ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 69.

Ueber den Einfluß der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen.

Von Herrn Professor und Ritter *Bessel*.

Bereits vor 16 Jahren habe ich, im XVII. Bande der Monatlichen Correspondenz des Hrn. *v. Zach*, einen Aufsatz über diesen Gegenstand geliefert, wobei die Absicht war, den Einfluß der Strahlenbrechung unmittelbar durch Größen auszudrücken, welche durch die Beobachtung selbst gegeben sind. Die dort entwickelten Formeln enthalten also weder die parallactischen Winkel, noch die Höhen der Sterne; allein ganz unabhängig von den Höhen sind sie nur dann, wenn diese so groß sind, daß die Voraussetzung der Strahlenbrechung im Verhältnisse der Cotangente der Höhe, nicht merklich unrichtig ist; kann man diese Voraussetzung nicht mehr machen, so wird es nöthig, statt eines Factors, welcher für größere Höhen constant ist, einen veränderlichen zu setzen, welchen man aus einer Tafel nimmt, deren Argument die wahre Höhe ist.

Diese Art die Aufgabe aufzulösen, scheint mir noch, nachdem seit jener Jugendarbeit viele Jahre verflossen sind, bequem zu seyn. Allein der erwähnte Aufsatz enthält zwei Rechnungsfehler, deren Einfluß auf das Resultat, in manchen Fällen, merklich ist; der erste besteht darin, daß die Zeit, durch Multiplication mit dem Cosinus der wahren Declination, auf den größten Kreis reducirt ist, statt daß die scheinbare, d. i. die durch die Strahlenbrechung veränderte Declination hätte angewandt werden sollen; der andere findet sich in derjenigen Verbesserung der geraden Aufsteigung, welche von der Veränderung des Parallels herrührt, und welche statt durch den Cosinus der Declination, durch das Quadrat dieses Cosinus hätte dividirt werden sollen. Den ersten Fehler hat mir Herr Professor *Encke* bereits vor mehreren Jahren angezeigt; den anderen, vor Kurzem, Herr *Hansen*; Beiden bezeuge ich hier meinen verbindlichsten Dank. Sobald ich die erste dieser Anzeigen empfing, beschäftigte ich mich mit diesem Gegenstande von Neuem, und bemerkte bald, daß die Erscheinung in dem früheren Aufsatz nicht auf die einfachste Weise aufgefaßt war; es wurde nämlich dort die unmittelbare Einwirkung der Strahlenbrechung auf die

Oerter der Sterne und der Einfluß welchen dieselbe, durch Veränderung der Geschwindigkeit und Richtung der täglichen Bewegung äußert, abgesondert betrachtet, während es befriedigender ist, die durch die Natur des Mikrometers gegebenen Bedingungen, unmittelbar auf die scheinbaren Oerter der Sterne, so wie sie zu den verschiedenen Momenten der Beobachtung gehören, anzuwenden. Dadurch erhält man eine strenge Auflösung der Aufgabe, aus welcher später die Näherung abgeleitet werden mag, welche für die Ausübung hinreichend ist. Ich glaube, die Gelegenheit, welche mir die Bekanntmachung der berichtigten Formeln giebt, benutzen zu dürfen, um diese Ansicht zu entwickeln.

Die wahre grade Aufsteigung und Abweichung eines Sterns *S* bezeichne ich durch α und δ ; die scheinbare, durch die Strahlenbrechung veränderte, durch $\alpha + p$ und $\delta + q$; die Sternzeit, stets in Graden, Minuten etc. ausgedrückt, durch t ; den Stundenwinkel $= t - \alpha$ durch τ . Wenn diese Angaben zu einem anderen Sterne *S'* gehören, so werden sie in α' , δ' u. s. w. verändert, wenn zu einer anderen Zeit t , in $\alpha + p$, $\delta + q$, u. s. w. Den Stundenwinkel und die wahre Declination, welchen derjenige Punkt des Instruments entspricht, von welchem man die Declinationsunterschiede anrechnet, werde ich durch *T* und *D* andeuten. — Die Auflösung aller hierhergehörigen Aufgaben besteht darin, daß man *T* und *D* aus den Gleichungen eliminirt, welche durch die einzelnen Momente der Beobachtung gegeben sind, so daß α' und δ' als unbekannte Größen allein übrig bleiben. Dieses werde ich an vier Arten von Mikrometern ausführen.

