10. Zerlegung geradliniger Schwingungsfiguren; von O. Krigar-Menzel.

Unter den graphischen Figuren, welche die periodischen Bewegungen einzelner Punkte von gestrichenen und gezupften Saiten darstellen, spielen diejenigen eine wichtige Rolle, welche aus geradlinigen Strecken verschiedener Neigung zusammengesetzt sind; diese sind nämlich einer einfachen Ausmessung und analytischen Darstellung directer zugänglich, als die krummlinigen. Es kommt bei der Analyse solcher Schwingungs-

figuren meist darauf an, dieselben in eine Superposition von einfachen Sinuswellen, entsprechend dem Grundton und dessen harmonischen Obertönen, aufzulösen. Mathematisch wird diese Aufgabe durch die Darstellung der vorgeschriebenen periodischen Function in Form einer Fourier'schen Reihe gelöst.

Da ich beim Studium der Saitenbewegungen oft in die Nothwendigkeit solcher Entwicklungen versetzt bin, habe ich mir eine stets gebrauchsfertige Formel hergestellt, welche vielleicht auch anderen Rechnern nützlich sein kann, und deshalb hier in Kürze abgeleitet werden soll.

Gegeben ist ein periodischer Linienzug, dessen Periode aus μ unter willkürlichen Winkeln aneinander gesetzten geradlinigen Strecken besteht, wie ihn obenstehende Figur zeigt.

Die Form dieser gebrochenen Linien können wir dadurch bestimmen, dass wir die Coordinaten sämtlicher Eckpunkte im Bereiche einer Periode messen und angeben. Dieselben seien:

$$\begin{array}{l} \text{Abscissen: } \tau_0 \ \tau_1 \ \tau_2 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \tau_\mu \\ \text{Ordinaten: } h_0 \ h_1 \ h_2 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ h_\mu. \end{array}$$

Das ganze Intervall $\tau_\mu - \tau_0 = T$ ist die Länge einer Periode; wegen der continuirlichen Fortsetzung des Linienzuges muss $h_\mu = h_0$ sein.

Bezeichnen wir die Abscissen mit t , die Ordinaten mit y , so ist die Function $y(t)$, welche durch diesen Linienzug graphisch dargestellt wird, in den verschiedenen Theilintervallen durch folgende analytische Ausdrücke gegeben.

Für $\tau_0 < t < \tau_1$ ist

$$y = \frac{h_0 \tau_1 - h_1 \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} + \frac{h_1 - h_0}{\tau_1 - \tau_0} \cdot t$$

.

Für $\tau_b < t < \tau_{b+1}$ ist

$$y = \frac{h_b \tau_{b+1} - h_{b+1} \tau_b}{\tau_{b+1} - \tau_b} + \frac{h_{b+1} - h_b}{\tau_{b+1} - \tau_b} \cdot t$$

$$(b = 1, 2, \quad \cdot \quad \cdot \quad \mu - 1).$$

Die bekannte Form der Entwicklung einer Function y von der Periode T in eine trigonometrische Reihe ist:

$$y = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{a=1}^{\infty} A_a \cos 2 a \pi \frac{t}{T} + \sum_{a=1}^{\infty} B_a \sin 2 a \pi \frac{t}{T}.$$

Dabei sind die Coefficienten bestimmt durch die Gleichungen:

$$A_a = \frac{2}{T} \int_{\tau_0}^{\tau_\mu} y \cdot \cos 2 a \pi \frac{t}{T} \cdot dt$$

und

$$B_a = \frac{2}{T} \int_{\tau_0}^{\tau_\mu} y \cdot \sin 2 a \pi \frac{t}{T} \cdot dt.$$

Diese Integrale zerfallen, entsprechend den μ geradlinigen Strecken, in μ Summanden mit den Grenzen $\tau_0, \tau_1, \tau_2 \dots \tau_\mu$.

Wir wollen die von τ_b bis τ_{b+1} reichenden Antheile bilden und durch $A_a^{(b)}$ und $B_a^{(b)}$ bezeichnen. Es ist dann in einer ohne weiteres verständlichen kurzen Schreibart:

$$\left\{ \begin{matrix} A_a^{(b)} \\ B_a^{(b)} \end{matrix} \right\} = \frac{2}{T} \frac{h_b \tau_{b+1} - h_{b+1} \tau_b}{\tau_{b+1} - \tau_b} \int_{\tau_b}^{\tau_{b+1}} \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2 a \pi \frac{t}{T} dt$$

$$+ \frac{2}{T} \frac{h_{b+1} - h_b}{\tau_{b+1} - \tau_b} \int_{\tau_b}^{\tau_{b+1}} t \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2 a \pi \frac{t}{T} dt.$$

Die auftretenden Integrale sind leicht auszurechnen. Dabei tritt im ersten Integral und in dem durch partielle Ausführung des zweiten gewonnenen Antheil der Factor $1/a$ auf. Um diese Glieder haben wir uns nicht zu bekümmern, denn dieselben müssen sich doch bei der Summirung über alle Theilintervalle fortheben; hat doch Stokes¹⁾ bewiesen, dass die Coefficienten bei Entwicklung einer Function, wie die unserige, die selbst keine Sprünge hat, deren erste Differentialquotienten aber unstetig sind, proportional $1/a^2$ fortschreiten.

