein, so verschwinden H und Z .

10. Um nun umgekehrt festzustellen, wie die Formen f, g, h sich verhalten, wenn J oder Z oder H verschwindet, kann man theilweise die unter I angestellten Betrachtungen benutzen.

Wenn erstens J verschwindet, so besteht nach Nr. 8, da hier die Formen (3) symmetrisch sind, eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten, der entweder die Systeme

$$f_1 | g_1 | h_1, \quad f_2 | g_2 | h_2, \quad f_3 | g_3 | h_3$$

oder die Systeme

$$f_1 | f_2 | f_3, \quad g_1 | g_2 | g_3, \quad h_1 | h_2 | h_3$$

genügen, d. h.: die Formen f, g, h sind alsdann entweder unter einander linear abhängig ($H=0$), oder singulär mit gemeinschaftlicher Singularität ($Z=0$). Dies wurde zuerst bemerkt in Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Band 1, 1876, S. 304 und 1047; dann von Herrn Joseph Hahn, diese Annalen 1879, Bd. 15, S. 111 (Giessener Dissertation 1878), mittels einer Identität bewiesen, welche lehrt, dass im Falle $J=0$ zwischen f, g, h eine quadratische Gleichung mit constanten Coefficienten besteht.

Demnach verschwindet mit J das Product HZ . Ebenso muss mit Z stets das Product JH verschwinden. Denn wenn Z verschwindet, so kann nach Nr. 7, da diese Determinante symmetrisch ist, nur der im Anfang der Nr. 2 erwähnte oder der* in Nr. 3 behandelte Fall vorliegen (wobei natürlich jetzt die z für die x eintreten). Im ersteren Falle hat die quadratische Form der x :

$$z_1 f + z_2 g + z_3 h$$

eine von den z unabhängige Singularität ($J=0$). Im letzteren Falle kann man nach Nr. 4 schreiben:

$$z_1 f_k + z_2 g_k + z_3 h_k = a_x w^k + a^k w_x, \quad (k = 1, 2, 3)$$

wo w_1, w_2, w_3 lineare Formen der z sind; da

$$z_1 f + z_2 g + z_3 h = 2 a_x w_x$$

wird, so haben jetzt f, g, h einen linearen Factor gemein ($H=0$).

Endlich verschwindet mit H das Product JZ . Denn im Falle $H=0$ sind f, g, h , wie Herr Hahn a. a. O. bewiesen hat, entweder unter einander linear abhängig ($J=0$), oder sie haben einen linearen Factor gemein ($Z=0$).

Das Verschwinden einer der Formen J, Z, H zieht hiernach das Verschwinden des Productes der beiden andern nach sich.

Giessen, 1893.