I. Das Aequatoreal, oder ein Mikrometer mit einer Schraube für die Declinationsunterschiede, dessen Stundenfaden, durch parallactische Aufstellung, stets in den Declinationskreisen erhalten wird.

Wenn Δ den gemessenen Unterschied der Declinationen des Sterns und des Anfangspunkts der Theilungen bezeichnet, so ist für *S*

$t - \alpha - p = T; \delta + q - D = \Delta$
und für S'

$$t' - \alpha' - p' = T; \delta' + q' - D = \Delta'$$

woraus also folgt

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= t' - t - p' + p \\ \delta' - \delta &= \Delta' - \Delta - q' + q \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

II. Das Mikrometer dessen Stundenfaden, durch parallactische Aufstellung, immer in den Declinationskreisen erhalten wird, welches aber die Declinationen durch die Zeit angiebt, welche die Sterne anwenden, um von einem, im Winkel i geneigten Faden zum Stundenfaden zu gelangen.

$$= (t' - t - p' + p) \frac{\cos(\delta' + q')}{\tan i} - (t - t - p + p) \frac{\cos(\delta + q)}{\tan i} = q' + q$$

folgt. Setzt man

$$\Delta = (t - t_i) \cos \delta \cot g i; \Delta' = (t' - t_i) \cos \delta' \cot g i;$$

wo also Δ und Δ' die ohne Rücksicht auf die Strahlen-

$$\alpha' - \alpha = t' - t - p' + p$$

$$\delta' - \delta = \left\{ 1 - \frac{p' - p}{t' - t} \right\} \Delta' \frac{\cos(\delta' + q')}{\cos \delta'} - \left\{ 1 - \frac{p - p}{t - t} \right\} \Delta \frac{\cos(\delta + q)}{\cos \delta} - q' + q \right\} \dots \dots \dots (2)$$

III. Das Netz von 3 sich in einem Punkte schneidenden Fäden, dessen Lage gegen den Declinationskreis unbekannt ist.

Bezeichnet man den Winkel des mittleren Fadens, mit dem Declinationskreise, durch I , die Winkel der beiden anderen Fäden durch $I - i$ und $I + i'$ (wo i und i' bekannt, meistens gleich, angenommen werden), ferner die Durchgangszeiten durch den mittleren Faden und beide Seitenfäden, durch t ; t_i ; t_{ii} , so hat man für S

$$t - \alpha - p = T + (\delta + q - D) \frac{\tan I}{\cos(\delta + q)}$$

$$t_i - \alpha - p_i = T + (\delta + q_i - D) \frac{\tan(I - i)}{\cos(\delta + q_i)}$$

$$t_{ii} - \alpha - p_{ii} = T + (\delta + q_{ii} - D) \frac{\tan(I + i')}{\cos(\delta + q_{ii})}$$

und ähnliche Gleichungen für S' , nämlich:

$$t' - \alpha' - p' = T + (\delta' + q' - D) \frac{\tan I}{\cos(\delta' + q')}$$

$$t'_i - \alpha' - p'_i = T + (\delta' + q'_i - D) \frac{\tan(I - i)}{\cos(\delta' + q'_i)}$$

$$t'_{ii} - \alpha' - p'_{ii} = T + (\delta' + q'_{ii} - D) \frac{\tan(I + i')}{\cos(\delta' + q'_{ii})}$$

Da nur 3 unbekannte Größen I , T , D , α' und δ' vorhanden sind, so wird, durch diese 6 Gleichungen, die Aufgabe mehr als bestimmt; man sollte daher von Näherungswerten dieser Unbekannten ausgehen, und diejenigen Verbesserungen derselben bestimmen, welche allen vorhandenen Gleichungen möglichst nahe Genüge leisten, auch

