Eine Uebertragung des P a s c a l 'schen Satzes auf Raumgeometrie.

Von

F. KLEIN in Leipzig.

(Aus den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen vom 10. November 1873)*).

Man erhält ein eigenthümliches Princip zur Uebertragung von Sätzen der Ebene auf den Raum, wenn man die Riemann'sche Repräsentation einer complexen Variablen auf der Kugelfläche mit der projectivischen Betrachtung der Gebilde zweiten Grades verbindet. Dasselbe soll im Folgenden kurz bezeichnet und insbesondere auf den Pascal'schen Satz angewendet werden.

Hesse hat bekanntlich eine Methode gegeben (Borchardt's Journal Bd. 66), um Sätze der Ebene auf die gerade Linie, — algebraisch ausgedrückt, auf das Werthgebiet einer einzelnen, im Sinne der linearen Invariantentheorie betrachteten, Variablen — zu übertragen. Man lasse nämlich jeder geraden Linie der Ebene das Punktepaar entsprechen, in welchem sie einen festen Kegelschnitt schneidet, und beziehe den Kegelschnitt durch stereographische Projection auf eine feste Gerade. Die Punktepaare der Geraden werden so die Bilder der Linien der Ebene, und die ebene Geometrie ist mit der Geometrie der Geraden in Verbindung gesetzt, wenn man in ersterer die Linien, auf letzterer die Punktepaare als Elemente betrachtet.

Man repräsentire nun weiter das Werthgebiet der Variablen, deren *reelle* Werthe allein auf der festen Geraden veranschaulicht waren, in Riemann'scher Weise auf einer Kugelfläche, oder, was eine leicht verständliche Verallgemeinerung ist, auf einer nicht gerad-

*) Es ist dies diejenige Arbeit, auf welche Hr. Wedekind bei seiner Definition des complexen Doppelverhältnisses von vier Punkten der Kugel Bezug nimmt, Bd. 9 dieser Annalen, pag. 209 ff. [Febr. 1883].

linigen reellen Fläche zweiten Grades*). Der geraden Linie der ursprünglichen Ebene, mochte sie reell oder complex sein, entspricht eindeutig ein reelles Punktepaar der Fläche, und dieses Punktepaar ersetze man wieder durch seine Verbindungsgerade. So hat man schliesslich eine Beziehung zwischen Ebene und Raum, *vermöge deren jeder reellen oder complexen Geraden der Ebene eine und im allgemeinen nur eine reelle Gerade des Raumes entspricht. Letztere ist in ihrer Lage dadurch beschränkt, dass sie gezwungen ist, eine nicht geradlinige reelle Fläche zweiten Grades zu treffen.*

Diese Beziehung hat namentlich folgende Eigenthümlichkeit: Zwei Gerade der Ebene, die mit den Tangenten, welche man durch ihren Durchschnittspunkt an den bei Herstellung der Beziehung benutzten festen Kegelschnitt legen kann, ein *reelles* Doppelverhältniss bilden, erhalten als Bilder zwei räumliche Gerade, die sich erstens *schneiden* und überdiess innerhalb des somit durch sie bestimmten Büschels mit den an die feste Fläche gelegten durch ihren Durchschnittspunkt gehenden Tangenten *dasselbe reelle* Doppelverhältniss bilden. Insbesondere also: Linien der Ebene, die in Bezug auf den festen Kegelschnitt conjugirt sind, werden wieder conjugirte, sich überdiess schneidende, Raumgeraden zu Bildern haben. Oder, wie man sich ausdrücken kann, indem man den Kegelschnitt in der Ebene, die Fläche im Raume nach Cayley's Vorgange als Fundamentalgebilde für eine projectivische Massbestimmung betrachtet: *Senkrechten Linien der Ebene entsprechen senkrechte, sich schneidende Linien des Raumes.*

Um das hiermit geschilderte Uebertragungsprincip auf den Pascal'schen Satz anzuwenden, mag man demselben folgende Form geben. Statt zu sagen, dass die drei Durchschnittspunkte der Gegenseiten eines in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsseits in einer Geraden liegen, kann man sich dahin ausdrücken, dass die Polaren dieser drei Punkte, d. h. die drei Geraden, welche bez. zu den zusammengehörigen Gegenseiten gleichzeitig conjugirt sind, zu einer vierten Geraden conjugirt sind; oder endlich, indem man nun den Kegelschnitt als Fundamentalgebilde einer projectivischen Massbestimmung wählt: *dass die gemeinsamen Perpendikel der Gegenseiten eines in das Fundamentalgebilde eingeschriebenen Sechsseits ein gemeinsames Perpendikel haben.*

Auf den Raum übertragen behält der Satz vollständig seine Form; und das ist die Verallgemeinerung des Pascal'schen Satzes, die hier

*) Man erhält diese Repräsentation, von der gewöhnlichen Darstellung der complexen Variabeln in der Ebene ausgehend, indem man die Ebene parallel zu der Tangentialebene der Fläche in einem ihrer Nabelpunkte legt und durch stereographische Projection von diesem Nabelpunkte aus Fläche und Ebene auf einander bezieht.

gegeben werden sollte. Unter „Fundamentalgebilde“ ist nur eine geschlossene Fläche zweiten Grades verstanden; das in sie eingeschriebene Sechseck braucht nicht eben zu sein, sondern kann irgendwie angenommen werden; endlich erscheinen alle Constructionen auf das Innere der Fläche beschränkt. Wollte man diese Beschränkung aufheben, wollte man ferner, was nahe liegt, zu weiterer Verallgemeinerung an Stelle der nicht geradlinigen reellen Fläche zweiten Grades eine beliebige Fläche zweiten Grades setzen, so würde zunächst eine gewisse Unbestimmtheit zu beseitigen sein, die daraus entsteht, dass die Construction des gemeinsamen Perpendikels zweier Raumgeraden in Cayley's Geometrie eine zweideutige ist und nur durch Beschränkung auf das Innere der nicht geradlinig vorausgesetzten reellen Fläche zu einer eindeutigen gemacht wird.