Einen dementsprechenden Antheil liefert nur das zweite Integral nach Ausführung der partiellen Integration. Dieser Antheil lautet:

$$\frac{h_{b+1} - h_b}{\tau_{b+1} - \tau_b} \cdot \frac{T}{2 a^2 \pi^2} \left[\left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2 a \pi \frac{\tau_{b+1}}{T} - \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2 a \pi \frac{\tau_b}{T} \right].$$

Der Factor $(h_{b+1} - h_b)/(\tau_{b+1} - \tau_b)$ stellt die Tangente der Neigung der ausgewählten Strecke dar und werde deshalb durch $\operatorname{tg} \vartheta_b^{b+1}$ bezeichnet.

Bilden wir nun die Summe über sämtliche Theilintervalle von $b = 0$ bis $b = \mu - 1$, so erhalten wir als Resultat die Formel:

$$\left\{ \begin{matrix} A_a \\ B_a \end{matrix} \right\} = \frac{T}{2 a^2 \pi^2} \left[\operatorname{tg} \vartheta_0^1 \cdot \left(\left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2 a \pi \frac{\tau_1}{T} - \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2 a \pi \frac{\tau_0}{T} \right) \right.$$

$$+ \operatorname{tg} \vartheta_{\frac{1}{2}}^2 \cdot \left(\left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2 a \pi \frac{\tau_2}{T} - \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2 a \pi \frac{\tau_1}{T} \right) + \dots$$

$$\left. + \operatorname{tg} \vartheta_{\mu-1}^\mu \left(\left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2 a \pi \frac{\tau_\mu}{T} - \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2 a \pi \frac{\tau_{\mu-1}}{T} \right) \right].$$

1) Cambridge Transact. 8. p. 533—584.

Bedenkt man, dass die trigonometrischen Functionen von $2\pi\tau^0/T$ und von $2\pi\tau_\mu/T (= 2\pi + 2\pi\tau_0/T)$ identisch sind, so kann man die Ausdrücke auch in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A_a \\ B_a \end{Bmatrix} &= \frac{T}{2a^2\pi^2} \left[(\operatorname{tg} \vartheta_{\mu-1}^\mu - \operatorname{tg} \vartheta_0^1) \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2a\pi \frac{\tau_0}{T} \right. \\ &\quad + \operatorname{tg} \vartheta_0^1 - \operatorname{tg} \vartheta_1^2) \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2a\pi \frac{\tau_1}{T} + \dots \\ &\quad \left. + (\operatorname{tg} \vartheta_{\mu-2}^{\mu-1} - \operatorname{tg} \vartheta_{n-1}^\mu) \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2a\pi \frac{\tau_{\mu-1}}{T} \right]. \end{aligned}$$

(Diese Formeln passen nicht auf das unperiodische Glied der Reihenentwicklung; dieses ist vielmehr:

$$\frac{1}{2} A_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{\tau_0}^{\tau_\mu} y \cdot dt,$$

und stellt den Mittelwerth der Erhebungen der Figur über die t -Axe dar. Dasselbe ist meist ohne Interesse und kann durch geeignete Lage der t -Axe stets gleich Null gemacht werden.)

Hiernach ist es leicht, für jede aus geradlinigen Strecken zusammengesetzte und ausgemessene Schwingungsfigur die Coefficienten der Reihe: das sind die Amplituden der Partialschwingungen, zu berechnen. Häufig kann man durch geeignete Wahl des Anfangspunktes τ_0 die Zerlegung noch so vereinfachen, dass entweder alle $A_a = 0$ werden (kehrgleiche Figuren), oder alle $B_a = 0$ werden (spiegelgleiche Figuren). Der Zeitpunkt τ_0 braucht keinem wahren Knick der Figur zu entsprechen, denn die Möglichkeit $\operatorname{tg} \vartheta_{\mu-1}^\mu = \operatorname{tg} \vartheta_1^0$ ist in unserer Rechnung nicht ausgeschlossen.

Berlin, Mai 1893.