Wenn man die Zeit des Durchgangs durch den geneigten Faden, durch t_i bezeichnet, so hat man die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} t_i - \alpha - p_i &= T + (\delta + q_i - D) \frac{\tan i}{\cos(\delta + q_i)} \\ t - \alpha - p &= T \end{aligned} \right\}$$

und zwei ähnliche für S' , nemlich

$$\left. \begin{aligned} t'_i - \alpha' - p'_i &= T + (\delta' + q'_i - D) \frac{\tan i}{\cos(\delta' + q'_i)} \\ t' - \alpha' - p' &= T \end{aligned} \right\}$$

woraus also $\alpha' - \alpha$ wie bei I, und $\delta' - \delta$

brechung berechneten Declinationsunterschiede bedeuten, so hat man

denen, welche aus der Beobachtung eines zweiten bekannten Sterns hervorgehen, dessen Zuziehung immer wünschenswerth seyn wird, indem die Fehler, bei dieser Beobachtung, einen vergrößerten Einfluss auf das Resultat erhalten.

Es hat nun keine Schwierigkeit, die unbekannten Größen I , $t - \alpha - p = T$, $\delta + q - D$ aus den 3 ersten Gleichungen zu bestimmen; die erste findet man, wenn man mit

$$\frac{\sin(i + i')}{\sin i \sin i'}; - \frac{\cos(I - i)}{\cos i \sin i}; - \frac{\cos(I + i')}{\cos i \sin i'}$$

multiplicirt und die Producte addirt; um aber das Resultat bequemer schreiben zu können, kann man die Veränderungen von p und q , in der Zwischenzeit $t_{ii} - t$, als gleichförmig, und alle 3 Cosinus in den Nennern als gleich annehmen, wodurch man, ganz ungewöhnliche Fälle ausgenommen, nichts Erhebliches von der Genauigkeit verliert. Setzt man daher

$$p_i = p - \frac{dp}{dt}(t - t_i); \quad q_i = q - \frac{dq}{dt}(t - t_i)$$

$$p_{ii} = p + \frac{dp}{dt}(t_{ii} - t); \quad q_{ii} = q + \frac{dq}{dt}(t_{ii} - t)$$

so erhält man, auf die angezeigte Weise,

$$\left(1 - \frac{dp}{dt} \right) \left\{ (t - t_i) \cot g i - (t_{ii} - t) \cot g i' + (t_{ii} - t_i) \tan g I \right\} \\ = \frac{dq}{dt} \left\{ (t - t_i) \cot g i \tan g I - (t_{ii} - t) \cot g i' \tan g I - (t_{ii} - t_i) \right\}$$

und, wenn man zwei Winkel I' und h einführt, so daß

$$\begin{aligned} \tan I' &= \frac{t'' - t}{t'' - t_1} \cot i' - \frac{t - t_1}{t'' - t_1} \cot i \\ \tan h &= \frac{\frac{dq}{dt}}{\left(1 - \frac{dp}{dt}\right)} \cos(\delta + q) \end{aligned}$$

ist,

$$\tan I' - \tan I = \tan h \left\{ \tan I' \tan I + 1 \right\}$$

oder

$$I = I' - h$$

wo es in die Augen fällt, daß I' die Neigung des mittleren Fadens gegen das Perpendikel auf den scheinbaren Weg des Sterns, und h den Winkel des letzteren und des Parallelkreises bedeuten.

Sobald hieraus, oder durch noch mehrere Beobachtungen, I gefunden ist, reichen zwei der Gleichungen zur Bestimmung von $t - \alpha - p - T$ und $\delta + q - D$ hin. Es ist aber allgemeiner, diese Quantitäten nicht unmittelbar durch die Beobachtungsmomente, sondern durch ähnliche Werthe, welche man ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung berechnet, zu bestimmen. Diese letzteren bezeichne ich durch A und Δ ; sie entsprechen den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} A &= \Delta \tan I' \sec \delta \\ A - (t - t_1) &= \Delta \tan(I' - i) \sec \delta \\ A + (t'' - t) &= \Delta \tan(I' + i') \sec \delta \end{aligned} \right\} \quad (\odot)$$

$$\left. \begin{aligned} t' - t &= t'' - t - p' + p = A' \left(1 - \frac{dp'}{dt}\right) + A \left(1 - \frac{dp}{dt}\right) + \frac{\Delta' \frac{dq'}{dt}}{\cos \delta' \cos(\delta' + q')} - \frac{\Delta \frac{dq}{dt}}{\cos \delta \cos(\delta + q)} \\ \delta' - \delta &= \Delta' \left(1 - \frac{dp'}{dt}\right) \frac{\cos(\delta' + q')}{\cos \delta'} - \Delta \left(1 - \frac{dp}{dt}\right) \frac{\cos(\delta + q)}{\cos \delta} + A' \frac{dq'}{dt} - A \frac{dq}{dt} - q' + q \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

