Über das Kùppersche Konoid.

Von stud. phil. Paul Ernst in Wien.

1.

Wählt man bei der von E. Seipka¹⁾ im 9. Jahrgang dieser Zeitschrift behandelten Regelfläche dritten Grades — sie sei im folgenden als Kùppersches Konoid bezeichnet — die xy -Ebene als Ebene des Leitkreises, die z -Achse als Doppelgerade und die Symmetrieebene des 2. und 4. Quadranten als Richtebene, so ergibt sich als Gleichung des Konoids

$$(1) \quad (x^2 + y^2)(x - z) + 2rx^2 = 0.$$

Als besondere Fläche dritten Grades muß sie durch eine Spezialisierung der zweiten Steinerschen²⁾ Erzeugungsart für Flächen dritten Grades erzeugbar sein.

Sei der Flächenbüschel zweiter Ordnung gegeben durch

$$(2) \quad x^2 + y^2 - 2\lambda(x + ky) = 0,$$

der dazu π -Ebenenbüschel durch

$$(3) \quad r(x - ky) + \lambda[(x - z)(1 + k^2) + 2rk^2] = 0,$$

so erhält man durch Elimination des Parameters λ die Gleichung (1) des Kùpperschen Konoids.

Das Kùppersche Konoid ist also das Erzeugnis eines Büschels von geraden Kreiszyklindern, die einander längs der z -Achse berühren, und eines dazu π Ebenenbüschels um jene Erzeugende, deren Projektion auf die xy -Ebene zur Mittelpunktsgerechten der Grundkreise des Zylinderbüschels in bezug auf $y = x$ symmetrisch ist.

Daraus folgt unmittelbar der von Seipka mittels darstellend-geometrischer Methoden bewiesene Satz:

Der Schnitt des Kùpperschen Konoids mit jeder durch eine Erzeugende gelegten Ebene ist eine Ellipse,

¹⁾ Zwei Aufgaben über die Flächen dritten und vierten Grades, welche zum Unterricht in der darstellenden Geometrie besonders geeignet sind.

²⁾ Über die Flächen dritten Grades, Crelles Journal, Bd. 53, S. 123 f.

die sich in der Horizontalprojektion als Kreis darstellt; ist die Erzeugende eine der singulären Erzeugenden, so berührt der Projektionskreis die andere.

2.

Setzt man in Gleichung (1) $z = k$, so ergibt sich als Gleichung der ebenen Horizontalschnitte

$$(4) \quad (x^2 + y^2)(x - k) + 2rx^2 = 0,$$

die Gleichung der Konchoiden von Sluse.¹⁾

Jeder ebene Horizontalschnitt des Küpperschen Konoids ist eine Slusesche Konchoide.

Insbesondere liefern die Schnitte im Abstand

$$k = 2r \text{ die Zissoïde des Diokles}^2) \quad x(x^2 + y^2) - 2ry^2 = 0$$

$$k = -2r \text{ die Visiera des Peano}^3) \quad (x^2 + y^2)(x + 2r) + 2rx^2 = 0$$

$$k = r \text{ die Strophoïde}^4) \quad x(x^2 + y^2) + r(x^2 - y^2) = 0$$

$$k = \frac{r}{2} \text{ die Trisektrix des Maclaurin}^5) \quad x(x^2 + y^2) + \frac{r}{2}(3x^2 - y^2) = 0.$$

Da die zwischen der Sluseschen Konchoide mit isoliertem Punkt und Asymptote befindliche Fläche $F = r(2k - r)\pi$ ⁶⁾ ist, ergibt sich das Volumen des Konoids zwischen Kreis-, Visiera- und Asymptotenebene

$$(5) \quad V = r\pi \int_{-2r}^0 (2k - r) dk = r\pi [k^2 - rk]_0^{-2r} = 2r^3\pi.$$

Es ist das Volumen des Konoids zwischen Kreis-, Visiera- und Asymptotenebene gleich dem des gleichseitigen Zylinders über dem Leitkreis.

3.

Der Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, die durch den Doppelpunkt einer rationalen zirkularen Kurve dritter Ordnung gehen und sie anderswo berühren, heißt Nebenevolute der Kurve.

¹⁾ G. Loria, Spezielle ebene Kurven, S. 71.

²⁾ Loria, l. c. S. 36.

³⁾ Peano, Appl. geom. del. calc. infinit. S. 81.

⁴⁾ Loria, l. c. S. 58.

⁵⁾ Maclaurin, Traité des fluxions, traduit de l'anglais par R. P. Pezenas, S. 198.

⁶⁾ St. Jellinek, Die Konchoiden von Sluse (10), S. 403, Zeitschr. f. d. Realschulwesen, XXIX. Jahrg.

Für die Sluseschen Konchoiden lautet ihre Gleichung, wie eine einfache Rechnung ergibt:¹⁾

$$(6) \quad y^2 + 2kx + k(2r - k) = 0.$$

Setzen wir nun $k = z$, so erhalten wir:

$$(7) \quad y^2 + 2(x + r)z - z^2 = 0,$$

die Gleichung eines Kegels zweiten Grades.

Die Parabeln, welche sich als Nebenevoluten der ebenen Horizontalschnitte des Küpperschen Konoids ergeben, erfüllen einen Kegel zweiten Grades, welcher die xy -Ebene längs der x -Achse berührt, seine Spitze im Mittelpunkt des Leitkreises hat und durch die Kuspidalpunkte der Fläche hindurchgeht.

4.