IV. Das Kreismikrometer.

Wenn die Zeiten des Ein- und Austrittes durch t_1 und t'' bezeichnet werden, der Halbmesser des Kreises durch r , so hat man

$$\begin{aligned} rr &= (T - t_1 + \alpha + p_1)^2 \cos D \cos(\delta + q_1) + (\delta + q_1 - D)^2 \\ rr &= (t'' - \alpha - p'' - T)^2 \cos D \cos(\delta + q'') + (\delta + q'' - D)^2 \end{aligned}$$

schreibt man, um abzukürzen

$$\begin{aligned} t &\text{ für } \frac{1}{2}(t_1 + t'') \\ p &\text{ für } \frac{1}{2}(p_1 + p'') \\ q &\text{ für } \frac{1}{2}(q_1 + q'') \\ x &\text{ für } t - \alpha - p - T \\ \Delta &\text{ für } \delta + q - D \end{aligned}$$

und vernachlässigt man, unter dem Cosinuszeichen; die

im Falle der bestimmten Aufgabe vollständig, im Falle der mehr als bestimmten näherungsweise; diesen letzten Fall kann man dadurch auf den ersten zurückführen, daß man, statt der Beobachtungsmomente, diejenigen Werthe derselben annimmt, welchen diese Gleichungen vollkommen entsprechen. Es werden sich dann $t - \alpha - p - T = x$ und $\delta + q - D = y$ leicht so angeben lassen, daß sie denselben Zeitmomenten Genüge leisten. — Es ist klar, daß die Gleichungen $\odot$, für I' denselben Ausdruck geben, welcher oben schon im Ausdruck von I vorgekommen ist; man hat also, wie oben, $I = I' - h$, und wird nun x und y durch A und Δ ausdrücken können, wenn man $t - t_1$ und $t'' - t$ aus den beiderseitigen Gleichungen eliminirt. Die Rechnung hier zu geben wird unnöthig seyn; ihr Resultat ist,

$$\begin{aligned} x &= A \left(1 - \frac{dp}{dt}\right) - \frac{\Delta \frac{dq}{dt}}{\cos \delta \cos(\delta + q)} \\ y &= \Delta \left(1 - \frac{dp}{dt}\right) \frac{\cos(\delta + q)}{\cos \delta} + A \frac{dq}{dt} \end{aligned}$$

Für den Stern S' hat man ähnliche Ausdrücke, bei welchen die Neigung des mittleren Fadens, aller Schärfe nach, $= I + h'$, vorzusetzen ist; also

$$\begin{aligned} x' &= A' \left(1 - \frac{dp'}{dt}\right) - \frac{\Delta' \frac{dq'}{dt}}{\cos \delta' \cos(\delta' + q')} \\ y' &= \Delta' \left(1 - \frac{dp'}{dt}\right) \frac{\cos(\delta' + q')}{\cos \delta'} + A' \frac{dq'}{dt} \end{aligned}$$

Die Verbindung beider giebt:

Quantität $\frac{1}{2}(q'' - q_1)$, so verwandeln sich die beiden Gleichungen in

$$\begin{aligned} rr &= \frac{1}{4}(t'' - t_1 - p'' + p_1 + 2x)^2 \cos D \cos(\delta + q) + \left(\Delta - \frac{q'' - q_1}{2}\right)^2 \\ rr &= \frac{1}{4}(t'' - t_1 - p'' + p_1 + 2x)^2 \cos D \cos(\delta + q) + \left(\Delta + \frac{q'' - q_1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

und wenn man den halben Unterschied und die halbe Summe derselben nimmt, in

$$\begin{aligned} 0 &= x(t'' - t_1 - p'' + p_1) \cos D \cos(\delta + q) + \Delta(q'' - q_1) \\ rr &= \left\{ \frac{1}{4}(t'' - t_1 - p'' + p_1)^2 + xx \right\} \cos D \cos(\delta + q) + \Delta \Delta + \frac{1}{4}(q'' - q_1)^2 \end{aligned}$$

woraus x und Δ leicht gefunden werden. Setzt man indessen

$$p'' - p_1 = \frac{dp}{dt}(t'' - t_1); \quad q'' - q_1 = \frac{dq}{dt}(t'' - t_1)$$

so hat man

$$0 = x \left(1 - \frac{dp}{dt} \right) \cos D \cos(\delta + q) + \Delta \frac{dq}{dt}$$

$$rr = \left\{ \frac{1}{4} (t'' - t')^2 \left(1 - \frac{dp}{dt} \right)^2 + xx \right\} \cos D \cos(\delta + q) + \Delta \Delta + \frac{1}{4} (t'' - t')^2 \left(\frac{dq}{dt} \right)^2$$

oder, wenn man

$$rr - \frac{1}{4} (t'' - t')^2 \left(1 - \frac{dp}{dt} \right)^2 \cos D \cos(\delta + q) - \frac{1}{4} (t'' - t')^2 \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = \eta\eta$$

setzt

$$\eta\eta - \Delta\Delta = xx \cos D \cos(\delta + q)$$

Da für den Stern S' ähnliche Gleichungen statt finden, man also x, y, x', y' kennt, so hat man

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= t' - t - p' + p - x' + x \\ \delta' - \delta &= \Delta' - \Delta - q' + q \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Die Entwicklung dieser Vorschriften für noch meh-

$$\sin p \cos(\delta + q) = \sin p \sin s$$

$$\cos p \cos(\delta + q) = \cos \delta \cos p - \sin \delta \sin p \cos s$$

$$\sin(\delta + q) = \sin \delta \cos p + \cos \delta \sin p \cos s$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dz} \frac{\sin s^2 \cos \delta^2}{\cos(\delta + q)^2} + \sin p \frac{\cos \phi \cos a}{\sin z \cos(\delta + q)^2} (\cos s \cos \delta \cos p - \sin \delta \sin p)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dp}{dz} \frac{\sin s \cos \delta}{\cos(\delta + q)} (\cos s \cos \delta \cos p - \sin \delta \sin p) - \sin p \frac{\cos \phi \cos a}{\cos(\delta + q) \sin z} \sin s \cos \delta$$

Da aber selten Veranlassung seyn wird, nach den streng richtigen Formeln zu rechnen, so werde ich jetzt die zur Anwendung bequemen Näherungen ableiten. Ich setze dabei, so wie in dem erwähnten früheren Aufsätze,

$$p = k \tan z$$

und werde das Quadrat und die höhern Potenzen von k vernachlässigen. Setzt man

$$\tan \psi = \cot \phi \cos r$$

so hat man bekanntlich

$$\cos z = \frac{\sin \phi}{\cos \psi} \sin(\psi + \delta)$$

ad I.

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= t' - t + \frac{k \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \cdot \frac{\tan r \sin \psi}{\cos \delta \cos \delta'} \cos(\psi + \delta + \delta') \\ \delta' - \delta &= \Delta' - \Delta + \frac{k \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1^*)$$

ad II.

$$\text{Men hat } 1 - \frac{p - p'}{t - t'} = 1 - \frac{dp}{dt}$$

$$\frac{\cos(\delta + q)}{\cos \delta} = 1 - q \tan \delta$$

$$q = q - \frac{dq}{dt} (t - t')$$

$\alpha' - \alpha$ wie ad I

$$\left. \begin{aligned} \delta' - \delta &= \Delta' - \Delta + \frac{k \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \left\{ 1 - \frac{\cos \psi^2}{\tan \phi^2} - \sin \frac{\delta' + \delta}{2} \sin \left(2\psi + \frac{\delta' + \delta}{2} \right) \right\} \\ &+ \frac{k \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \cdot \frac{\cos \psi^2 \sin \psi \tan r}{\cos \frac{\delta' + \delta}{2}} \cdot \tan i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2^*)$$

rere Abänderungen der Mikrometer; z. B. für das *Bradley*-sche Netz, kann kaum ein Interesse haben, da man das hier benutzte Princip, wenn es erforderlich ist, eben so leicht darauf anwenden, als hier die Anwendung aufsuchen wird.