Für die Wendepunkte der Sluseschen Konchoiden gilt die Relation:²⁾

$$(8) \quad tg \varphi = \sqrt{\frac{k - 2r}{3k}}.$$

Daher ergibt sich als Ort der Wendepunkte aller Sluseschen Konchoiden auf der Fläche ihr Schnitt mit

$$(9) \quad \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{z - 2r}{3z}}$$

oder

$$(9') \quad 3y^2z - x^2z + 2rx^2 = 0.$$

Eliminiert man aus (9') und (1) y , so erhält man als Kreuzrißprojektion der betrachteten Kurve die Hyperbel

$$(10) \quad 2z^2 + 2rz - 2xz - rx = 0.$$

Die Kurve der Wendepunkte aller Sluseschen Konchoiden auf dem Küpperschen Konoid projiziert sich auf die Kreuzrißebene als Hyperbel, deren Asymptoten einen Winkel von 135° einschließen; ihr Scheitel ist im Punkt $\left(0, -\frac{r}{2}\right)$ gelegen.

¹⁾ Analog der allgemeineren Berechnung in Loria, l. c. S. 35.

²⁾ Jellinek, l. c. Formel (6).

5.

Die ebenen Schnitte parallel zur yx -Ebene haben die Gleichung

$$(11) \quad (k^2 + y^2)(k - z) + 2rk^2 = 0,$$

oder in anderer Form

$$(11') \quad y^2 z = k^2 (2r - z).$$

Die Gleichung (11') geht durch die Substitution $z = z'$
 $y = \frac{ky}{z}$ über in

$$(12) \quad y^2 - 2rz + z^2 = 0,$$

die Gleichung eines Kreises, so daß die Kurven, — sie heißen Schützenbogen (The Archers Bow)¹⁾ — sich als Hyperbolismen²⁾ von Kreisen ergeben.

Die ebenen Schnitte des Küpperschen Konoids parallel zur yz -Ebene sind Schützenbogen.

Insbesondere liefern die Schnitte im Abstand

$$k = 2r = a \text{ die Versiera}^3) \quad xy^2 = x^2(a - x)$$

$$k = r = b \text{ die Pseudoversiera}^4) \quad xy^2 = b^2(2b - x).$$

Da die zwischen dem Schützenbogen und seiner Asymptote befindliche Fläche, wie sich leicht ergibt, $F = 2rk\pi$ ist, läßt sich das Volumen des Konoids zwischen der Doppellinie und einem zur yz -Ebene parallelen Schnitt leicht bestimmen.

$$(13) \quad V = 2r\pi \int_0^k k dk = rk^2\pi.$$

Das Volumen des Konoids zwischen der Doppellinie und einer zur yz -Ebene parallelen Schnittebene beträgt $\frac{3}{4}$ vom Volumen eines Rotationsellipsoids mit den Achsen r, k, k . Ist die Schnittebene insbesondere die Ebene der Pseudoversiera, so ist das betrachtete Volumen $\frac{3}{4}$, ist sie die der Versiera, so ist es dreimal so groß als die Kugel, für die der Leitkreis größter Kugelkreis ist.

¹⁾ F. W. Newmann, On curves of the third degree, (Br. Ass. Rep. Exeter 1869).

²⁾ Loria, l. c. S. 20, (Hyp. conicae centrales ellipsae).

³⁾ Loria, l. c. S. 76 (2).

⁴⁾ Loria, l. c. S. 79 (8).

6.

Zur Bestimmung der Striktionslinie stellt man die Gleichung der Fläche in Parameterform auf, so daß die Erzeugenden durch $v=k$ und die Doppellinie durch $u=0$ gegeben ist.¹⁾ Sie lautet:

$$(14) \quad \begin{cases} x = \frac{-v}{\sqrt{2rv + v^2}} \cdot u \\ y = \frac{\sqrt{2rv - v^2}}{\sqrt{2rv + v^2}} \cdot u \\ z = v - \frac{v}{\sqrt{2rv + v^2}} \cdot u \end{cases}$$

Seien die Koeffizienten von u in $xy z$ bzw. l, m, n , ihre ersten Ableitungen nach v, l', m', n' , bezeichnet man ferner

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = A$$

und

$$l'x' + m'y' + n'z' = B,$$

so ist die Striktionslinie durch $u = -\frac{B}{A}$ gegeben.²⁾

Für das Küppersche Konoid lautet somit die Gleichung der Striktionslinie in Gauß'schen Koordinaten:

$$(15) \quad 2ru = (2r - v) \sqrt{2rv + v^2}.$$

Durch Rücksubstitution von x, y, z folgt, daß die Striktionslinie des Konoids sein Schnitt mit der Fläche

$$(16) \quad 2rz = (z - x)^2$$

ist.

Die Striktionslinie des Küpperschen Konoids projiziert sich also auf die Kreuzrißebene als Parabel.

Eliminiert man z aus (1) und (16), so erhält man als Projektion auf die xy -Ebene die Gleichung des geraden Zweiblattes.³⁾

$$(17) \quad (x^2 + y^2)^2 + 2rxy^2 = 0.$$

Die Striktionslinie des Küpperschen Konoids projiziert sich auf die xy -Ebene als ein gerades Zweiblatt, das bekanntlich eine Fußpunktskurve der Steinerschen Hypozykloide ist.⁴⁾

¹⁾ Kommerell, Raumkurven, S. 150 ff.

²⁾ Kommerell, l. c. Formel (6).

³⁾ G. Lora, l. c. S. 159, (9').

⁴⁾ Vgl. Seipka, l. c.