Die streng richtigen Ausdrücke von $p, q, \frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}$ sind in folgenden Formeln enthalten, in welchen p die Strahlenbrechung, ϕ die Polhöhe, z die wahre Zenithdistanz, s den parallactischen Winkel und a das Azimuth, von Süden durch Westen gezählt, bedeuten:

und ferner

$$p = k \frac{\tan r \sin \psi}{\cos \delta \sin(\psi + \delta)}$$

$$q = k \cot \phi (\psi + \delta)$$

$$\frac{dp}{dt} = k \left(\frac{\cos \psi}{\sin(\psi + \delta)} \right)^2 \{ \cot \phi \phi^2 + \cot \phi \phi \tan r \cos r \}$$

$$\frac{dq}{dt} = k \left(\frac{\cos \psi}{\sin(\psi + \delta)} \right)^2 \cot \phi \phi \sin r$$

Setzt man die Näherungsformeln in die, für die vier verschiedenen Arten der Mikrometer, oben gefundenen Ausdrücke und vernachlässigt man allenthalben k^2 u.s.w., so erhält man:

setzt man dieses; und die ähnlichen, sich auf S' beziehenden Ausdrücke in die Formeln (2), und erlaubt man sich, das Endresultat dadurch abzukürzen, daß man die, beiden Sternen zugehörigen Theile vereinigt, wodurch man Größen von der Ordnung des Products der Strahlenbrechung in das Quadrat des Declinationsunterschiedes vernachlässigt, so erhält man:

Die Declination erfordert also, bei dieser Beobachtungsart, eine Verbesserung, welche von der Neigung des schiefen Fadens gegen den Stundenfaden abhängt; hat man aber die Beobachtung an einem zweiten, auf der entgegengesetzten Seite, in gleichem Winkel i liegenden, schiefen Faden wiederholt und Δ' und Δ durch die Verweilungen der Sterne zwischen beiden schiefen Fäden bestimmt, so verschwindet die von $\tan i$ abhängige Verbesserung. In diesem Falle benutzt man den Stundenfaden allein für die gerade Aufsteigung, die schiefen Fäden allein für die Abweichung; will man aber den möglichst großen Vortheil aus der mehr als bestimmten Beobachtung ziehen, so muß die Rechnung für die gerade Aufsteigung, mit Rücksicht auf alle 3 Zeiten geführt werden.

ad III.

In den Formen (3) bezeichnen p, q, p', q' die Strahlenbrechungen in gerader Aufsteigung und Abweichung, in den Augenblicken der Durchgänge durch den mittleren Faden; es ist aber bequem, die Näherungsformel nur von einem Stundenwinkel und dem dazu gehörigen ψ abhängig zu machen. Nimmt man die halbe Summe der Stundenwinkel beider Sterne dafür an, und berechnet man p, q, p', q' für diesen Stundenwinkel, so hat man für die ähnlichen, in den Formeln vorkommenden Buchstaben zu setzen:

$$p + \frac{dp}{dt} \frac{1}{2} (A - A'); \quad q + \frac{dq}{dt} \frac{1}{2} (A - A')$$

$$p' - \frac{dp'}{dt} \frac{1}{2} (A - A'); \quad q' - \frac{dq'}{dt} \frac{1}{2} (A - A')$$

wodurch man erhält

$$\alpha' - \alpha = t' - t - p' + p - A' + A + \frac{1}{2} (A' + A) \left(\frac{dp'}{dt} - \frac{dp}{dt} \right) + \frac{\Delta \frac{dq'}{dt}}{\cos \delta' \cdot \cos (\delta' + q')} - \frac{\Delta \frac{dq}{dt}}{\cos \delta \cdot \cos (\delta + q)}$$

$$\delta' - \delta = \Delta' \left(1 - \frac{dp'}{dt} \right) \frac{\cos (\delta' + q')}{\cos \delta'} - \Delta \left(1 - \frac{dp}{dt} \right) \frac{\cos (\delta + q)}{\cos \delta} - q' + q + \frac{1}{2} (A' + A) \left(\frac{dq'}{dt} - \frac{dq}{dt} \right)$$

vernachlässigt man hier wieder die schon oben vernachlässigten Größen, so erhält man, nach der Substitution der Ausdrücke von p, q , etc.

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= t' - t - A' + A + \frac{k \sin (\delta' - \delta)}{\sin (\psi + \delta) \sin (\psi + \delta')} \cdot \frac{2 \tan \tau \cdot \sin \psi \cos \left(\psi + \frac{\delta + \delta'}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\delta + \delta'}{2} \right)} \\ \delta' - \delta &= \Delta' - \Delta + \frac{k \sin (\delta' - \delta)}{\sin (\psi + \delta) \sin (\psi + \delta')} \left\{ 1 - \frac{\cos \psi^2}{\tan^2 \varphi^2} - \sin \left(\frac{\delta' + \delta}{2} \right) \sin \left(2\psi + \frac{\delta' + \delta}{2} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots (3^*)$$

Ad IV.

Wenn man auch hier das Quadrat der Strahlenbrechung vernachlässigt, so ist

$$\Delta = \eta$$

$$x = -\eta \frac{dq}{\cos \delta^2}$$

Berechnet man daher Δ nach der Formel

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= t' - t + \frac{k \sin (\delta' - \delta)}{\sin (\psi + \delta) \sin (\psi + \delta')} \cdot \frac{2 \tan \tau \sin \psi \cos \left(\psi + \frac{\delta' + \delta}{2} \right)}{\cos \frac{\delta' + \delta}{2}} \\ \delta' - \delta &= \Delta' - \Delta + \frac{k \sin (\delta' - \delta)}{\sin (\psi + \delta) \sin (\psi + \delta')} \end{aligned} \right\} \dots (4^*)$$

Es ist nun noch übrig zu untersuchen, welchen Werth man dem Factor k beilegen muß, damit die berechneten Verbesserungen der Beobachtungen der Wahrheit so nahe kommen, als es, bei der angenommenen Form möglich ist. Diese Verbesserungen rühren fast ganz von der Verände-

$$\Delta \Delta = rr - \frac{1}{4} (t'' - t')^2 \left(1 - \frac{dp}{dt} \right) \cos D \cos (\delta + q)$$

$$= rr - \frac{1}{4} (t'' - t')^2 \cos (\delta - \Delta) \cos \delta \cdot ff$$

so hat man

$$f = \left(1 - \frac{dp}{dt} \right) \frac{\cos (\delta - \Delta + q) \cos (\delta + q)}{\cos (\delta - \Delta) \cos \delta}$$

oder, durch ψ und δ ausgedrückt, nahe

$$f = 1 - \frac{k}{\sin (\psi + \delta)^2} \left\{ \frac{\cos \psi^2}{\tan^2 \varphi^2} + \sin \delta \sin (2\psi + \delta) \right\}$$

und ferner

rung der Strahlenbrechung mit der Zenithdistanz her; die absolute Größe derselben hat nur geringen Einfluss. Man muß daher k so annehmen, daß es die wahre Veränderung der Strahlenbrechung darstellt. Berechnet man die verschiedenen Formeln so, daß man für $\delta' - \delta$ den beob-

achteten Unterschied der scheinbaren Declinationen setzt, so sollte man, statt der Differentialquotienten der Strahlenbrechung in Beziehung auf die wahre Zenithdistanz, diese Differentialquotienten in Beziehung auf die scheinbare Zenithdistanz nehmen, oder die Formeln mit

$$\frac{dp}{dz - dp}$$

multipliciren; k muß aber so bestimmt werden, daß

$$\frac{k}{\cos z^2} = \frac{dp}{dz}$$

$$\text{oder. . . . } k = \frac{dp}{dz} \cos z^2$$

ist; man hat also, statt der in den Formeln vorkommenden k

$$\frac{dp}{dz - dp} \cos z^2 = \frac{dp}{dz'} \cos z^2$$

zu setzen, wo z' die scheinbare Zenithdistanz bezeichnet. Nach dieser Formel habe ich die unten folgende Tafel für die Logarithmen von k berechnet, woraus man den in den Formeln anzuwendenden Werth derselben, mit dem Argumente der halben Summe der wahren Zenithdistanzen entnimmt. Sie setzt die Elemente der Königsberger Strahlenbrechungstafel voraus, und gilt, so wie diese, für den Barometerstand = 333.78 Lin. Pariser Maafs und den Thermometerstand = 48°,75 Fahrenheit; sie wird daher auf einen anderen Stand der meteorologischen Instrumente übertragen, wenn man die Logarithmen der Verbesserungs-

factoren hinzuffügt, welche ich in der VII Abtheilung meiner Beobachtungen gegeben habe.

Tafel für den Logarithmen von k .

Argument. Halbe Summe der wahren Zenithdistanzen.

0	1.7609	83	30	1.6534
45	1.7590	40	1.6485	— 49
50	1.7583	50	1.6433	— 52
55	1.7572	84	0	1.6379
60	1.7556	10	1.6324	— 55
65	1.7527	20	1.6266	— 58
70	1.7477	30	1.6203	— 63
71	1.7463	40	1.6137	— 66
72	1.7445	50	1.6069	— 68
73	1.7424	85	0	1.5997
74	1.7400	10	1.5916	— 81
75	1.7372	20	1.5826	— 90
76	1.7339	30	1.5728	— 98
77	1.7297	40	1.5622	— 106
78	1.7246	50	1.5508	— 114
79	0 1.7180	86	0	1.5385
79 30	1.7142	10	1.5355	— 130
80	0 1.7095	20	1.5112	— 143
80 30	1.7044	30	1.4956	— 156
81	0 1.6989	40	1.4785	— 171
81 30	1.6927	50	1.4599	— 186
82	0 1.6851	87	0	1.4394
82 30	1.6762	10	1.4168	— 226
83	0 1.6660	20	1.3918	— 256
10	1.6621	30	1.3638	— 280
20	1.6579	40	1.3323	— 315
30	1.6534	50	1.2969	— 354
		88	0	1.2576
				— 393

B e s s e l.

Auszug aus einem Schreiben des Herrn Professor Encke an den Herausgeber.

Seeberg 1824. Decbr. 4.

Kurze Zeit nach der Berechnung der letzten Bahn wurde mir eine sehr vollständige und genaue Reihe Wiener Beobachtungen von Herrn v. Zach mitgetheilt. Die Vergleichung derselben und aller im October gemachten, so weit sie mir zugekommen sind, wurde bis zum 24ten Septbr. mit der ersten Parabel, nachher mit der zweiten Parabel angestellt, welche sich der wahren Bahn weit näher als die Hyperbel anschloß.

Fehl. d. erst. Parabel.						
1824.	Mittl. Zeit.	Beob. AR.	Beob. Decl.	AR.	Decl.	Ort.
Sept. 7	8 17 5	236 50 59	44 42 52	+17,0	— 5,3	Wien
	9 31 41	49 27	44 9	30,7	12,6	
	9 12 38	49 4	44 29	47,0	—24,5	Altona
8	8 24 25	25 53	45 5 0	12,5	+44,0	Wien
9	8 22 5	1 3	27 36	20,9	+37,5	
11	8 38 48	285 11 42	46 12 44	+47,3	— 0,4	

Fehl. d. erst. Parabel.						
1824.	Mittl. Zeit.	Beob. AR.	Beob. Decl.	AR.	Decl.	Ort.
Sept. 12	8 17 3	234 48 14	46 34 0	+41,0	+ 8,4	Wien
13	7 51 47	24 57	55 45	38,4	—28,4	
14	10 11 52	233 58 50	47 18 24	31,4	+36,5	Altona
	11 18 4	57 14	21 6	57,8	—63,0	Bremen
15	8 7 38	37 38	38 5	47,3	11,3	Wien
	10 58 55	34 15	41 15	58,8	29,7	Altona
16	7 54 53	14 50	58 49	34,7	12,6	Wien
	10 12 50	11 46	48 1 21	60,1	22,1	Altona
17	7 58 35	232 51 21	19 40	54,0	16,7	Wien
18	8 56 55	26 52	40 19	63,5	+50,3	Altona
	10 44 51	25 11	43 6	57,0	—21,3	Bremen
19	8 13 9	5 15	49 0 34	52,6	+ 0,1	Wien
	10 57 55	2 20	3 35	42,1	—15,6	Bremen
20	8 2 30	231 42 23	20 30	46,5	+28,4	Wien
21	8 1 25	19 9	41 2	73,8	4,3	
22	10 17 13	230 54 13	50 2 41	94,8	3,9	